ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям по дисциплине
"Математика"
для обучающихся по специальности
38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Ставрополь, 2023

Методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» и программой дисциплины.

Составитель:

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД», протокол №7 от «24» мая 2023 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №7 от «25» мая 2023 г.

Введение

Изучение математики играет решающую роль в системе профессионального образования, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой. Внедрение новых стандартов среднего профессионального образования обеспечило компетентностный подход и изменило содержание образовательной программы по математике на разных специальностях.

Во все времена математика имела огромное значение в формировании стиля мышления обучающего, и это в настоящее время – время внедрения Федеральных государственных образовательных стандартов третьего поколения, не утратило свою значимость. С переходом на стандарты нового поколения, которые разработаны с позиций компетентностного подхода в образовании, вопрос повышения качества обучения математике приобретает особую актуальность.

Под компетенцией в ФГОС понимается способность применять знания, умения, личностные качества и практический опыт для успешной деятельности в определенной области.

В соответствии с ФГОС средствами дисциплины " Математика" и других дисциплин должны быть сформированы общие и профессиональные компетенции.

При изучении дисциплины реализуются следующие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 14. Готовый соответствовать ожиданиям работодателей: проектно-мыслящий, эффективно взаимодействующий с членами команды и сотрудничающий с другими людьми, осознанно выполняющий профессиональные требования, ответственный, пунктуальный, дисциплинированный, трудолюбивый, критически мыслящий, нацеленный на достижение поставленных целей; демонстрирующий профессиональную жизнестойкость.

Содержание

Практическое занятие № 1. Операции над матрицами, вычисление определителей

<u>Определение.</u> **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

***Основные действия над матрицами*.**

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

<u>Определение.</u> Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

<u>Определение.</u> Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей**.

<u>Определение.</u> Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

<u>Пример.</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

<u>Определение.</u> Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они <u>определены только для матриц одинакового размера</u>. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

<u>Определение.</u> Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

C = A + B = B + A.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha\pm\beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>**Операция умножения матриц**</u>.

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Свойства операции умножения матриц.</u>

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. AB $\neq$ BA даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \quad O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$A(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц det (AB) = detA · detB.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>Определение</u>. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример.</u> Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители (детерминанты) матрицы.

<u>**Определение.**</u> **Определителем** квадратной матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}}$$, где

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n.}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u> Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A · det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7 · 18 - 8 · 19 = 126 – – 152 = -26.

Задания к практическому занятию:

1.Вычислить определители:

$a)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; $в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}$; $г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; $д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Решить уравнения:

$a)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; $б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$; $в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

3. Решить неравенства:

$a)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; $б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$; $в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \geq 5$; $г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14$.

4. Вычислить определители:

$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; $в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$; $г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; $д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; $е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; $ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

$з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; $и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; $к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

$л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; $м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}$; $н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5 Даны матрицы $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

6. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times4}\cdot B_{4\times5}=C_{m\times n}$; б) $A_{2\times3}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times6}$; в) $A_{2\times m}\cdot B_{n\times3}=C_{2\times3}$.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$; д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1}; з) B^{-1}.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1}; ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

9. Найти:

а) $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};$ з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};$ и) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

10. Найти значение многочлена $f(A)$, если:

а) $f(X)=3X^2-4$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(X)=X^2-3X+1$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $f(X)=3X^2-2X+5$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются прямоугольными?
3. Какие матрицы называются квадратными?
4. Что называют главной диагональю матрицы?
5. Какая матрица называется диагональной?
6. Какая матрица называется единичной?
7. Что значить «транспонировать» матрицу?
8. Что называется суммой матриц?
9. Как найти сумму матриц?
10. Что называется произведением матрицы на число?
11. Как найти произведение двух матриц?
12. Какими свойствами обладает произведение матриц?
13. Каков результат произведения единичной матрицы на произвольную матрицу.
14. Назовите условие, необходимое для произведения матриц.
15. Является ли произведение матриц коммутативным.
16. Чему равен определитель матрицы, у которой можно найти два взаимно-пропорциональных ряда.
17. Чем отличается Минор матрицы от одноименного Алгебраическое дополнения матрицы

Практическое занятие № 2. Нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5)транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы:

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным. Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы. В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами i_1, ,i_s, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \quad i=(1,n),\ j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \qquad i = j\ .$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

[illegible] ,

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$\boxed{x_{ij}=\frac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{\det A},}$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$M_{11}=4$; $M_{12}= 3$; $M_{21}= 2$; $M_{22}=1$

$x_{11}= -2$; $x_{12}= 1$; $x_{21}= 3/2$; $x_{22}= -1/2$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обраных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$.

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

<u>Базисный минор матрицы.</u>

Ранг матрицы.

Как было сказано, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

<u>Определение.</u> В матрице порядка $m\times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

<u>Определение.</u> Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

<u>Определение.</u> Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

<u>Теорема.</u> *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

<u>Пример.</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad \text{RgA} = 2.$$

<u>Пример:</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad \text{Rg} = 2.$$

<u>Пример.</u> Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \quad \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице A каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*
Таким образом, ранг произвольной матрицы A равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если A- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Задания к практическому занятию.

Часть 1:

1. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е).

2. Найти матрицы обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
3. Чем отличается алгебраическое дополнение от одноименного минора матрицы.
4. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
5. Свойства определителей.
6. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
7. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Практическое занятие № 3. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса.

<u>Метод Крамера.</u> (Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

<u>Теорема. (Правило Крамера):</u>

<u>Теорема.</u> *Система из n уравнений с n неизвестными*

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $\quad x_2 = \Delta_2/\det A$; $\quad x_3 = \Delta_3/\det A$;

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9)+(2-12)-(3-8) = -25-10+5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48)-(42-32) = -20-10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48)-(16-56) = -100+40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42)+(16-56) = -50-40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \end{cases}$$; *Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.*

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases}$$

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 13y+7z=14 \\ 7y=0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ y+\frac{7}{13}z=\frac{14}{13} \\ \frac{-49}{13}z=\frac{-98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z=\frac{-98}{13}:\left(\frac{-49}{13}\right)=2$$

$$y=\frac{14}{13}-\frac{7}{13}\cdot 2=0$$

$x=-3+4\cdot 0+2\cdot 2=1$

Таким образом, $x=1, y=0, z=2$.

Определение. Если b_1, b_2, …, b_m = 0, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Задания к практическому занятию:

Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-3, \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-x_4=6, \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6, \end{cases}$

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1-5x_2=13, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1+3x_3=16, \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16, \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7, \\ x_1+4x_2+2x_3=-1, \end{cases}$

3. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+4x_3=3, \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3=5, \\ x_1-3x_2+4x_3=1, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=4, \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-x_2+7x_3=5, \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-3, \\ x_1+2x_2+4x_3=9, \\ 2x_1+7x_2-x_3=0, \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1, \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4, \end{cases}$

) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1, \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6, \end{cases}$

и

л) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2, \\ 7x_1-2x_2+x_4=3, \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=7, \end{cases}$

м) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5=3, \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4+3x_5=1, \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17. \end{cases}$

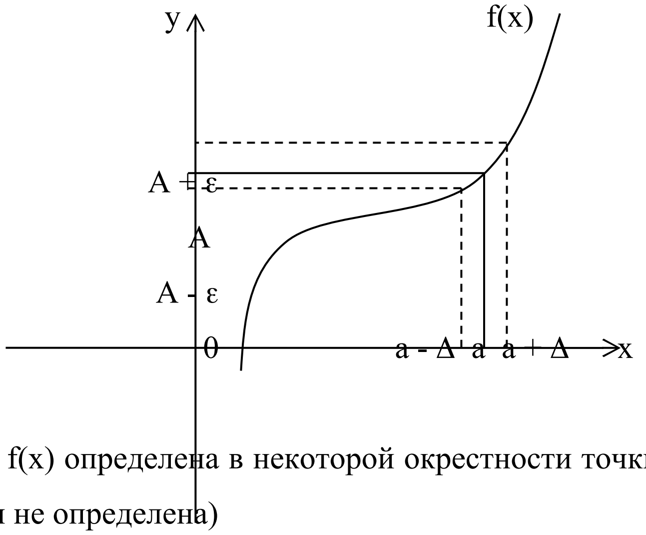
оо) $\begin{cases} x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Как записать простейшее матричное уравнение?
2. Как решить матричное уравнение?
3. Формулы Крамера для системы двух и трех линейных уравнений.
4. Дайте определение системе линейных уравнений.
5. Как зависит количество решений системы линейных уравнений в зависимости от определителей матрцы.
6. По каким признакам можно судить о Совместности или несовмести системы линейных уравнений.
7. В каком случае система линеных уравнений имет бесконечное множество решений.

