

ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к практическим работам и практической подготовке  
по учебной дисциплине  
**«Математические методы решения прикладных  
профессиональных задач»**  
для обучающихся по специальности  
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений

Ставрополь, 2026

*сведения о сертификате ЭЦ*

Владелец: Кандаурова Наталья  
Владимировна, директор  
Сертификат:  
0298d2a100a6b37d85433743564d5a7918  
Действителен: с 01.12.2025 12:39:11 по  
01.03.2027 12:49:11

## Содержание

Практическая работа №1. Дифференциальное исчисление.....	5
Практическое задание № 2. Общее исследование функции.....	12
Практическая работа № 3. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования.....	23
Практическая работа № 4. Определённый интеграл.....	34
Практическое занятие № 5. Множества и операции над ними.....	41
Практическая работа № 6. Векторы на плоскости.....	44
Практическое занятие № 7. Основные понятия теории вероятностей.....	46
Практическое занятие № 8. Основные теоремы теории вероятностей.....	51

## **Формирование общих и профессиональных компетенций средствами дисциплины «Математические методы решения прикладных профессиональных задач»**

Изучение математических методов решения прикладных профессиональных задач играет решающую роль в системе профессионального образования, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой. Внедрение новых стандартов среднего профессионального образования обеспечило компетентностный подход и изменило содержание образовательной программы по математике на разных специальностях.

Во все времена математика имела огромное значение в формировании стиля мышления обучающегося, и это в настоящее время – время внедрения Федеральных государственных образовательных стандартов третьего поколения, не утратило свою значимость. С переходом на стандарты нового поколения, которые разработаны с позиций компетентностного подхода в образовании, вопрос повышения качества обучения математике приобретает особую актуальность.

Под компетенцией в ФГОС понимается способность применять знания, умения, практический опыт для успешной деятельности в определенной области.

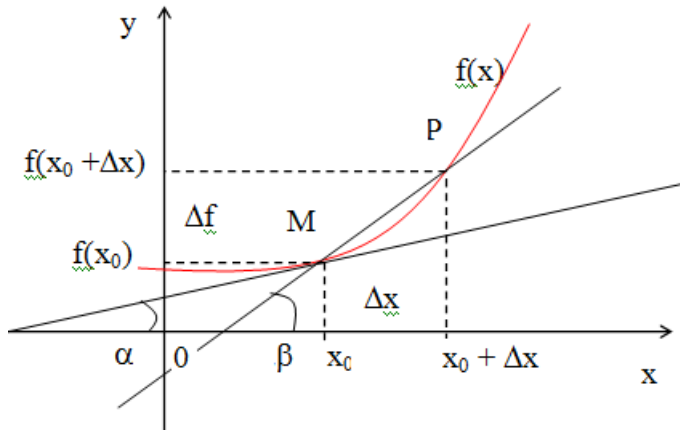
В соответствии с ФГОС средствами дисциплины " Математические методы решения прикладных профессиональных задач " и других дисциплин должны быть сформированы общие и профессиональные компетенции.

Общие компетенции означают совокупность социально – личностных качеств выпускника, обеспечивающих осуществление деятельности на определенном квалификационном уровне. Под профессиональными компетенциями понимается способность действовать на основе имеющихся умений, знаний и практического опыта в определенной профессиональной деятельности.

# Практическое занятие №1. Дифференциальное исчисление.

## Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.



Пусть  $f(x)$  определена на некотором промежутке  $(a, b)$ . Тогда  $tg \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$  — тангенс угла наклона секущей  $MP$  к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg \alpha$$

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ .

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой:  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой:  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Фактически производная функции показывает, как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции  $f(t)$ , где  $t$  — время, а  $f(t)$  — закон движения (изменения координат) — мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

### Односторонние производные функции в точке.

**Определение.** Правой (левой) производной функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  называется правое (левое) значение предела отношения  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция  $f(x)$  имеет производную в некоторой точке  $x = x_0$ , то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во-первых функция может иметь разрыв в точке  $x_0$ , а во-вторых, даже если функция непрерывна в точке  $x_0$ , она может быть в ней не дифференцируема.

Например:  $f(x) = |x|$  - имеет в точке  $x = 0$  и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

**Теорема.** (Необходимое условие существования производной) *Если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

### Основные правила дифференцирования.

Обозначим  $f(x) = u$ ,  $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке  $x$ .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

### Производные основных элементарных функций.

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) (e^x)' = e^x$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$9) (\sin x)' = \cos x$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

### Производная сложной функции.

**Теорема.** Пусть  $y = f(x)$ ;  $u = g(x)$ , причем область значений функции  $u$  входит в область определения функции  $f$ .

Тогда 
$$y' = f'(u) \cdot u'$$

**Доказательство.**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Пусть функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ , где  $\alpha \rightarrow 0$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Следовательно:  $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ .

Величина  $\alpha\Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем  $f'(x)\Delta x$ , т.е.  $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения  $\Delta y$ .

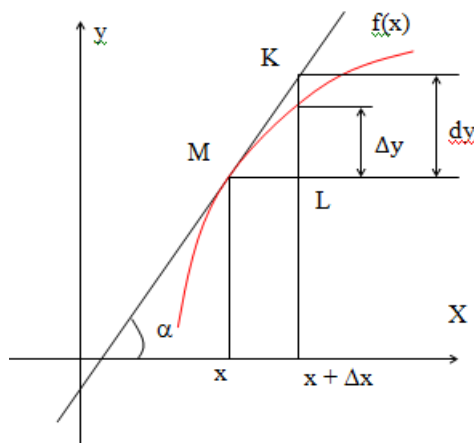
**Определение.** Дифференциалом функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается  $dy$  или  $df(x)$ .

Из определения следует, что  $dy = f'(x)\Delta x$  или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать:  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

### Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника  $\Delta MKL$ :  $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции  $f(x)$  в точке  $x$  равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

### Свойства дифференциала.

Если  $u = f(x)$  и  $v = g(x)$ -функции, дифференцируемые в точке  $x$ , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

- 1)  $d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u' dx \pm v' dx = du \pm dv$
- 2)  $d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = vdu + udv$
- 3)  $d(Cu) = Cdu$
- 4)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

### Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть  $y = f(x)$ ,  $x = g(t)$ , т.е.  $y$  - сложная функция.

Тогда

$$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала  $dy$  не зависит от того, будет ли  $x$  независимой переменной или функцией какой-то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если  $x$  - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если  $x$  зависит от  $t$ , то  $\Delta x \neq dx$ .

Таким образом, форма записи  $dy = f'(x)\Delta x$  не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции  $y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$ .

Сначала преобразуем данную функцию:  $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x 2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции  $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$ .

$$y' = \frac{(2x e^{x^2} + x^2 2x e^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2x e^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x e^{x^2} (x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Пример. Найти производную функции  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции  $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$i \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции  $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = (x^2 e^{x^2})' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2) \ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1+2 \ln x + 2x^2 \ln x)$$

**Задание к практической подготовке**

**Найти производные от указанных функций:**

1. а)  $y = x^5 + \ln(x^2 + 8x - 1)$ ; б)  $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}x+3}$       2. а)  $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$ ; б)

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$$

3. а)  $y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$ ; б)  $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$       4. а)  $y = x^2 + \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ ; б)

$$y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$$

5. а)  $y = (2x + e^{-x^2})^2$ ; б)  $y = \ln \frac{\sin x}{\cos 2x}$       6. а)  $y = \operatorname{tg}^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$ ; б)

$$y = \frac{x+1}{x^2 - \ln x}$$

7. а)  $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$ ; б)  $y = \operatorname{ctg} \frac{\ln x + 1}{2 - \ln x}$       8. а)  $y = x^2 \cdot 10^{-x+2}$ ; б)

$$y = \frac{e^x + 1}{\cos x}$$

$$9. \text{ а) } y = \sin^2 2x \cdot \cos \frac{x}{2}; \text{ б) } y = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$$

$$10. \text{ а) } y = \operatorname{arctg} x^2 - \ln \sin x; \text{ б) }$$

$$11. \text{ а) } y = x^4 + e^{\sqrt{x^2+4}}; \text{ б) } y = \frac{\cos x + 2x}{\sqrt{x}}$$

$$12. \text{ а) } y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x; \text{ б) }$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

### Вопросы к занятию

1. Дайте определение производной функции.
2. Дайте определение дифференциала функции.
3. Какую функцию называют сложной?
4. Перечислите правила нахождения производной сложной функции.
5. Какую функцию называют обратной?
6. Как находят производные к обратным функциям?
7. Каков смысл дифференциала?
8. Сформулируйте правила дифференцирования.

## Практическое занятие № 2. Общее исследование функции

### Исследование функций с помощью производной. Возрастание и убывание функций

**Теорема.1)** Если функция  $f(x)$  имеет производную на отрезке  $[a, b]$  и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.  $f'(x) \geq 0$ .

2) Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на промежутке  $(a, b)$ , причем  $f'(x) > 0$  для  $a < x < b$ , то эта функция возрастает на отрезке  $[a, b]$ .

#### Доказательство.

1) Если функция  $f(x)$  возрастает, то  $f(x + \Delta x) > f(x)$  при  $\Delta x > 0$  и  $f(x + \Delta x) < f(x)$  при  $\Delta x < 0$ , тогда:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть  $f'(x) > 0$  для любых точек  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих отрезку  $[a, b]$ , причем  $x_1 < x_2$ .

Тогда по теореме Лагранжа:  $f(x_2) - f(x_1) = f'(\epsilon)(x_2 - x_1)$ ,  $x_1 < \epsilon < x_2$

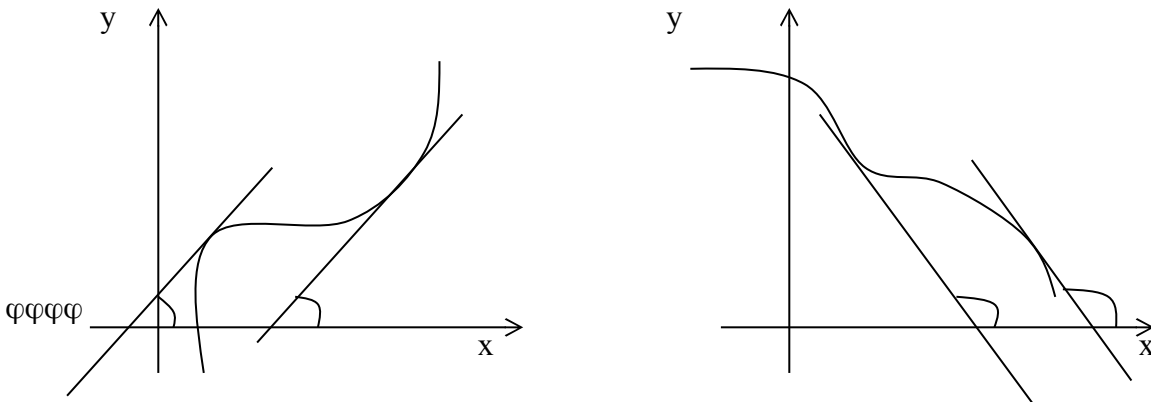
По условию  $f'(\epsilon) > 0$ , следовательно,  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , т.е. функция  $f(x)$  возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция  $f(x)$  убывает на отрезке  $[a, b]$ , то  $f'(x) \leq 0$  на этом отрезке. Если  $f'(x) < 0$  в промежутке  $(a, b)$ , то  $f(x)$  убывает на отрезке  $[a, b]$ .

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



### Точки экстремума.

**Определение.** Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_1$  максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку  $x_1$ . Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_2$  минимум, если  $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$  при любом  $\Delta x$  ( $\Delta x$  может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

**Определение.** Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

**Теорема.** (необходимое условие существования экстремума) Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_1$  и точка  $x_1$  является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

**Доказательство.** Предположим, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = x_1$  максимум. Тогда при достаточно малых положительных  $\Delta x > 0$  верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.} \\ f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при } \Delta x < 0 \\ \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при } \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если  $\Delta x \rightarrow 0$ , но  $\Delta x < 0$ , то  $f'(x_1) \geq 0$ , а если  $\Delta x \rightarrow 0$ , но  $\Delta x > 0$ , то  $f'(x_1) \leq 0$ .

А возможно это только в том случае, если при  $\Delta x \rightarrow 0$   $f'(x_1) = 0$ .

Для случая, если функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_2$  минимум теорема доказывается аналогично.

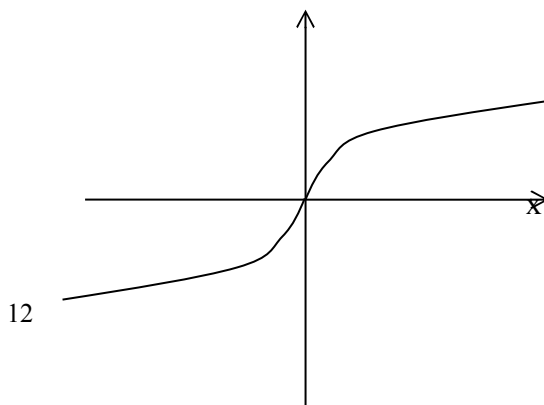
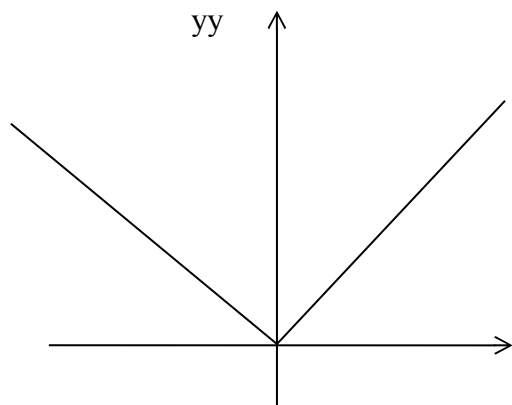
Теорема доказана.

**Следствие.** Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция  $y = x^3$ , производная которой в точке  $x = 0$  равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

**Определение.** **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример:  $f(x) = |x|$  | Пример:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке  $x = 0$  функция имеет минимум, но не имеет производной.

В точке  $x = 0$  функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.


Вообще говоря, функция  $f(x)$  может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

**Теорема.** (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в интервале  $(a, b)$ , который содержит критическую точку  $x_1$ , и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки  $x_1$ ).

Если при переходе через точку  $x_1$  слева направо производная функции  $f'(x)$  меняет знак с “+” на “-”, то в точке  $x = x_1$  функция  $f(x)$  имеет максимум, а если производная меняет знак с “-” на “+” - то функция имеет минимум.

**Доказательство.**

Пусть  $f'(x) > 0$  при  $x < x_1$  

По теореме Лагранжа:  $f(x) - f(x_1) = f'(\epsilon)(x - x_1)$ , где  $x < \epsilon < x_1$ .

Тогда: 1) Если  $x < x_1$ , то  $\epsilon < x_1$ ;  $f'(\epsilon) > 0$ ;  $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$ , следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если  $x > x_1$ , то  $\epsilon > x_1$ ;  $f'(\epsilon) < 0$ ;  $f'(\epsilon)(x - x_1) < 0$ , следовательно

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что  $f(x) < f(x_1)$  в любых точках вблизи  $x_1$ , т.е.  $x_1$  – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при **нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:**

- 1) Найти критические точки функции.
- 2) Найти значения функции в критических точках.
- 3) Найти значения функции на концах отрезка.
- 4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

**Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.**

Пусть в точке  $x = x_1$   $f'(x_1) = 0$  и  $f''(x_1)$  существует и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_1$ .

**Теорема.** Если  $f'(x_1) = 0$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x = x_1$  имеет максимум, если  $f''(x_1) < 0$  и минимум, если  $f''(x_1) > 0$ .

**Доказательство.**

Пусть  $f'(x_1) = 0$  и  $f''(x_1) < 0$ . Т.к. функция  $f(x)$  непрерывна, то  $f'(x_1)$  будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки  $x_1$ .

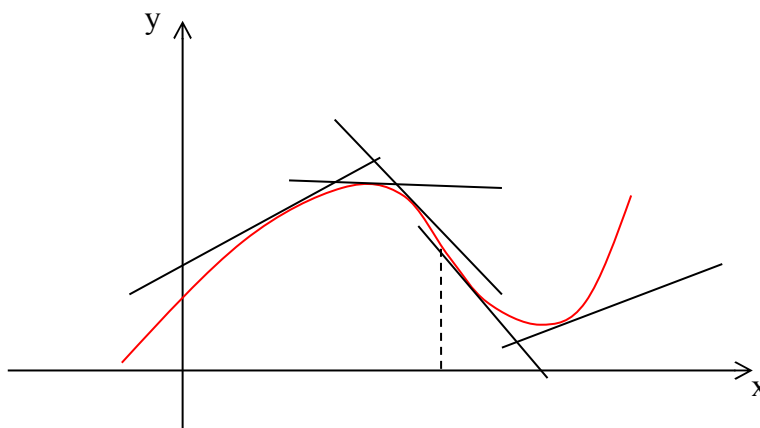
Т.к.  $f'(x) = (f'(x))' < 0$ , то  $f'(x)$  убывает на отрезке, содержащем точку  $x_1$ , но  $f'(x_1) = 0$ , т.е.  $f'(x) > 0$  при  $x < x_1$  и  $f'(x) < 0$  при  $x > x_1$ . Это и означает, что при переходе через точку  $x = x_1$  производная  $f'(x)$  меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция  $f(x)$  имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если  $f'(x) = 0$ , то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

**Выпуклость и вогнутость кривой.  
Точки перегиба.**

**Определение.** Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале  $(a, b)$ , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью **вверх**, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью **вниз** – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

**Теорема 1.** Если во всех точках интервала  $(a, b)$  вторая производная функции  $f(x)$  отрицательна, то кривая  $y = f(x)$  обращена выпуклостью **вверх** (выпукла).