Практическое занятие № 4. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенности

Предел функции в точке.



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

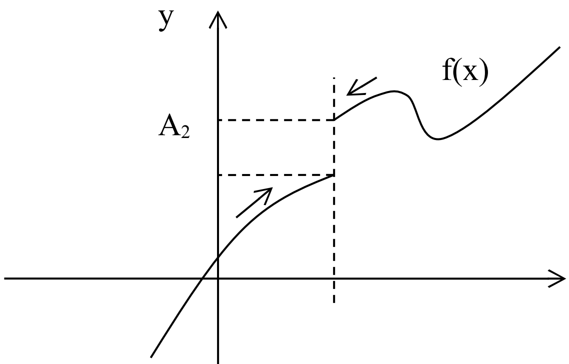
верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



A_1

0 a x

Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

<u>Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.</u>

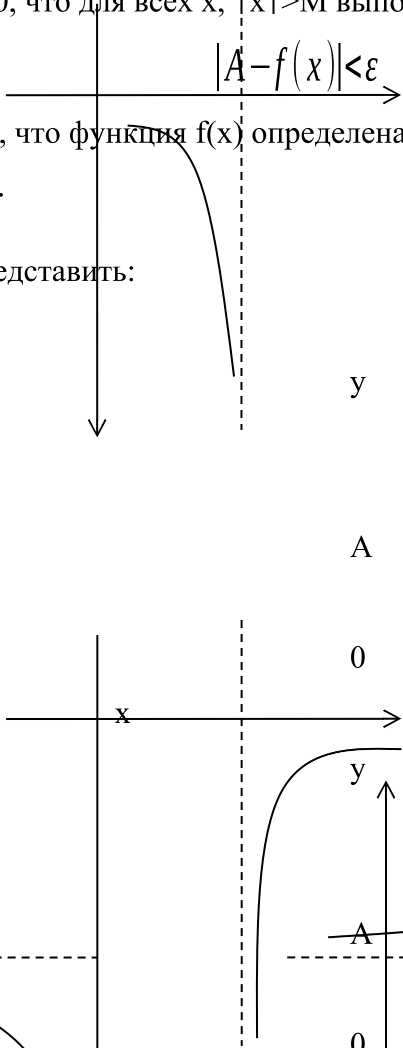
<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при x→∞, если для любого числа ε>0 существует такое число M>0, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A-f(x)|<\varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$

Графически можно представить:

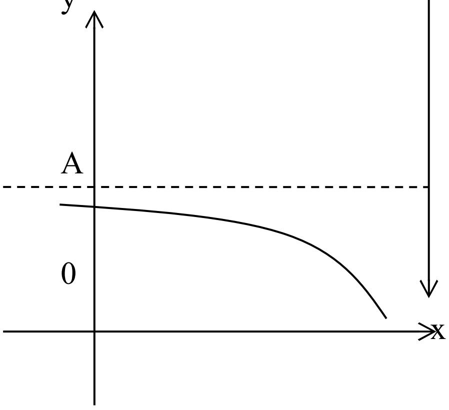


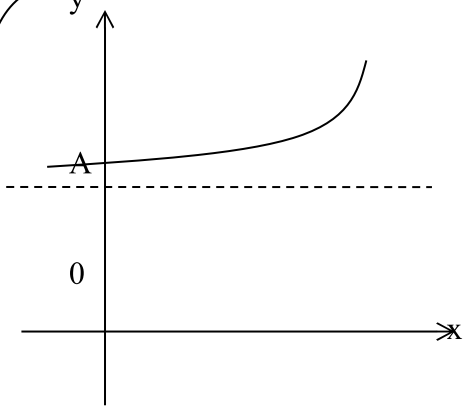
y y

A A

0 0

x x





Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C=C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a}=A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что │f(x)│<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A|$$ или

$$|f(x)|<\varepsilon+|A|,$$ т.е.

$$|f(x)|<M,$$ где M = ε + │A│

-

Некоторые замечательные пределы.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} +\ldots+a_n$,

Q(x) = $b_0x^m + b_1x_{m-1} +\ldots+b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots.+\frac{b_m}{x^m}\right)}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Итого:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & при\ n<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & при\ n=m\end{cases}}$$

<u>Первый замечательный предел.</u>

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

<u>Второй замечательный предел</u>.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\text{¿}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\text{¿}\left\{y=\pi/2-x\text{¿}\right\}\left\{x=\pi/2-y\text{¿}\right\}\text{¿}\{\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\text{¿}\left\{y=x-1\text{¿}\right\}\left\{x\to\infty\text{¿}\right\}\text{¿}\{\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$\text{¿}\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

<u>Пример.</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$	$x^2 - 8x + 12 = 0;$
$D = 36 - 32 = 4;$	$D = 64 - 48 = 16;$
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}$$

домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение: $\lim_{x \to 0} \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x(x-1)\left(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}\right)} =$

$$= \frac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left| x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \right| = \lim_{x \to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$, т.к.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \quad - 5x^2 + 11x & \\ \quad - 5x^2 + 5x & \\ \qquad\quad 6x - 6 & \\ \qquad\quad 6x - 6 & \\ \qquad\qquad\ 0 & \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2}=$$

$$¿2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы -∞ и +∞.

Задания к практическому занятию.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg\,3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\left(\dfrac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{xtg\,2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^3-5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{xtg\,3x}{\cos x-\cos^3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{x-x^2}{1-2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x^2-4x})$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Дайте определение предела функции точке.
2. Дайте определение предела функции на бесконечности.
3. Что такое односторонние пределы функции?

4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
5. Что такое первый, второй и третий замечательные пределы?
6. Дайте определение бесконечно малой функции.
7. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых функций.
8. Сформулируйте принцип эквивалентности бесконечно малых функций.
9. В чем заключается связь бесконечно больших и бесконечно малых функций?

Практическое занятие №5. Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

Непрерывность функции в точке.

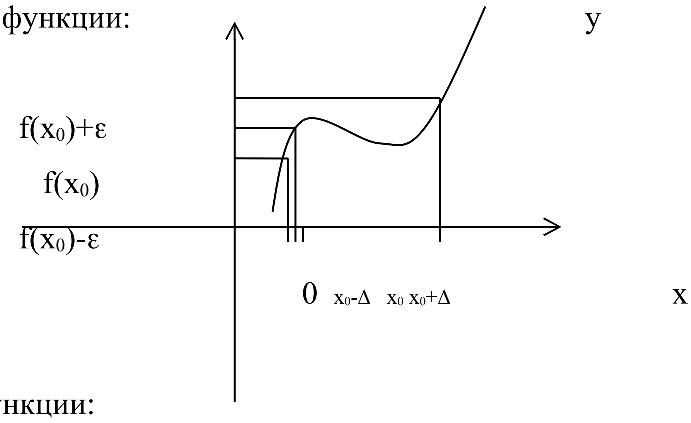
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

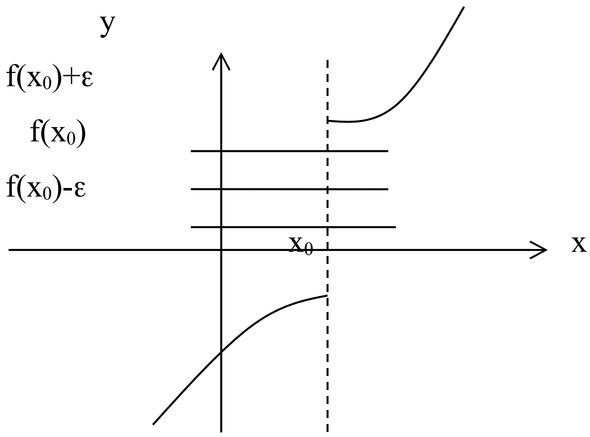
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех значений х, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sin и cos непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, или после преобразования:

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x \to 0$ $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

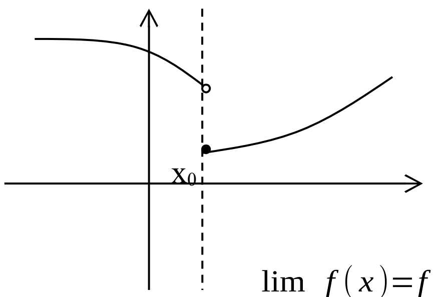
Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция $y = \sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Точки разрыва и их классификация.