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in (a, b)$ . Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой:  $y = f(x)$ ;

Уравнение касательной:  $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

Следует доказать, что  $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ .

По теореме Лагранжа для  $f(x) - f(x_0)$ :  $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $x_0 < c < x$ .

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для  $f'(c) - f'(x_0): y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$ ,  $x_0 < c_1 < c$

Пусть  $x > x_0$  тогда  $x_0 < c_1 < c < x$ . Т.к.  $x - x_0 > 0$  и  $c - x_0 > 0$ , и кроме того по условию  $f''(c_1) < 0$ , следовательно,  $y - \bar{y} < 0$ .

Пусть  $x < x_0$  тогда  $x < c < c_1 < x_0$  и  $x - x_0 < 0$ ,  $c - x_0 < 0$ , т.к. по условию  $f''(c_1) < 0$ , то  $y - \bar{y} < 0$ .

Аналогично доказывается, что если  $f''(x) > 0$  на интервале  $(a, b)$ , то кривая  $y=f(x)$  вогнута на интервале  $(a, b)$ .

Теорема доказана.

**Определение.** Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

**Теорема 2.** Пусть кривая определяется уравнением  $y = f(x)$ . Если вторая производная  $f''(a) = 0$  или  $f''(a)$  не существует и при переходе через точку  $x = a$   $f''(x)$  меняет знак, то точка кривой с абсциссой  $x = a$  является точкой перегиба.

**Доказательство.** 1) Пусть  $f''(x) < 0$  при  $x < a$  и  $f''(x) > 0$  при  $x > a$ . Тогда при  $x < a$  кривая выпукла, а при  $x > a$  кривая вогнута, т.е. точка  $x = a$  – точка перегиба.

2) Пусть  $f''(x) > 0$  при  $x < b$  и  $f''(x) < 0$  при  $x > b$ . Тогда при  $x < b$  кривая обращена выпуклостью вниз, а при  $x > b$  – выпуклостью вверх. Тогда  $x = b$  – точка перегиба.

Теорема доказана.

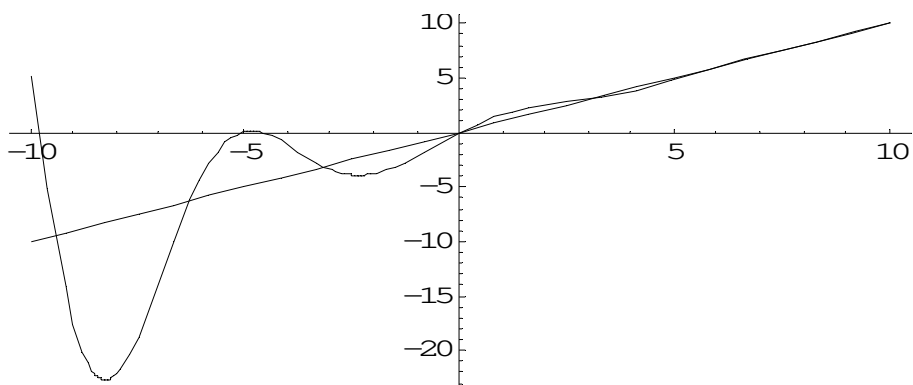
### Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты  $x$  точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

**Определение.** Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции  $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$ . Ее наклонная асимптота  $y = x$ .



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

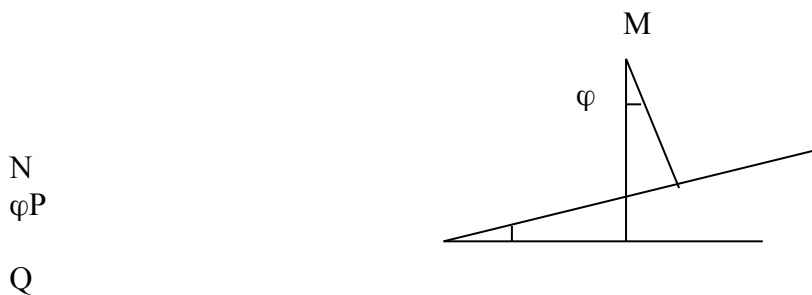
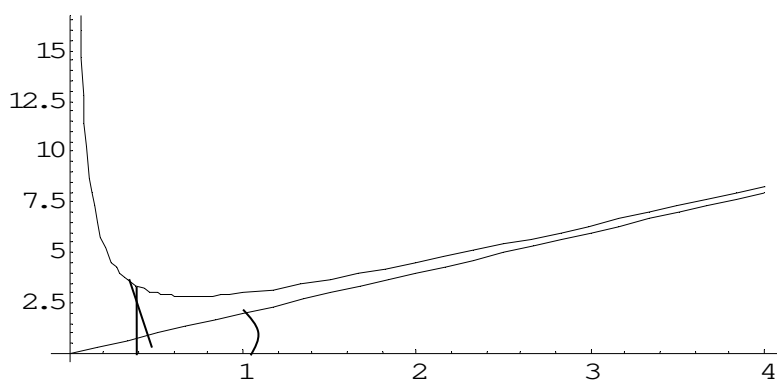
### Вертикальные асимптоты.

Из определения асимптоты следует, что если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то прямая  $x = a$  – асимптота кривой  $y = f(x)$ .

Например, для функции  $f(x) = \frac{2}{x-5}$  прямая  $x = 5$  является вертикальной асимптотой.

### Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая  $y = f(x)$  имеет наклонную асимптоту  $y = kx + b$ .



Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – М, Р – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью  $Ox$  обозначим  $\varphi$ . Перпендикуляр  $MQ$  к оси  $Ox$  пересекает асимптоту в точке  $N$ .

Тогда  $MQ = y$  – ордината точки кривой,  $NQ = \bar{y}$  – ордината точки N на асимптоте.

По условию:  $\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = 0$ ,  $\angle NMP = \phi$ ,  $|NM| = \frac{|MP|}{\cos \phi}$ .  
Угол  $\phi$  – постоянный и не равный  $90^\circ$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MP| = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| \cos \phi = \lim_{x \rightarrow \infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = |MQ| - |QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ .

Итак, прямая  $y = kx + b$  – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$ .

В полученном выражении выносим за скобки  $x$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Т.к.  $x \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$ , т.к.  $b = \text{const}$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} k = k$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$ , следовательно,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Т.к.  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - \lim_{x \rightarrow \infty} b = 0$ , следовательно,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при  $k = 0$ .

Пример. Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .

1) Вертикальные асимптоты:  $y \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0-0$ ;  $y \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0+0$ , следовательно,  $x = 0$  – вертикальная асимптота.

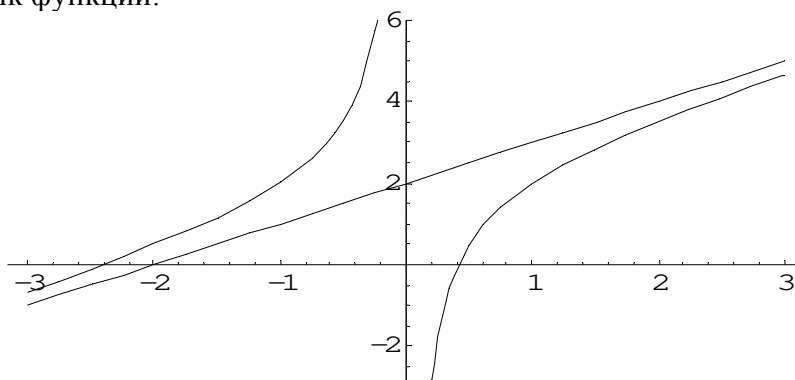
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая  $y = x + 2$  является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



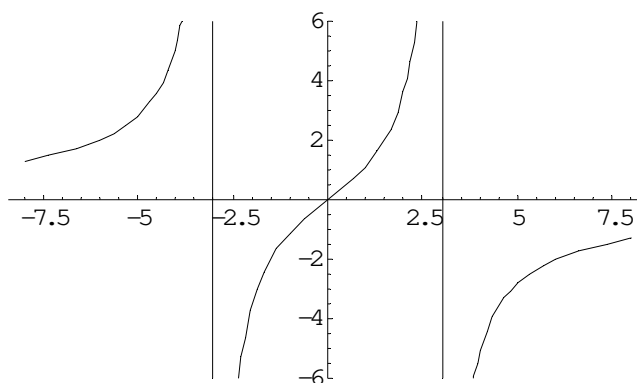
Пример. Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{9x}{9 - x^2}$ .

Прямые  $x = 3$  и  $x = -3$  являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты:  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

$y = 0$  – горизонтальная асимптота.



Пример. Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ .

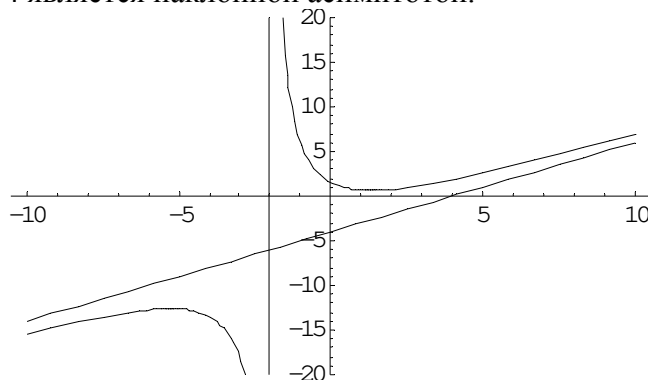
Прямая  $x = -2$  является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая  $y = x - 4$  является наклонной асимптотой.



### Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).

3) Интервалы возрастания и убывания.

4) Точки максимума и минимума.

5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.

6) Области выпуклости и вогнутости.

7) Точки перегиба. (Если они имеются).

8) Асимптоты. (Если они имеются).

9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Пример. Исследовать функцию  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ .

В свою очередь, видно, что прямые  $x = 1$ ,  $x = -1$  являются *вертикальными асимптотами* кривой.

*Областью значений* данной функции является интервал  $(-\infty; \infty)$ .

*Точками разрыва* функции являются точки  $x = 1$ ,  $x = -1$ .

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки:  $x = 0$ ;  $x = -\sqrt{3}$ ;  $x = \sqrt{3}$ ;  $x = -1$ ;  $x = 1$ .

Найдем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ -1 < x < 0, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ 0 < x < 1, & \quad y'' < 0, \text{ кривая выпуклая} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y'' > 0, \text{ кривая вогнутая} \end{aligned}$$

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$$\begin{aligned} -\infty < x < -\sqrt{3}, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \\ -\sqrt{3} < x < -1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ -1 < x < 0, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 0 < x < 1, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ 1 < x < \sqrt{3}, & \quad y' < 0, \text{ функция убывает} \\ \sqrt{3} < x < \infty, & \quad y' > 0, \text{ функция возрастает} \end{aligned}$$

Видно, что точка  $x = -\sqrt{3}$  является точкой *максимума*, а точка  $x = \sqrt{3}$  является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно  $-3\sqrt{3}/2$  и  $3\sqrt{3}/2$ .

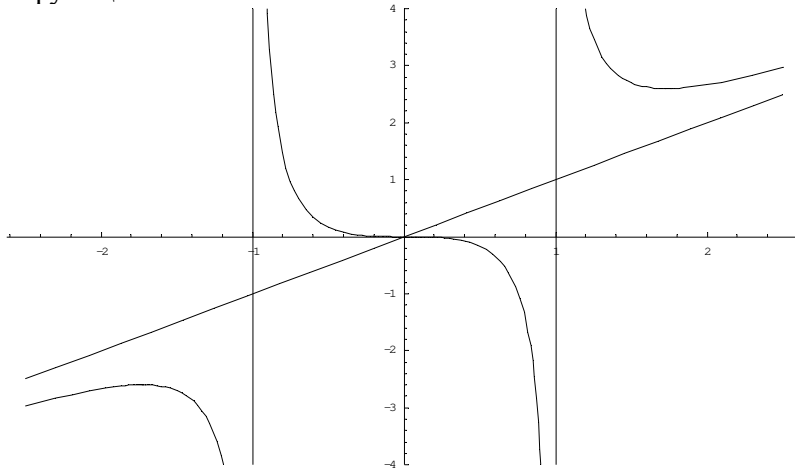
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты –  $y = x$ .

Построим *график* функции:



Задание к практической подготовке

**Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:**

1.  $y = \frac{x}{(x-1)^2}$

2.  $y = \frac{x^3 + 16}{x}$

3.  $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$

4.  $y = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$

5.  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

6.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

7.  $y = \frac{2x+1}{x^2}$

8.  $y = \frac{4x^2}{x^3 - 1}$

9.  $y = \frac{x}{3 - x^2}$

10.  $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

11.  $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

2.  $y = \frac{x^2 + 16}{2x}$

### Вопросы к занятию

1. Что такое функция?
2. Для чего проводят исследование функции?
3. Что такое асимптоты функции?
4. Что такое экстремумы функции?
5. Чему равна производная в точках, где существуют асимптоты?
6. Приведите алгоритм исследования функции.

## Практическое занятие № 3. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.

### Первообразная функция.

**Определение:** Функция  $F(x)$  называется **первообразной функцией** функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

### Неопределенный интеграл.

**Определение:** Неопределенным интегралом функции  $f(x)$  называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают:  $\int f(x) dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

### Свойства:

1.  $\left(\int f(x) dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
  2.  $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx;$
  3.  $\int dF(x) = F(x) + C;$
  4.  $\int (u+v-w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx;$  где  $u, v, w$  – некоторые функции от  $x$ .
1.  $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx;$

Пример:  $\int (x^2 - 2 \sin x + 1) dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3} x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

## Таблица основных интегралов

- 1  $\int dx = x + C;$
- 2  $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$
- 3  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$
- 4  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C;$   
4a
- 5  $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- 6  $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- 7  $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
- 8  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$
- 9  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
- 10  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |\sqrt{x^2 \pm a^2} + x| + C;$
- 11  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- 12  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Рассмотрим три основных метода интегрирования:

### Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения

дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла  $\int \frac{dx}{x}$ . На основе известной формулы

дифференцирования  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  можно сделать вывод, что искомый интеграл равен  $\ln x + C$ , где  $C$  – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны  $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ . Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

### Способ подстановки (замены переменных).

**Теорема:** Если требуется найти интеграл  $\int f(x) dx$ , но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены  $x = \varphi(t)$  и  $dx = \varphi'(t) dt$  получается:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

**Доказательство:** Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d \int f(x) dx = d \left( \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x) dx = f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

**Пример.** Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .  
Сделаем замену  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$ .

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

**Пример.**  $\int x(x^2+1)^{3/2} dx$ .

Замена  $t = x^2+1$ ;  $dt = 2x dx$ ;  $dx = \frac{dt}{2x}$ . Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \quad \left. \begin{array}{l} t=1+2x; \\ dt=2dx; \end{array} \right\}$$

б)

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 2(1+2x)^{\frac{1}{4}} + C = 2\sqrt[4]{1+2x} + C;$$

$$\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx = \left. \begin{array}{l} t=x^5 \\ dt=5x^4 dx \end{array} \right\}$$

в)

{для нахождения интеграла применим формулу (12)}

$$= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} x^5 + C;$$

$$\int 3^{2-7x} dx = \left. \begin{array}{l} t=2-7x; \\ dt=-7 dx; \end{array} \right\}$$

г)

{для нахождения интеграла применим формулу (4)}

$$= -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = -\frac{1}{7} \cdot \frac{3^{2-7x}}{\ln 3} + C;$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left. \begin{array}{l} t=\operatorname{arctg} x \end{array} \right\}$$

д)

{для нахождения интеграла применим формулу (2)}

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C;$$

е)  $\int e^x \cdot \sin e^x dx = \int \left. \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| dt = -\cos t + C = -\cos e^x + C;$

{для нахождения интеграла применим формулу (5)}

$$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$$

ж)  $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \left. \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| dt = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$

{для нахождения интеграла применим формулу (8)}

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$$

з)  $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 - (\sqrt{7})^2}} dx = \int \left. \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| dt = \ln |\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t| + C = \ln |\sqrt{e^{2x} - 7} + e^x| + C;$

{для нахождения интеграла применим формулу (10)}

$$= \ln |\sqrt{t^2 - (\sqrt{7})^2} + t| + C = \ln |\sqrt{e^{2x} - 7} + e^x| + C;$$

и)  $\int \frac{\sin 5x dx}{9 - \cos^2 5x} = \int \left. \begin{array}{l} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x dx \end{array} \right| dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$

{для нахождения интеграла применим формулу (9)}

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln \left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$$

$$\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \int |t = \cos x^2| dt = -2x \sin x^2 dx$$

к)

{для нахождения интеграла применим формулу (3)}

$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos x^2| + C;$$

$$\int \frac{3^x}{9^x + 4} dx = \int \frac{3^x}{(3^x)^2 + 2^2} dx = \int |t = 3^x| dt = 3^x \ln 3 dx$$

л)

{для нахождения интеграла применим формулу (7)}

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2 \ln 3} \operatorname{arctg} \frac{3^x}{2} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

### Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где  $u$  и  $v$  – некоторые функции от  $x$ .