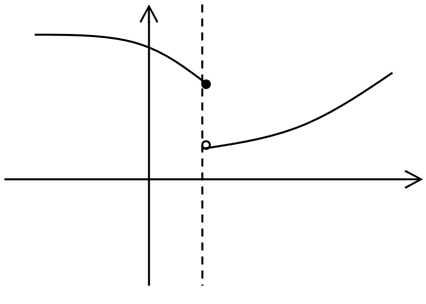
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



x_0

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке x = x_0, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

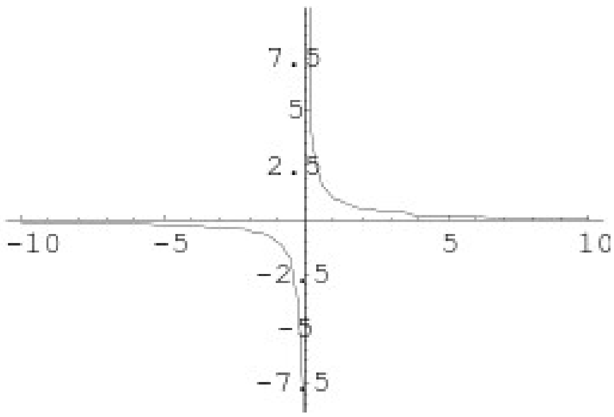
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав (1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = ¿ \left| 1,\ x - \text{рациональное число} ¿¿¿¿ \right.$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке x_0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty .$$

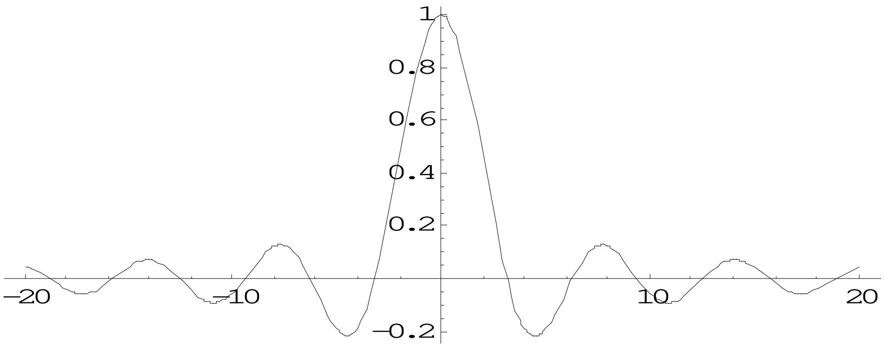


<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

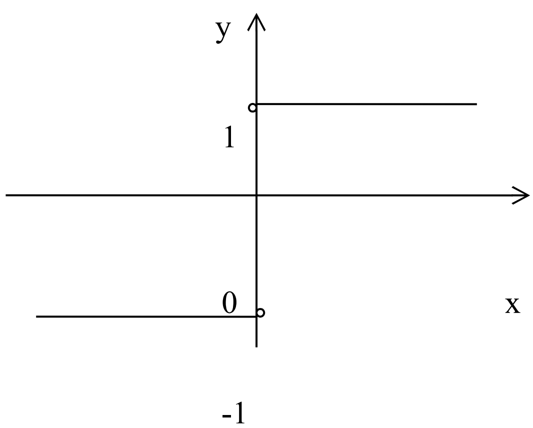
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = ¿ \left\{ \frac{\sin x}{x},\ при\ \ x \neq 0 ¿¿¿¿ \right.$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\frac{x}{|x|} = \left\{ 1,\ при\ \ x > 0 ¿¿¿¿ \right.$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0) = 1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0) = -1$, то функция будет непрерывной слева, если положить $f(x)$ равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists\, x_0$: $f(x_0) = 0$.

Определение. Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

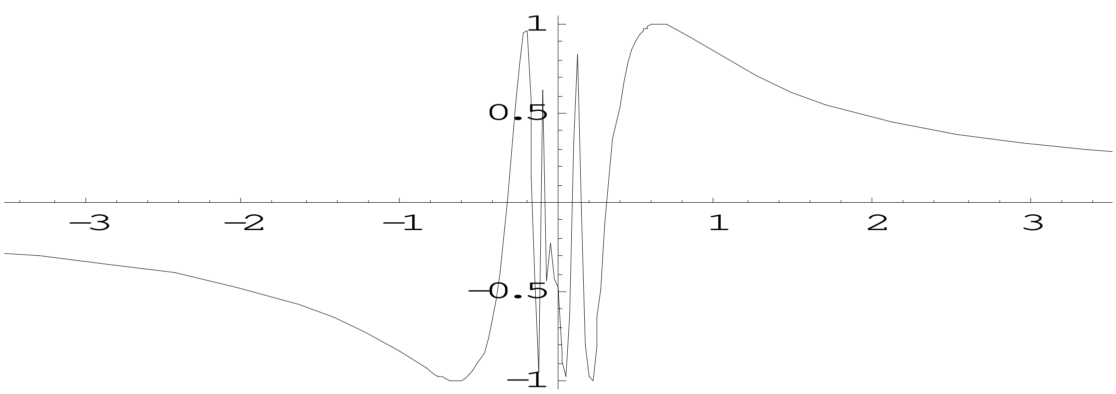
верно неравенство $$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число Δ>0 такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

<u>**Свойство 7:**</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

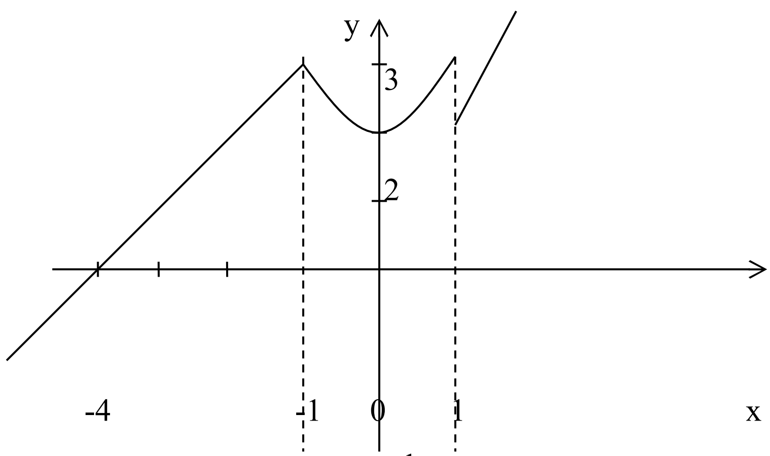
<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



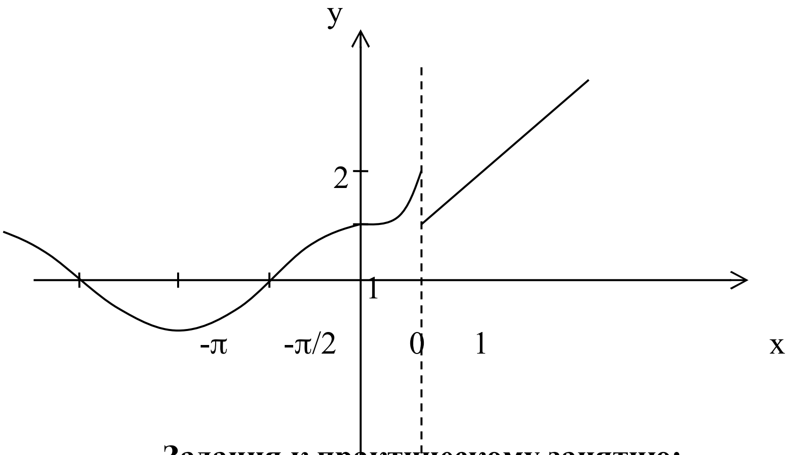
<u>Пример.</u> Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Задания к практическому занятию:

Задание№1: Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y=\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \end{cases}$

2. $y=\begin{cases} \dfrac{|x+3|}{x+3}, & x<-3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3 \end{cases}$

3. $y=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x<0, \\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1, \end{cases}$

4. $y=\begin{cases} -\dfrac{2|x|}{x}, & x<0 \\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2, \end{cases}$

5. $y=\begin{cases} \dfrac{3|x|}{x}, & x<0, \\ \sqrt{9-x^2}, & 0\le x\le 3, \end{cases}$

6. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, & x<-2, \\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \end{cases}$

7. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+3}, & x<-3, \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3, \end{cases}$

8. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+1}, & x<-1, \\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0, \end{cases}$

9. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}, & x<-2, \\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2, \end{cases}$

10. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+3}, & x<-3, \\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 0, \end{cases}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Приведите примеры функций непрерывных в точке.
3. Дайте определение непрерывности функции на интервале.
4. Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.
5. Приведите примеры точек разрыва первого и второго рода.
6. Сформулируйте основные свойства непрерывных функций.
7. Приведите примеры непрерывности элементарных функций.

Практическое занятие №6. Вычисление производных сложных функций.

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $\boxed{y'=f'(u)\cdot u'}$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если Δx→0, то Δu→0, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y=\ln|x|=¿\{\ln x,\ при\ \ x>0¿¿¿¿$.

Тогда (ln|x|)′= $\frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)'=\frac{1}{x};\ \ (\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{x}=\frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\boxed{(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x)=(\ln|f(x)|)'\cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание, и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$\boxed{\left(u^v\right)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u}$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x; \quad v = x \cos x;$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x;$

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln\left(x^2 + 3x\right)$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y) y'$$

$$y' = \frac{1}{g'(y)}$$

т.к. g´(y) ≠ 0

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

<u>Пример.</u> Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctg является функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = tgx; \quad x = arctgy;$$

Известно, что $y' = (tgx\{)' = \frac{1}{\cos^2 x};¿$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \quad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy\{)' = \frac{1}{1+y^2};¿$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных

$y = \sin(x^2+3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$y' = (\sin u)_{u'} \cdot u' = \cos\ u \cdot 2x = \cos(x^2+3) \cdot 2x$.

$y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x)$.

$y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$y' = (x^2)' e^{\sin x} + x^2 (e^{\sin x})' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x$.

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по *x*, полагая, что *y* есть функция от *x* и обозначая производную *y* через y':

$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0$.

Выразим из полученного равенства y':

$(2y + 2x^2) y' = 2x - 4xy$;

$y' = \dfrac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}$.

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x$;

$(-\sin y - 8y) y' = e^x$;

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y}.$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используем формулу $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2+3)'} = \frac{-\sin t}{2t}$$

Задание к практическому занятию:

Часть 1.

$y = e^{-x}$

$y = \sqrt{e^x}$

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$

$y = e^{(3x+5)^2}$

$y = a^{3x}$

$y = a^x e^x$

$y = \lg(2x)$

$y = \ln 3x$

$y = \log_3(4x - 2)$

$y = \ln(x^3)$

1) $y = (\ln x)^3$

$y = 5(2x^2 - 3x + 4)^8$

$y = 4\sqrt{1 + 3x^3 - 2x^5}$

$y = \sqrt[3]{(2 - x)(5 - 2x)}$

$y = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

$y = \sqrt{\dfrac{4}{2x^2 + 5}}$

$y = 3\sin(3x - 1)$

$y = \arcsin\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg\,3x}$

$y = \ln\sin x$

$y = \sin^2 3x\,\cos^3 2x$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Производная как скорость изменения функции.
3. Определите геометрический и физический смысл производной.
4. Как с помощью производной описать Уравнение касательной и нормали к кривой.
5. Назовите необходимое условие существования производной.
6. Перчислите Правила дифференцирования постоянной, алгебраической суммы, произведения, частного функций.
7. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Практическое занятие № 7. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

<u>Общие правила нахождения высших производных.</u>

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$
$\ldots + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

Дифференциал функции. Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

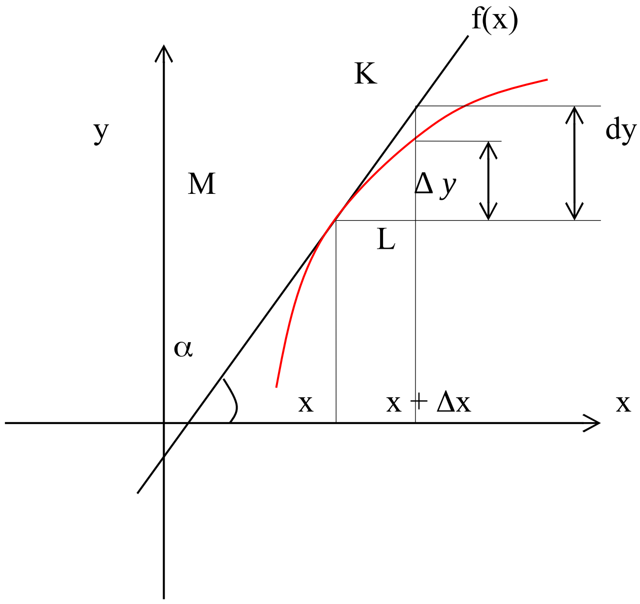
<u>**Определение.**</u> **Дифференциалом** функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке х равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке х, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x),\ x = g(t)$, т.е. y - сложная функция.

Тогда $$\boxed{dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.}$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$dx = \Delta x$, но

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x 2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$¿ \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1+\dfrac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

¿ $$\frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right) \ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$
$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2 \ln x)$$

Задание к практическому занятию:

Найти производные от указанных функций:

1. а) $y = x^5 + \ln(x^2 + 8x - 1)$; б) $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}x+3}$

2. а) $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$; б) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

3. а) $y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$; б) $y = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$

4. а) $y = x^2 + \arcsin \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

5. а) $y = (2x + e^{-x^2})^2$; б) $y = \ln \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$

6. а) $y = \operatorname{tg}^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - \ln x}$

7. а) $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$; б) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{\ln x + 1}{2 - \ln x}$

8. а) $y = x^2 \cdot 10^{-x+2}$; б) $y = \dfrac{e^x + 1}{\cos x}$

9. а) $y=\sin^2 2x\cdot\cos\frac{x}{2}$; б) $y=\ln\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

10. а) $y=\operatorname{arctg}x^2-\ln\sin x$; б) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{2x}$

11. а) $y=x^4+e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y=\frac{\cos x+2x}{\sqrt{x}}$

12. а) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x$; б) $y=\operatorname{tg}\frac{e^x}{\sqrt{x^4-1}}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Какую информацию о функции мы можем получить, проанализировав вторую производную функции.
2. Дайте определение Дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости в точке.
3. Что такое Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.
4. Дифференциалы высших порядков.
5. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Практическое задание № 8. Полное исследование функции.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) – f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 – x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

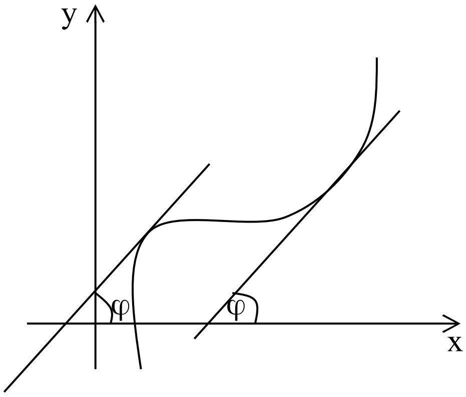
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) – f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

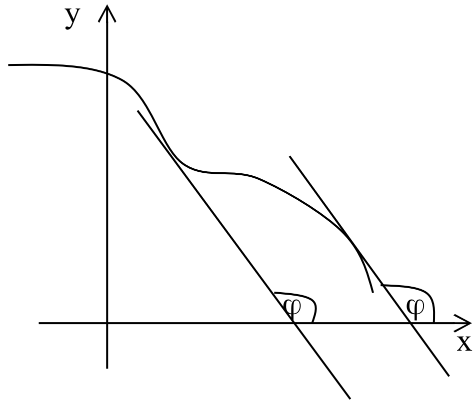
Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:





Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$$f(x_1+\Delta x)<f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0 \quad при \quad \Delta x<0$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0 \quad при \quad \Delta x>0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x\to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

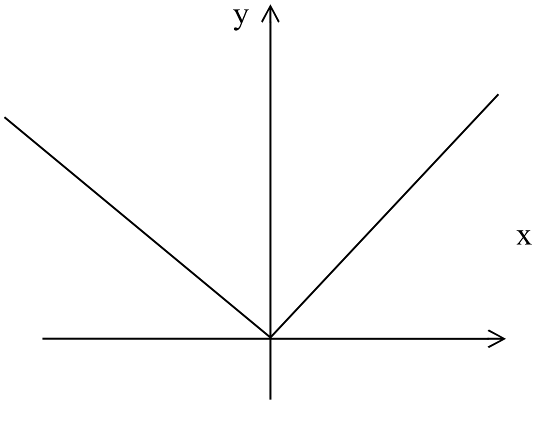
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

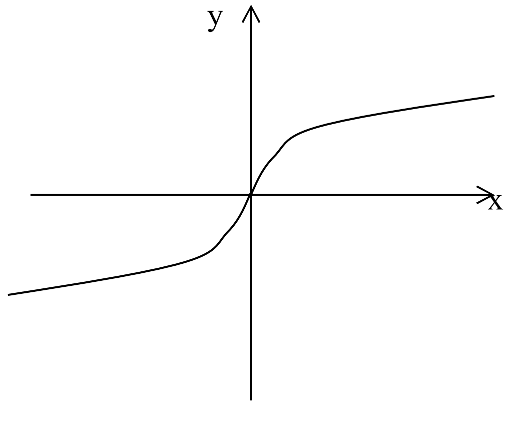
Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной.

В точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\{ f'(x)>0 \text{ при } x<x_1 ¿¿¿¿$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

<u>Теорема.</u> *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

<u>Доказательство.</u>

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция f(x) непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

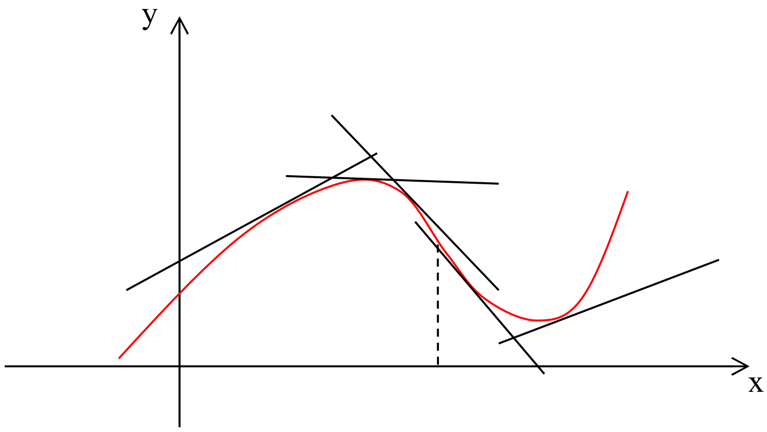
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция f(x) имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

<u>Выпуклость и вогнутость кривой.
Точки перегиба.</u>

<u>Определение.</u> Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

<u>Теорема 1.</u> *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

<u>Доказательство.</u> Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) – f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y-\bar{y}=(x-x_0)[f'(c)-f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c)-f'(x_0):\ \ y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0),\quad x_0<c_1<c$

Пусть x > x_0 тогда x_0 < c_1 < c < x. Т.к. x – x_0 > 0 и c – x_0 > 0, и кроме того по условию $f''(c_1)<0$, следовательно, $y-\bar{y}<0$.

Пусть x < x_0 тогда x < c < c_1 < x_0 и x – x_0 < 0, c – x_0 < 0, т.к. по условию $f''(c_1)<0$, то $y-\bar{y}<0$.

Аналогично доказывается, что если f´´(x) > 0 на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f´´(a) = 0 или f´´(a) не существует и при переходе через точку x = a f´´(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть f´´(x) < 0 при x < a и f´´(x) > 0 при x > a. Тогда при x < a кривая выпукла, а при x > a кривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

2) Пусть f´´(x) > 0 при x < b и f´´(x) < 0 при x < b. Тогда при x < b кривая обращена выпуклостью вниз, а при x > b – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

Теорема доказана.

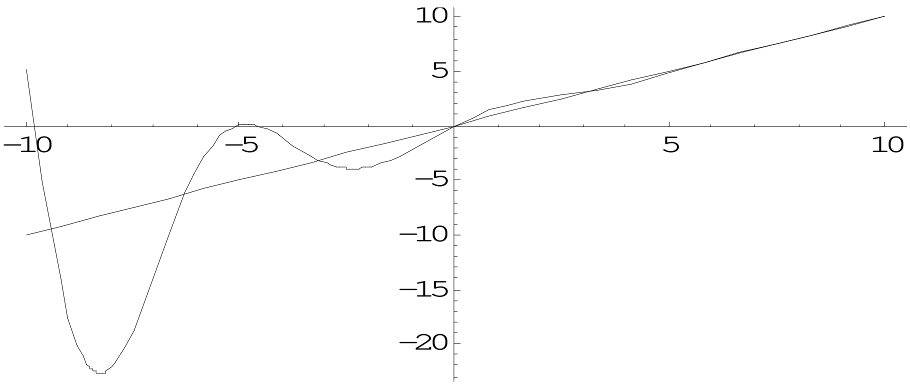
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y=x+e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

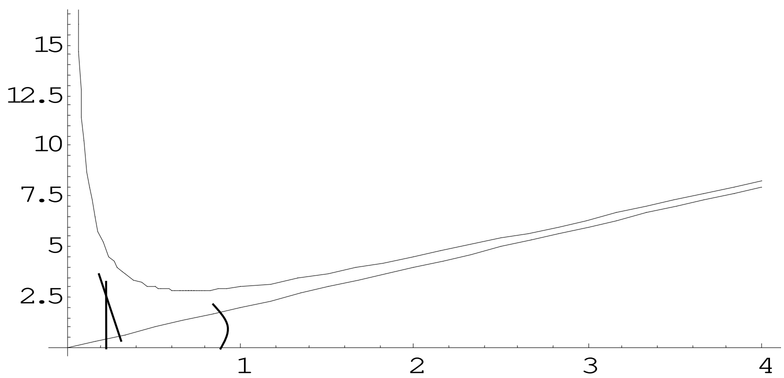
Вертикальные асимптоты.

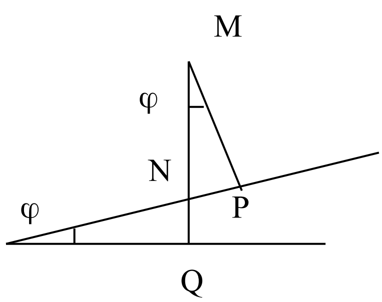
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – М, Р – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ох обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\overline{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP|=0$, ∠NMP = φ, $|NM|=\frac{|MP|}{\cos\phi}$.
Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP|=\lim_{x\to\infty}|NM|\cos\phi=\lim_{x\to\infty}|NM|=0$$

$$|NM|=\left||MQ|-|QN|\right|=|y-\overline{y}|=|f(x)-(kx+b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки х:

$$\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

Т.к. х→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to\infty}k=k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-0=0$, следовательно,

$$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.}$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$, следовательно,

$$\boxed{b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]}$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞ x→0-0: y→-∞ x→0+0, следовательно, х = 0- вертикальная асимптота.