В дифференциальной форме:  $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем:  $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$ , а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

**Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям,**

**используя формулу  $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$  (13):**

$$\int x^2 \cos x dx = \int |U = x^2; U' = 2x| dx$$

м)

$$= \int U = 2x; \quad U' = 2$$

{для нахождения интеграла применим формулу (6)}

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$\int \arccos x \, dx = \int U = \arccos x; \quad U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

н)

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (2)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t = 1-x^2 \quad dt = -2x \, dx$$

в итоге получаем  $\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

Пример.  $\int x^2 \sin x dx = \int u = x^2; \quad dv = \sin x dx = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$   
 $= \int u = x; \quad dv = \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 \left[ x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример.  $\int e^{2x} \cos x dx = \int u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$   
 $= \int u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx = e^{2x} \sin x - 2 \left[ -e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$   
 $+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20} dx = [2x+1=t; dt=2dx;] = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C = -2 \sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x} dx = \left( u = x^2; dv = e^{5x} dx; \right) \left( \int u dv = uv - \int v du \right) = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} 2x dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left( \int u dv = uv - \int v du \right) = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5} \left( \frac{1}{5} x e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right) = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{25} x e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + C$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int \left( u = \ln x; dv = \frac{1}{x^3} dx; \int \int \right) = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \frac{1}{2x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x \ln x dx = \int (u = \ln x; dv = x dx; \int \int) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \int (t = e^{\cos^2 x}; dt = -e^{\cos^2 x} \cdot 2 \cos x \sin x = -\sin 2x \cdot e^{\cos^2 x} dx; ) = -\int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \left( \sqrt{x} = t; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right) = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-3}{4} \right) + C.$$

### Задание 1 к практической подготовке

Вычислить интеграл методом непосредственного интегрирования:

$$\text{а) } \int \left( x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}; \quad \text{в) } \int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$$

$$\text{г) } \int 3^{2-7x} dx; \quad \text{д) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx; \quad \text{е) } \int e^x \cdot \sin e^x dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$$

$$\text{з) } \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx;$$

$$\text{и) } \int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx;$$

$$\text{к) } \int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$$

$$\text{л) } \int \frac{3^x}{9^x+4} dx;$$

$$\text{м) } \int x^2 \cdot \cos x dx;$$

$$\text{н) } \int \arccos x dx;$$

$$\text{о) } \int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx;$$

$$\text{п) } \int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx;$$

$$\text{р) } \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$$

$$\text{с) } \int \frac{3x' dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}};$$

$$\text{т) } \int \cos 3x \cos 5x dx;$$

$$\text{у) } \int \sin^4 x dx;$$

$$\text{ф) } \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$$

*Решение:*

- а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (1) и (2) табличного интегрирования:

$$\begin{aligned} \int \left( x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx &= \int \left( x^5 + 4 \cdot x^{-3} - x^{\frac{2}{3}} - 7 \right) dx = \int x^5 dx + 4 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx - 7 \int dx = \\ &= \frac{x^{5+1}}{5+1} + 4 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} - 7x + C = \frac{x^6}{6} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 7x + C = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{x^2} - \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5} - 7x + C; \end{aligned}$$

## Задание 2

**Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям**

$$1. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}; \quad \text{б) } \int x e^{-2x} dx \quad 2. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}; \quad \text{б) } \int (x+3) e^{2x} dx$$

$$3. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}; \quad \text{б) } \int x e^x dx \quad 4. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}; \quad \text{б) } \int x e^{-3x} dx$$

$$5. \text{ а) } \int \frac{dx}{(1+x^2)^5}; \quad \text{б) } \int (x+5) e^{2x} dx \quad 6. \text{ а) } \int \sqrt{1-5x} dx; \quad \text{б) } \int x \cos \frac{x}{2} dx$$

$$7. \text{ a) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}; \text{ б) } \int x \arctg x dx$$

$$8. \text{ a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}; \text{ б) } \int x e^{-2x} dx$$

$$9. \text{ a) } \int \sqrt{1-2x} dx; \text{ б) } \int (1-x) \sin 3x dx$$

$$10. \text{ a) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ б) } \int e^{-2x}(2x+5) dx$$

$$\int e^{-2x}(2x+5) dx$$

$$11. \text{ a) } \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx; \text{ б) } \int (1-x) \cos 4x dx$$

$$12. \text{ a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}; \text{ б) } \int \ln x(2x+5) dx$$

$$\int \ln x(2x+5) dx$$

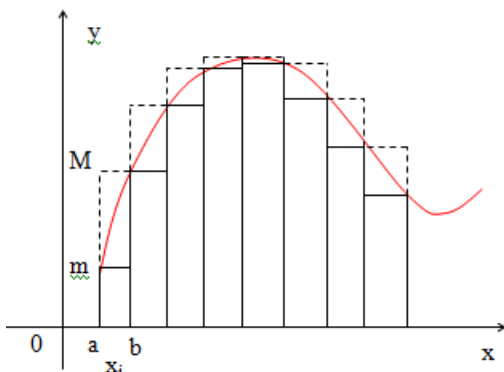
### Вопросы к занятию

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования методом подведения под знак интеграла.
5. Сформулируйте правило интегрирования заменой переменных
6. Сформулируйте правило интегрирования по частям.

## Практическое занятие № 4. Определённый интеграл

### Определенный интеграл.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$



Обозначим  $m$  и  $M$  наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке  $[a, b]$   
Разобьем отрезок  $[a, b]$  на части (не обязательно одинаковые) точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда  $x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ ;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1; [x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2; \dots [x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n.$$

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма  $\underline{S}_n$  называется **нижней интегральной суммой**, а сумма  $\bar{S}_n$  – **верхней интегральной суммой**.

$$\text{Т.к. } m_i \leq M_i, \text{ то } \underline{S}_n \leq \bar{S}_n, \text{ а } m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку  $\varepsilon$ .

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$S_n = f(\varepsilon_1) \Delta x_1 + f(\varepsilon_2) \Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать:  $m_i \Delta x_i \leq f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции  $f(x)$  ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим  $\max \Delta x_i$  – наибольший отрезок разбиения, а  $\min \Delta x_i$  – наименьший. Если  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , то число отрезков разбиения отрезка  $[a, b]$  стремится к бесконечности.

Если 
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i, \quad \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = S.$$

**Определение:** Если при любых разбиениях отрезка  $[a, b]$  таких, что  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  и

произвольном выборе точек  $\varepsilon_i$ , интегральная сумма 
$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$$
 стремится к пределу  $S$ , который называется определенным интегралом от  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Обозначение:  $\int_a^b$

$a$  – нижний предел,  $b$  – верхний предел,  $x$  – переменная интегрирования,  $[a, b]$  – отрезок интегрирования.

**Определение:** Если для функции  $f(x)$  существует предел 
$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$$
 то функция называется **интегрируемой** на отрезке  $[a, b]$ .

Также верны утверждения: 
$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

**Теорема:** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.

### Свойства определенного интеграла.

1) 
$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$$

2) 
$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$$

3) 
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

4) Если  $f(x) \leq \phi(x)$  на отрезке  $[a, b]$   $a < b$ , то 
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \phi(x) dx$$

5) Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке существует точка  $\varepsilon$  такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

**Доказательство:** В соответствии со свойством 5:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

т.к. функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она принимает на этом отрезке все значения от  $m$  до  $M$ . Другими словами, существует такое число  $\varepsilon \in [a, b]$ , что если

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu \quad \text{и} \quad \mu = f(\varepsilon), \quad a \leq \varepsilon \leq b, \quad \text{тогда} \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\varepsilon) \quad . \text{ Теорема доказана.}$$

7) Для произвольных чисел  $a, b, c$  справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$8) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Обобщенная теорема о среднем.** Если функции  $f(x)$  и  $\phi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , и функция  $\phi(x)$  знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка  $\varepsilon$ , такая, что

$$\int_a^b f(x)\phi(x) dx = f(\varepsilon) \int_a^b \phi(x) dx$$

### Вычисление определенного интеграла.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Пусть в интеграле  $\int_a^b f(x) dx$  нижний предел  $a = \text{const}$ , а верхний предел  $b$  изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

$$\int_a^x f(t) dt$$

Обозначим  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$ . Найдем производную функции  $\Phi(x)$  по переменному верхнему пределу  $x$ .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

**Теорема:** Для всякой функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

**Теорема:** (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция  $F(x)$  – какая-либо первообразная от непрерывной функции  $f(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

**Доказательство:** Пусть  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ . Тогда в соответствии с

$$\int_a^x f(t) dt$$

приведенной выше теоремой, функция  $\int_a^x f(t) dt$  – первообразная функция от  $f(x)$ . Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое-то постоянное число  $C$ , то

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе  $C$  это равенство справедливо для любого  $x$ , т.е. при  $x = a$ :

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$ .