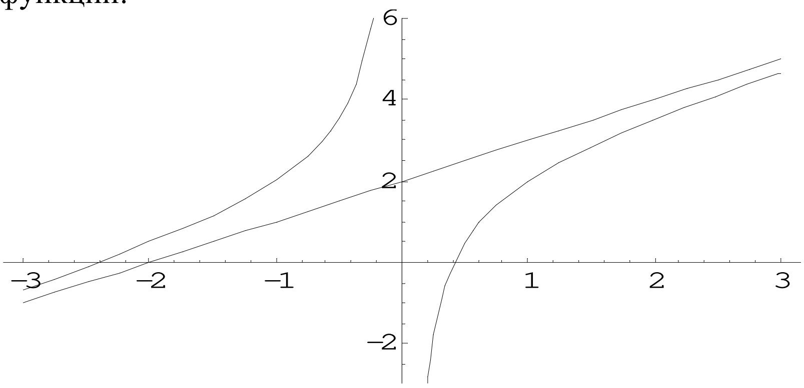
2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



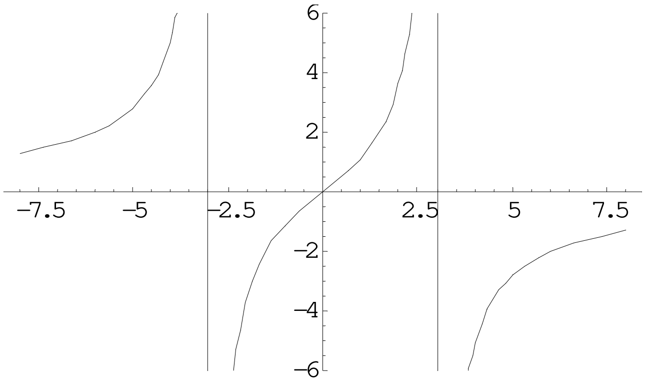
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y=\frac{9x}{9-x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{9-x^2}=0$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2}-1}=0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

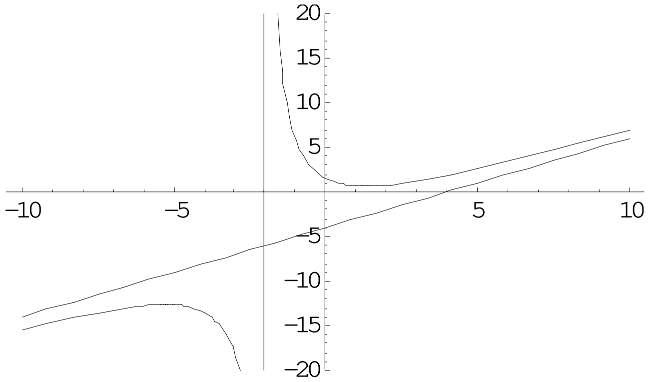
Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.



<u>Схема исследования функций</u>

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба. (Если они имеются).
8) Асимптоты. (Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

<u>Пример.</u> Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y''=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

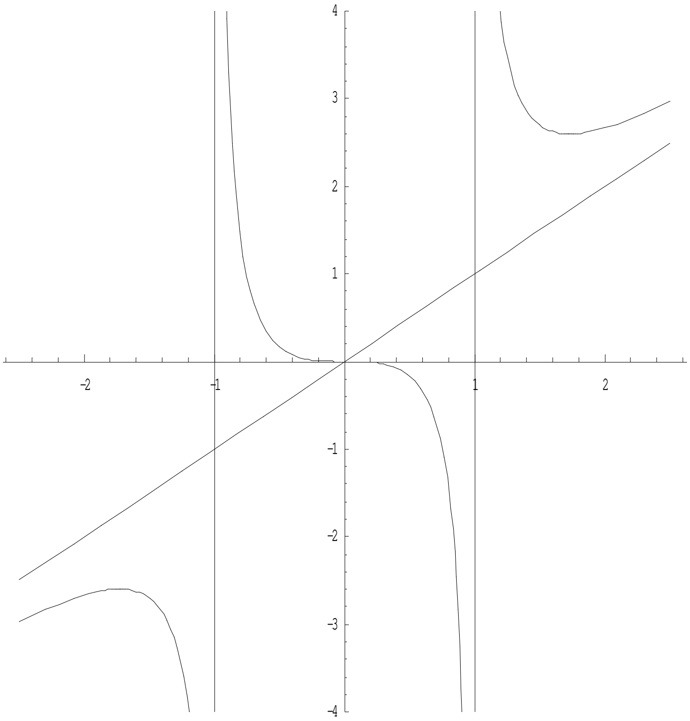
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



Задание к практическому занятию:

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y=\frac{x^3+16}{x}$ 3. $y=\frac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y=\frac{x^2+1}{x}$ 7. $y=\frac{2x+1}{x^2}$ 8. $y=\frac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y=\frac{x}{3-x^2}$ 10. $y=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

12. $y=\frac{x^2+16}{2x}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Монотонность функции. Назовите Достаточное условие монотонности функции.
2. Классифицируйте точки разрыва функции.
3. Правило нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции.
4. Локальный экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума.
5. Определение выпуклости и вогнутости графика функции на интервале. Необходимое и достаточное условия выпуклости и вогнутости.
6. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
7. Классифицируйте Асимптоты графика функции.
8. Сформулируйте алгоритм Общей схемы исследования функций.

Практическое занятие № 9. Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	-ln|cosx|+C	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	ln|sinx|+ C	10	$\int \cos x dx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}+C$	12	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \dfrac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \dfrac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \dfrac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \dfrac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg\dfrac{x}{2}\right\|+C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

<u>Непосредственное интегрирование.</u>

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x\left(x^2+1\right)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2+1;\ \ dt = 2xdx;\ \ dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{\left(x^2+1\right)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2\sin x dx = ¿\left\{u = x^2;\ \ dv = \sin x dx;¿\right|¿\{\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$$=\text{¿}\left|u=x;\ \ dv=\cos x dx;\text{¿}\right|\text{¿}\{\}=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin x dx\right]=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $$\int e^{2x}\cos x dx=\text{¿}\left|u=e^{2x};\ \ du=2e^{2x}dx;\text{¿}\right|\text{¿}\{\}=e^{2x}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$=\text{¿}\left|u=e^{2x};\ \ du=2e^{2x}dx;\text{¿}\right|\text{¿}\{\}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$$

$$+2e^{2x}\cos x-4\int\cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int(2x+1)^{20}dx=|2x+1=t;\ \ dt=2dx;|=\int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C=\frac{t^{21}}{42}+C=\frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$

Пример.

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|+$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx=\int\sin^{-3/2}x\cos x dx=\{\sin x=t;\quad dt=\cos x dx\}=\int t^{-3/2}dt=-2t^{-1/2}+C=$$

$$=-2\sin^{-1/2}x+C=-\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$$

Пример.

$$\int x^2e^{5x}dx=¿\left\{u=x^2;\ dv=e^{5x}dx;¿\right\}¿\{\}=\frac{1}{5}e^{5x}x^2-\int\frac{1}{5}e^{5x}2xdx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx=\left\{u=x;\ dv=e^{5x}dx;¿\right\}¿\{\}=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right]=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx=¿=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125}=\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).¿¿$$

¿

¿

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\{dx=d(x+1)\}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\{x+1=t\}=$$
$$¿\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=¿\left\{u=\ln x;\ dv=\frac{1}{x^3}dx;¿\right\}¿\{\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+¿+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.¿¿$$

<u>Пример.</u>

$$\int x\ln x dx=¿\{u=\ln x;\ \ dv=xdx;¿\}¿\{\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$
$$¿\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\left\{t=e^{\cos^2 x};\ \ dt=-e^{\cos^2 x}¿2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\}=-\int dt=-t+C=$$
$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int \frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\,arctgt+C=2\,arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25}=\int \frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Задание к практическому занятию:

Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$ 4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^5}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. а) $\int \sqrt{1-5x}\,dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int xarctgxdx$ 8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}\,dx$; б) $\int (1-x)\sin 3xdx$ 10.а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4xdx$ 12. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.
2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.
3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.
4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.

5. $\int \frac{2\sin x + 3}{\cos^2 x} dx$.

6. $\int (3 + 2e^x)^5 e^x dx$.

7. $\int \frac{5 - 3\cos x}{\sin^2 x} dx$.

8. $\int \frac{x(2 + x^2)}{1 + x^4} dx$.

9. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3} dx$.