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

А при  $x = b$ :

Заменив переменную на переменную  $x$ , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$ .

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

## Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

### Замена переменных.

$$\int_a^b f(x) dx$$

Пусть задан интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , где  $f(x)$  – непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ . Введем новую переменную в соответствии с формулой  $x = \varphi(t)$ .

Тогда если

- 1)  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$
- 2)  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$
- 3)  $f(\varphi(t))$  определена на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Тогда  $\alpha$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция  $\sin$ ) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$$

, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная  $\operatorname{tg} x$  имеет на отрезке интегрирования

разрыв (в точке  $x = \pi/2$ ). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

### Интегрирование по частям.

Если функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

### Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

### Формула прямоугольников.

Если известны значения функции  $f(x)$  в некоторых точках  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , то в качестве функции “близкой” к  $f(x)$  можно взять многочлен  $P(x)$  степени не выше  $m$ , значения которого в выбранных точках равны значениям функции  $f(x)$  в этих точках.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на  $n$  равных частей  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . При этом:  
 $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$ .

Составим суммы:  $y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x$   
 $y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_n \Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда  $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$  или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

- любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников**.

### Задание к практической подготовке

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

$$1. \int_0^1 (5x - 2)^4 dx. \quad 2. \int_0^{\pi/2} \sin 3x dx. \quad 3. \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos(x^2) dx. \quad 4. \int_0^{\ln 2} e^{2x-1} dx. \quad 5. \int_1^2 (x+1) \ln x dx.$$

$$1. \int_2^3 \frac{dx}{3x-5}. \quad 2. \int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}. \quad 3. \int_0^1 \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}. \quad 4. \int_3^7 \frac{dx}{x \ln^2 x}. \quad 5. \int_0^{\pi} (x^2+2) \cos x dx.$$

$$1. \int_0^{\pi/4} \sin 2t \cdot dt. \quad 2. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 3. \int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 4. \int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx. \quad 5. \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

$$1. \int_0^1 e^{3x} dx. \quad 2. \int_0^3 \frac{dx}{4x+1}. \quad 3. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 4. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}. \quad 5. \int_{\pi}^{2\pi} (x+1) \sin x dx.$$

### Вопросы к занятию

1. Что такое определенный интеграл?
2. Что является результатом при вычислении определенного интеграла?
3. Приведите формулу Ньютона-Лейбница?
4. Как можно приближенно вычислить определенный интеграл?
5. Дайте определение интеграла при помощи понятия интегральной суммы.

## Практическое занятие № 5. Множества и операции над ними.

Группу предметов или живых существ, собранных вместе и имеющих одно или несколько общих свойств, называют множеством.

Например:

- множество разных машин, которые перевозят людей и грузы, называют транспортом;
- множество пчёл, которые летают вместе, — это рой;
- множество людей, которые поют вместе, — это хор;
- множество книг, находящихся в одном месте, — это библиотека.

Объекты, входящие в множество, называются элементами этого множества.

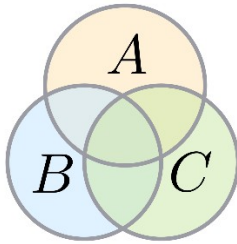
Например:

- утка — элемент множества птиц;
- трамвай — элемент множества транспорта;
- клён — элемент множества деревьев.

Определение

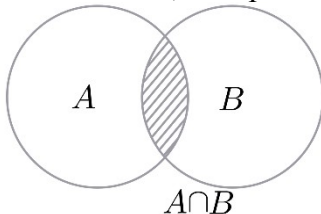
Круги Эйлера (или диаграммы Эйлера) - это геометрическая схема, с помощью которой можно наглядно изобразить множества и операции над ними.

При решении целого ряда задач Эйлер использовал идею изображения множеств с помощью кругов. Однако этим методом ещё до Эйлера пользовался Лейбниц, который использовал их для геометрической интерпретации логических связей между понятиями. Своё развитие графические методы получили в сочинениях английского логика Венна. Он предложил свой вариант схемы изображения отношения между множествами. Эти схемы стали называть диаграммами Эйлера-Венна.



**Определение**

Пересечением двух множеств называется множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые одновременно принадлежат двум данным множествам.

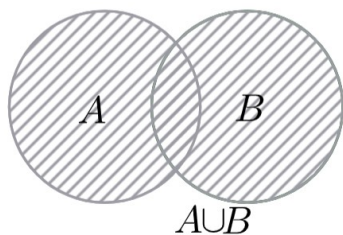


► Пример 1.

$$A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{3; 4; 5; 6\}; A \cap B = \{3; 4\}.$$

**Определение**

Объединением двух множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из данных множеств.

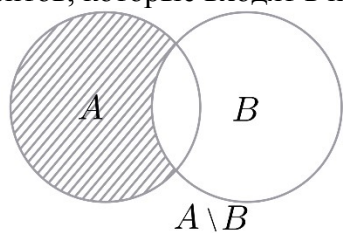


► Пример 2.

$$A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{3; 4; 5; 6\}; A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

### Определение

Разностью двух множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят в первое множество, но не входят во второе.



► Пример 3.

$$A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{3; 4; 5; 6\}; A \setminus B = \{1; 2\}; B \setminus A = \{5; 6\}.$$

**Задание для практической подготовки**

1	$A=\{b, e, f, k, t\}; B=\{f, i, j, p, y\};$ $C=\{j, k, l, y\}; D=\{i, j, s, t, u, y, z\};$ $X=(A \cap C) \cup (B \cap C);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	8	$A=\{c, m, n, o, q\}; B=\{c, d, m, w\};$ $C=\{m, n, q\}; D=\{c, m, p\};$ $X=(A \cup B) \cap C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
2	$A=\{a, h, m, o, r\}; B=\{j, k, o, u, y\};$ $C=\{g, h, j\}; D=\{g, j, q\};$ $X=(A \cap C) \cup (D \cap B);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (D \setminus C)$	9	$A=\{b, d, l, p\}; B=\{b, d, e, l, p, x\}$ $C=\{k, l, p, t\}; D=\{d, k, o, p, q, u, v\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cap D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
3	$A=\{c, e, h, n\}; B=\{e, f, k, n, x\};$ $C=\{b, c, h, p, r, s\}; D=\{b, e, g\};$ $X=(A \setminus B) \cap (C \cup D);$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	10	$A=\{a, b, f, g, i\}; B=\{c, f, g, i, s, v\};$ $C=\{a, g, h, i\}; D=\{f, w, x\};$ $X=(A \cap B) \cup C;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
4	$A=\{b, f, g, m, o\}; B=\{b, g, h, l, u\};$ $C=\{e, f, m\}; D=\{e, g, l, p, q, u, v\};$ $X=(A \cap C) \cup B;$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$	11	$A=\{b, c, h, l, j\}; B=\{e, h, l, s, w\};$ $C=\{a, b, j, k, l, m\}; D=\{a, h, l, w, x\};$ $X=(A \setminus C) \cap \bar{B};$ $Y=(A \cap \bar{B}) \cup (C \setminus D)$
5	$A=\{a, e, f, i\}; B=\{a, b, k, n\};$ $C=\{e, f, n, o, w, x\}; D=\{a, d, e, o, p, t, u\};$ $X=(A \cup B) \cap D.$	12	$A=\{a, b, h, j, l\}; B=\{b, c, h, l, r, v\};$ $C=\{j, k, n, t, z\}; D=\{b, i, k, v, w\};$ $X=(A \cup B) \cap C.$

### Вопросы к занятию

1. Что такое множества?
2. Что такое элемент множества?
3. Способы задания множества?
4. Что такое подмножество?
5. Какие множества называются равными?
6. Что такое пересечение множеств?
7. Что называется объединением множеств?
8. Что называется разностью множеств?
9. Что называется симметрической разностью множеств?
10. Что называется дополнением?