$\int \frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Как записать всю совокупность первообразных функций?
4. Что называется неопределенным интегралом?
5. Свойства неопределенного интеграла.
6. Основные формулы интегрирования.
7. Как проверить результат интегрирования?
8. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
9. Что такое интегральные кривые? Как они расположены относительно друг друга? Могут ли они пересекаться?
10. Как из семейства интегральных кривых выделить одну из них?

Практическое занятие № 10. Интегрирование методом подведения под знак дифференциала.

Подведение под знак дифференциала

$$\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u(x))d(u(x)),$$

так как $u'(x)dx=d(u(x))$.

1 $\int \sin x \cos x dx$

2 $\int \sin x \cos 2x dx$

3 $\int \frac{x^2+5}{x+2}dx$

4 $\int \sqrt[3]{1+2x}dx$

5 $\int 5\cdot\sqrt[3]{(3x+5)^2}dx$

6 $\int \sin 2x \cos x dx$

7 $\int \frac{3x+4}{3x+2}dx$

8 $\int \frac{2x^2+2x+7}{x+3}dx$

9 $\int 8\cdot\sqrt[7]{1-7x}dx$

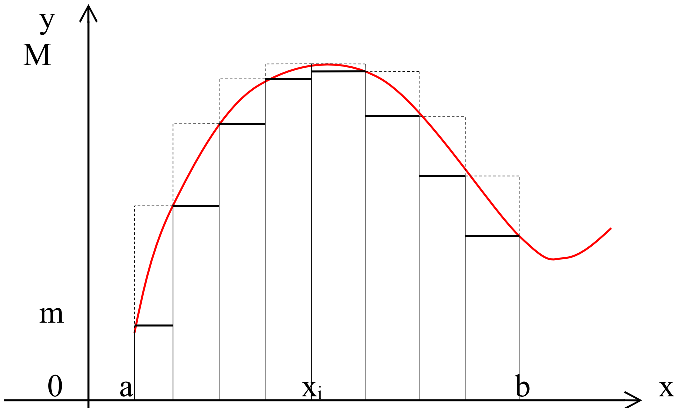
10 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2+2}}$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Первообразная. Теорема об общем виде первообразной данной функции. Примеры.
2. Неопределенный интеграл. Достаточное условие интегрируемости.
3. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
4. Общие приемы интегрирования: интегрирование замена переменной.
5. Общие приемы интегрирования: интегрирование по частям.
6. Интегрирование рациональных дробей: случай вещественных корней знаменателя
7. Интегрирование подведением под знак дифференциала.

Практическое занятие № 11. Вычисление определённых интегралов.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.
Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b - a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S$.

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения:
$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$
$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \phi(x)dx$
5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

<u>Доказательство:</u> В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

<u>Обобщенная теорема о среднем.</u> Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \phi(x)dx$$

<u>Вычисление определенного интеграла.</u>

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

<u>Теорема:</u> Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

<u>Доказательство:</u> Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)\,dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)\,dt=F(a)+C$$

$$0=F(a)+C$$

$$C=-F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$.

А при х = b: $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$

Заменив переменную t на переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].
Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).
Тогда если
1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ´(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F[\phi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ¿\{x=\sin t\,;¿\}¿\{\} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$
$$¿\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int\limits_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1 + tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках $x_0, x_1, \dots, x_m$, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Задание к практическому занятию:

1)Вычислить определенные интегралы используя только определение и понятие интегральной суммы. Решение проиллюстрировать геометрическими построениями:

1. $f(x)= 2x -4$, $[1;9]$
2. $f(x)= x^2 +1$, $[-2;2]$
3. $f(x)= e^{-x}$, $[1; 10]$

Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

1. $\int\limits_a^b e^x dx$.
2. $\int\limits_a^b x^m dx$.
3. $\int\limits_a^b \sin(x) dx$
4. $\int\limits_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$.
5. $\int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d$.
6. $\frac{1}{\sin^2(x)} dx$.
7. $\int\limits_a^b C^x dx$.
8. $\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx$.
9. $\int\limits_a^b \cos(x) dx$.
10. $\frac{1}{\cos^2(x)} dx$.
11. $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx$.
12. $\int\limits_1^2 \left(x^2-2x+3\right) dx$.
13. $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+x^2\right) dx$.
14. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t} dt$.
15. $\int\limits_1^e \left(\frac{\lg(z)+1}{z}\right) dz$.
16. $\int\limits_0^1 (1+t)^3 dt$.
17. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(x-1)^3}{x} dx$.
18. $\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos(x)+\sin(x)\right) dx$.
19. $\int\limits_2^4 \left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}} dx$.
20. $\int\limits_0^3 \left(\frac{\sin(2x)}{\cos(x)}\right) dx$.

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 (5x-2)^4\,dx.$ 2. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx.$ 4. $\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}\,dx.$ 5. $\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1. $\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ 2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3. $\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4. $\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5. $\int_0^{\pi} \left(x^2+2\right)\cos x dx.$

1. $\int_0^{\pi/4} \sin 2t \cdot dt.$ 2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 3. $\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4. $\int_{-2}^2 \sqrt{x+2}dx.$ 5. $\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

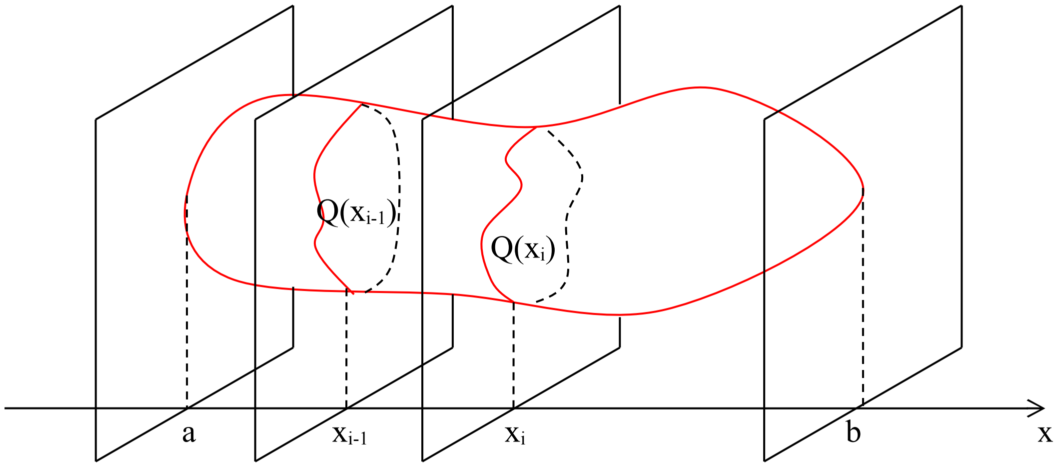
1. $\int_0^1 e^{3x}dx.$ 2. $\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ 3. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 4. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ 5. $\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Интегральная сумма. Определенный интеграл.
2. Свойства определенного интеграла.
3. Геометрическая интерпритация определенного интеграла.
4. Связь неопределенного и определенного интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.
5. Приемы вычисления определенных интегралов: замена переменной; интегрирование по частям.
6. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов фигур.

Практическое занятие№ 12. Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

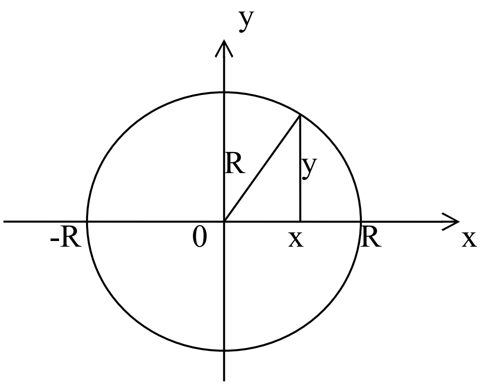
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

<u>Пример:</u> Найти объем шара радиуса R.