## Практическая работа № 5. Векторы на плоскости

*Аналитическая геометрия – раздел математики, изучающий геометрические образы алгебраическими методами.*

*Прямая, служащая для изображения действительных чисел, в которой выбрана начальная точка  $O$ , единица измерения и положительное направление, называется числовой прямой, или числовой осью. Точка  $M$  этой прямой характеризуется определенным числом – координатой  $x$ , т.е.  $M(x)$ .*

*Две взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ , имеющие общее начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют начало  $O$  и одинаковую единицу масштаба, образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости.*

*Ось  $Ox$  называется осью абсцисс, ось  $Oy$  – осью ординат, точка  $O$  – началом координат, а плоскость  $Oxy$  – координатной плоскостью. Каждой точке  $M$  этой плоскости соответствует пара чисел  $(x, y)$ , называемых ее координатами, т.е.  $M(x, y)$ , ( $x$  – абсцисса,  $y$  – ордината точки  $M$ ).*

*Полярная система координат состоит из некоторой точки  $O$ , называемой полюсом, и исходящего из нее луча  $Op$ , называемого полярной осью.*

### **Прямые на плоскости**

**1. Общее уравнение прямой.** Всякое уравнение первой степени с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , т.е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

(где  $A, B, C$  – постоянные коэффициенты, причем  $A^2 + B^2 \neq 0$ ) определяет на плоскости прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой*.

*Частные случаи общего уравнения прямой:*

1) если  $A = 0$ , то уравнение приводится к виду  $y = b$ , где  $b = -\frac{C}{B}$  (это есть уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$ );

2) если  $B = 0$ , то уравнение прямой приводится к виду  $x = a$ , где  $a = -\frac{C}{A}$  (прямая параллельна оси  $Oy$ );

3) если  $C = 0$ , то уравнение приводится к виду  $Ax + By = 0$  (прямая проходит через начало координат).

**2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Если в общем уравнении прямой  $B \neq 0$ , то, разрешив его относительно  $y$ , получим уравнение вида

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где  $k = -\frac{A}{B}$ ,  $b = -\frac{C}{B}$ . Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

**3. Уравнение прямой в отрезках.** Если в общем уравнении прямой  $C \neq 0$ , то, разделив все его части на  $(-C)$ , получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3)$$

где  $a = -\frac{C}{A}$ ,  $b = -\frac{C}{B}$ .

**4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.**

Если прямая проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и ее направление характеризуется

угловым коэффициентом  $k$ , то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (4)$$

5. Данное уравнение (4) с различными значениями коэффициента  $k$  называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

6. *Уравнение прямой, проходящей через две точки.* Если прямая проходит через точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ , то уравнение прямой имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (5)$$

где  $x_1 \neq x_2$ ,  $y_1 \neq y_2$ .

7. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.* Если прямая проходит через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно данному ненулевому вектору  $\vec{n}(A, B)$ , то уравнение прямой имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Вектор  $\vec{n}(A, B)$ , перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

8. *Полярное уравнение прямой.* Положение прямой в полярных координатах определено, если указано расстояние  $p$  от полюса  $O$  до данной прямой и угол  $\alpha$  между полярной осью  $OP$  и осью  $l$ , проходящей через полюс  $O$  перпендикулярно данной прямой (рис. 1).

### Задания для практической подготовки

#### Вопросы к занятию

1. Дайте определение системе координат на плоскости.
2. Назовите виды системы координат.
3. Что называют координатами точки на плоскости.
4. Дайте определение вектора.
5. Как вычисляются координаты вектора.
6. Дайте определение модуля вектора. Как вычисляется модуль вектора?
7. Какой вектор называется единичным?
8. Какой вектор называется радиус – вектором?
9. Дайте определение коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных, противоположных, равных векторов.
10. направленных, противоположных, равных векторов.

## Практическое занятие № 7. Основные понятия теории вероятностей

Построение теории вероятностей начинается с описания множества  $\Omega$  всевозможных исходов  $\omega$ , которые могут произойти в результате каждого испытания. Множество  $\Omega$  называется *пространством элементарных исходов*, его точки (элементы)  $\omega$  – элементарными исходами или элементарными событиями. Любое подмножество  $A$  пространства  $\Omega$  (совокупность элементарных исходов  $\omega$ ) называется событием; пространство  $\Omega$  также является событием, но имеющим особое название достоверного события. Говорят, что произошло событие  $A$ , если в испытании наблюдается элементарный исход  $\omega \in A$ .

**Определение.** *Событием* называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие  $A$  может произойти совместно с событием  $B$ , в другом – нет.

**Определение.** События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

**Определение.** *Полной группой событий* называется совокупность всех возможных результатов опыта.

**Определение.** *Достоверным событием* называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

**Определение.** События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

### **События и действия над событиями. Алгебра событий**

**Определение. Вероятностью события  $A$**  называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события  $A$  равна отношению числа благоприятствующих событию  $A$  исходов ( $m$ ) опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта ( $n$ ), образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию  $A$ , если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события  $A$ .

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

**Определение. Относительной частотой события  $A$**  называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие  $A$  к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной  $L$  выделен отрезок длины  $l$ , то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок  $l$  равна отношению  $l/L$ .

### Операции над событиями

**Определение.** События  $A$  и  $B$  называются *равными*, если осуществление события  $A$  влечет за собой осуществление события  $B$  и наоборот.

**Определение.** *Объединением или суммой событий*  $A_k$  называется событие  $A$ , которое означает появление хотя бы одного из событий  $A_k$ .

$$A = \bigcup_k A_k$$

**Определение.** *Пересечением или произведением событий*  $A_k$  называется событие  $A$ , которое заключается в осуществлении всех событий  $A_k$ .

$$A = \text{intersect } A_k$$

**Определение.** *Разностью событий*  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , которое означает, что происходит событие  $A$ , но не происходит событие  $B$ .

$$C = A \setminus B$$

**Определение.** *Дополнительным к событию*  $A$  называется событие  $\bar{A}$ , означающее, что событие  $A$  не происходит.

**Определение.** *Элементарными исходами опыта* называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие  $A$ , по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

*Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.*

### Количество подмножеств данного конечного множества

Выясним, сколько всего подмножеств имеет множество  $A$  с  $N(A) = n$ .

Теорема 2.

*Число всех подмножеств множества из  $n$  элементов равно  $2^n$ , т.е.*

$$N(M(A)) = 2^n$$

**Доказательство:** Перенумеруем элементы множества  $A$  и для каждого подмножества  $B \subset M(A)$  построим последовательность длины  $n$  из нулей и единиц по следующему правилу: на  $k$ -ом месте пишем 1, если элемент

$a \in B$ , и пишем 0, если  $a \notin B$ .

Итак, каждому подмножеству будет соответствовать своя последовательность из нулей и единиц. Например, пустому множеству  $\emptyset$  соответствует последовательность из одних нулей, а самому множеству  $A$  — последовательность из одних единиц. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: каждой последовательности из множества  $P$  последовательностей длины  $n$  из нулей и единиц соответствует одно подмножество  $B \subset M(A)$ . Таким образом, между множествами  $M(A)$  и  $P$  установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, эти множества эквивалентны и как конечные множества имеют одинаковое количество элементов, т.е.  $N(M(A)) = N(P)$ . Но  $N(P) = N(\{0;1\}^n) = 2^n$  в силу формулы, поэтому и  $N(M(A)) = 2^n$ . Теорема 2 доказана.

### Задачи к практической подготовке

1. Бросают два кубика: красный и синий. Считая все комбинации цифр на красном и синем кубике равновероятными, определите вероятность того, что цифры на красном и синем кубике, будут одинаковы.
2. В том же опыте (бросание красного и синего кубика) подсчитывают сумму очков, выпавших на обоих кубиках. Какая из сумм будет наиболее вероятной?
3. Наудачу выбирают число от 1 до 20. Считая все варианты равновероятными, определите вероятность того, что выбранное число:
  - а) четно;
  - б) делится на 3;
  - в) делится на 2 и на 3;
  - г) не делится ни на 2 ни на 3;
  - д) имеет сумму цифр, делящуюся на 3.
4. Секретный замок состоит из четырех дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Найти вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки.
5. Имеется 3 волчка с шестью, восьмью, десятью гранями. Найти вероятность, что при падении у всех трех волчков появится цифра 1.
6. На полке лежат книги. Из них 10 томов Тургенева, 5 томов Гоголя, 8 томов Достоевского. Наудачу выбрана одна книга. Найти вероятность того, что это том Тургенева или Гоголя.
7. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

8. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?

9. Буквы в слове МИША смешали и затем вложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША И МАМА?

### **Вопросы к занятию**

1. Что такое событие?
2. Как определяется вероятность события?
3. Какие события называют совместными?
4. Какие события называют несовместными?

## Практическое занятие № 8. Основные теоремы теории вероятностей

**Теорема (сложения вероятностей).** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

**Определение.** Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

**Определение.** Событие  $A$  называется независимым от события  $B$ , вероятность события  $A$  не зависит от того, произошло событие  $B$  или нет. Событие  $A$  называется зависимым от события  $B$ , если вероятность события  $A$  меняется в зависимости от того, произошло событие  $B$  или нет.

**Определение.** Вероятность события  $B$ , вычисленная при условии, что имело место событие  $A$ , называется условной вероятностью события  $B$ .

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

**Теорема. (Умножение вероятностей).** Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Также можно записать:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то  $P(B/A) = P(B)$ , и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться  $n$  событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Здесь событие  $A$  обозначает наступление хотя бы одного из событий  $A_i$ , а  $q_i$  – вероятность противоположных событий  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ .

**Пример 2.** Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

○

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие  $A$ , появление хотя бы одной червонной карты – событие  $B$ . Таким образом нам надо определить вероятность события  $C = A + B$ .

Кроме того, события  $A$  и  $B$  – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни

бубновой карты равна  $\frac{26}{52}$ , при вытаскивании второй карты -  $\frac{25}{51}$ , третьей -  $\frac{24}{50}$ , четвертой -  $\frac{23}{49}$ .

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных

равна  $P(\bar{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$ .

Тогда  $P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 0,945$  ●

**Пример 3.** Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна  $\frac{1}{6}$ . Вероятность того, что не выпадет 6 очков -  $\frac{5}{6}$ . Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6

очков равна 
$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$
.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна 
$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

**Вероятность появления только одного события**

**Пример 4.** Пусть даны три независимых события  $A_1, A_2, A_3$ , их вероятности соответственно равны  $p_1, p_2$ , и  $p_3$ . Найти вероятность появления только одного события.

○ Пусть:

событие  $B_1$  - появилось только событие  $A_1$  ( $A_2$  и  $A_3$  не появились)

$$B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$$

событие  $B_2$  - появилось только событие  $A_2$  ( $A_1$  и  $A_3$  не появились)

$$B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$$

событие  $B_3$  - появилось только событие  $A_3$  ( $A_1$  и  $A_2$  не появились)

$$B_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий  $A_1, A_2, A_3$ , будем искать вероятность

$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$  так как события  $B_1, B_2, B_3$  несовместны.

События  $A_1, A_2, A_3$  - независимы  $\Rightarrow \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$  - независимы.

Обозначим  $P(\overline{A_1}) = q_1, P(\overline{A_2}) = q_2, P(\overline{A_3}) = q_3$ .

Тогда  $P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3$ , т.е.

$P(\text{появления только одного события}) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3$ . ●

### Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие  $A$  может произойти вместе с одним из несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$  и условные вероятности наступления события  $A$  при наступлении события  $H_i$ :

$P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ .

**Теорема.** Вероятность события  $A$ , которое может произойти вместе с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события  $A$ .

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i)$$

**Пример 5.** В двух ящиках содержатся по 20 деталей, причем в первом 17 стандартных деталей, а во втором 15 стандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика, окажется стандартной.

- Опыт можно разбить на два этапа: первый - перекладывание детали, второй - выбор детали.

Гипотезы:

Всего 20 деталей из них 17 стандарт.	Всего 20 деталей из них 15 стандарт.
---	---

$H_1$  - переложена стандартная деталь;

$H_2$  - переложена нестандартная деталь.

$$P(H_1) = \frac{15}{20}, \quad P(H_2) = \frac{5}{20}$$

$$P_{H_1}(A) = \frac{18}{21}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{17}{21}$$

$$P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{18}{21} + \frac{17}{21} \cdot \frac{5}{20} = \frac{71}{84} \approx 0,8452$$

**Пример 6.** Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

○

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна

$$\frac{1}{3}$$

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка:  $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$ ;

- для второго стрелка:  $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$ ;

- для третьего стрелка:  $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$ ;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^2 = \frac{1}{3} (0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}$$

**Формула Байеса (формула гипотез)**

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$  с известными вероятностями их наступления  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ . Пусть в результате опыта наступило событие  $A$ , условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности  $P(A/H_1), P(A/H_2), \dots, P(A/H_n)$ .

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы  $H_1, H_2, \dots, H_n$  относительно события  $A$ , то есть условные вероятности  $P(H_i/A)$ .

**Теорема.** Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется формулой Байеса.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}$$

**Пример 7.** Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру равна 0,6, ко второму равна 0,4. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной первым контролером равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что ее проверил первый контролер.

○ Гипотезы:  $H_1$  - деталь проверил первый контролер;

$H_2$  - деталь проверил второй контролер.

Событие  $A$  - деталь признана стандартной.

$$P(H_1) = 0,6 \quad P(H_2) = 0,4$$

$$P_{H_1}(A) = 0,94 \quad P_{H_2}(A) = 0,98$$

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59$$

Как видно до испытания  $P(H_1) = 0,6$ , а после  $P_A(H_1) = 0,59$ . ●

## Повторение испытаний

### Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие  $A$ , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события  $A$ .

Допустим, что событие  $A$  наступает в каждом испытании с вероятностью  $P(A) = p$ . Определим вероятность  $P_n(k) = 0,6$  того, что в результате  $n$  испытаний событие  $A$  наступило ровно  $k$  раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям.

Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате  $n$  независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие  $A$  наступает с вероятностью  $P(A) = p$ , а противоположное ему событие  $\bar{A}$  с вероятностью  $P(\bar{A}) = 1 - p$ .

Обозначим  $A_i$  – наступление события  $A$  в испытании с номером  $i$ . Так как условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате  $n$  опытов событие  $A$  наступает ровно  $k$  раз, то остальные  $n - k$  раз это событие не наступает. Событие  $A$  может появиться  $k$  раз в  $n$  испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ . Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, то есть того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

**Пример 8.** По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

○

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Так как выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в  $k$  испытаниях событие с вероятностью  $P$  наступает ровно  $n$  раз.

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_5(5) = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0,0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_5(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744 \quad \bullet$$

### Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Пусть  $k = k_0$  - число появления события  $A$  в  $n$  испытаниях, при котором  $P_n(k)$  - наибольшая.

Тогда  $k_0$  определяется из двойного неравенства:

$$np - q \leq k_0 < np + q$$

Если  $(np - q)$  - дробное, то существует одно наивероятнейшее число  $k_0; k_0 + 1$ .

Если  $(np - q)$  - целое, то существует два наивероятнейших числа  $k_0$ .

Если  $np$  - целое, то  $k_0 = np$ .

Например,

$$1) \quad n = 15, \quad p = 0,9, \quad q = 0,1$$

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 < 15 \cdot 0,9 + 0,1 \quad 13,4 \leq k_0 < 14,4 \quad k_0 = 14$$

$$2) n=24, p=0,6, q=0,4$$

$$24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq k_0 < 24 \cdot 0,6 + 0,4 \quad 14 \leq k_0 < 15 \quad k_0 = 14, \quad k_0 = 15$$

$$3) n=25, p=0,08, q=0,02$$

$$2 - 0,02 \leq k_0 < 2 + 0,08 \quad k_0 = 2$$

При больших значениях  $n$  и  $k$  в повторных испытаниях с помощью формулы Бернулли получить более или менее точный результат практически невозможно.

В этом случае, для вычисления искомой вероятности применяют асимптотические формулы.

### Задания к практической подготовке

1. Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

2. Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время  $t$ ) первого, второго, третьего и четвертого элементов соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время  $t$  безотказно будут работать только два элемента.

3. Вероятность наступления некоторого случайного события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. опыты проводятся последовательно до наступления этого события. Определить вероятность того, что будет проведено три опыта.

4. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное (или первое, или второе)

5. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической

величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность (или в первом, или во втором, или в третьем)

6. Два охотника соревнуются: кто подстрелит больше уток при двух выстрелах, тот и победит. Вероятность попадания первого охотника в утку равна 0,5, второго – 0,6. Какова вероятность того, что выиграет первый охотник? Считать, что при одном выстреле можно убить только одну утку.
7. Пятеро стрелков производят по одному выстрелу в мишень независимо друг от друга. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,6; 0,5; 0,8; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет ровно четыре пробоины.
8. Какова вероятность того, что из шести отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (6 из 49) 5 чисел будут выигрышными?
9. В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении.
10. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится только в одном справочнике.
11. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

### **Вопросы к занятию**

1. Что такое событие?
2. Как определяется вероятность события?
3. Какие события называют совместными?
4. Какие события называют несовместными?
5. Как рассчитать вероятность суммы двух несовместных событий?
6. Приведите формулу полной вероятности.
7. Запишите формулу Бернулли и поясните ее смысл.



### **Список рекомендуемой литературы**

#### **Список основной литературы**

1. Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. -М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2022. (среднее профессиональное образование).  
<https://znanium.com/catalog/product/1817031>

#### **Список дополнительной литературы**

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Т.Н. Сабурова. - 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.