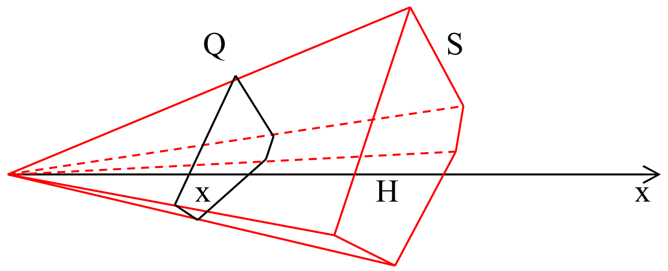
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса у. В зависимости от текущей координаты х этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right) dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пример: Найти объем произвольной пирамиды с высотой Н и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где х – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

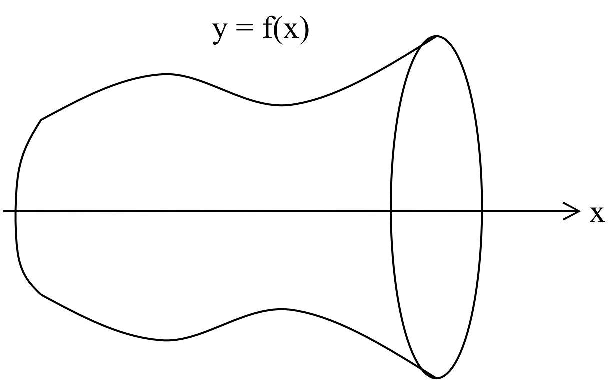
$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2} x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2} x^2 dx = \frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H = \frac{1}{3} SH$

Объем тел вращения.

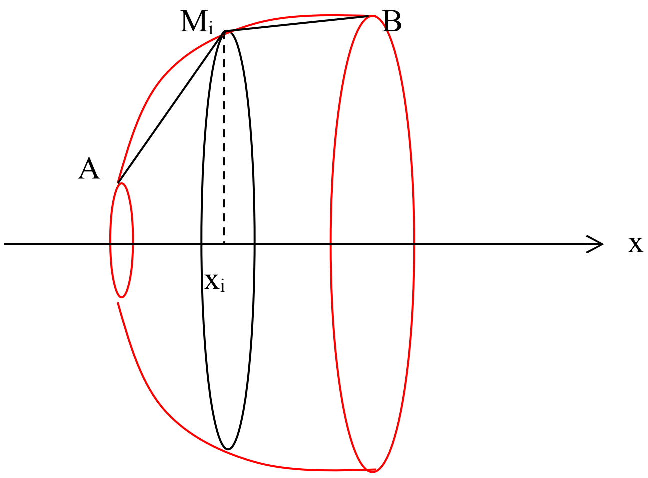
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями а и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R=|f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу АВ на n частей точками M_0, M_1, M_2, … , M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа (см. Теорема Лагранжа.) к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f(\varepsilon_i),\quad x_{i-1}<\varepsilon<x_i$

Тогда $\Delta S_i=\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n=\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\varepsilon_i)\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\,\Delta x_i$$

Тогда $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)}\,dx$ - формула вычисления площади поверхности тела вращения.

Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох линии заданной уравнением, и ограниченного плоскостями перпендикулярными оси ОХ

1. $y=4x-x^2$, y=x.
2. $x^2+y^2=9$.
3. $y^2=2x$, x=1.
4. $y=x^2$, $y^2=x$.
5. $y^2=8x$, 1≤x ≤2.
6. $x^2-y^2=9$, x-2y+6=0.
7. $y=4-x^2$, y=0, x=0, где x≥0.
8. $y=x^2+1$, y=0,x=1,x=2.
9. $y=x^3$, y=1, x=0.
10. $y=\cos(2x)$, y=0, x=0, где 0≤x≤π/4.

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Методы интегрирования определенного интеграла (метод непосредственного интегрирования, метод подстановки и интегрирования по частям).
2. Что такое определенный интеграл?
3. Основные свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
6. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
7. Нахождение объемов тел вращения.

Практическое занятие № 13. Вычисление определенного интеграла

1. С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 2. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^4}$. 3. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$. 4. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^5+1}$. 5. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) dx}{\sin^5(x)}$ 7. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$ 8. $\int_0^1 (e^x+4)^2 e^x dx$ 9. $\int_0^1 e^{2x+1} d$ 10. $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x) dx$

2. С помощью формулы интегрирования по частям вычислить интегралы

1. $\int_0^1 xe^{-x} dx$. 2. $\int_0^{\pi/2} x\cos(x) dx$ 3. $\int_1^e \ln(x) dx$. 4. $\int^{1} \ln(x+1) dx$. 5. $e^x \cos(x) dx$.

6. $\int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx$. 7. $\int_4^3 x\sin^{-2}(x) dx$. 8. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} x\cos^{-2}(x) dx$. 9. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$. 10. $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$.

3.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$.
2. $y^2=2px$, $x=h$.
3. $y=\ln(x)$, $x=c$, $y=0$.
4. $y=x^2$, $y=2-x^2$.
5. $y=x^2$, $y=1$.
6. $y=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.
7. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
8. $y=\sin(x)$, $y=x^2-\pi x$.
9. $x^2-y^2=1$, $x=2$.
10. $y=x^2$, $y=x^{1/2}$.

4.Найти длину дуги кривой

1. $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=4.
2. $y=x^2-1$, отсеченный осью Ox.

3. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(x)$ от x=1 до x=e.

4. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от x=-1 до x=2.

5. $y=x^2$ от x=0 до x=2.

6. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$, $0\le t\le\pi/2$.

7. $\rho=2(1-\cos\phi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

8. $y=e^x+e^{-x}$ от x=0 до x=1.

9. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$.

10. $x^2+y^2=16$.

Практическое занятие № 14. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Определение. Комплексным числом *z* называется выражение $z=a+ib$, где *a* и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2=-1; \quad i=\sqrt{-1}.$$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a* = *Re z*), а *b*- **мнимой частью** (*b* = *Im z*).

Если *a =Re z =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b = Im z = 0*, то число *z* будет действительным.

Определение. Числа $z=a+ib$ и $\overline{z}=a-ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1=a_2; \quad b_1=b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a=b=0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$\boxed{z=z_1\pm z_2=(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)}$$

$$|z|=\sqrt{(a_1\pm a_2)^2+(b_1\pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z=z_1 z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1 a_2+ia_1 b_2+ib_1 a_2+i^2 b_1 b_2$$

$$\boxed{z=z_1 z_2=(a_1 a_2-b_1 b_2)+i(a_1 b_2+b_1 a_2)}$$

1) Деление.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=x+iy$$

$$z=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1 a_2+b_1 b_2)+i(a_2 b_1-a_1 b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$\boxed{z=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}}$$

<u>Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной форме комплексного числа.</u>

Комплексное число $z=a+b\,i$ изображается в виде вектора $\overrightarrow{OA}=\vec{z}$ с началом в точке $z=0$ и концом в точке $z=a+b\,i$. Угол ϕ между действительной осью *Ox* и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z\neq 0$ (рис. 1).

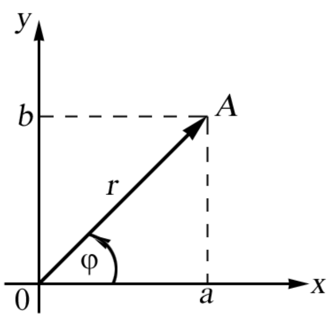


Рис. 1

Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по движению часовой стрелки – отрицательной. Аргумент ϕ комплексного числа $z=a+b\,i$ записывается так: $\phi=\arg z$ или $\phi=\arg(a+b\,i)$.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z\neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент комплексного числа определяется однозначно, если область его изменения ограничить промежутком величины 2π. В качестве такого промежутка принято брать один из следующих промежутков $[0,\,2\pi]$, $[-\pi,\,\pi]$. Такое значение аргумента z называется главным значением аргумента $\arg z$. Так как аргумент z определяется с точностью до слагаемого $k\cdot 2\pi$, то

$\arg z = \arg z + 2k\pi$.

Из рисунка видно, что

$a = r\cos\phi\ ,\ \ b = r\sin\phi$,

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, r \geq 0$, $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\phi,\ \phi = \arg\ z = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.

Запишем формулы для вычисления главного значения аргумента, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi]$:

$$\arg z = \arg(a+bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a>0,\ b\geq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & a=0,\ b>0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi, & a<0,\ b<0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a=0,\ b<0; \end{cases}$$

Для представления комплексного числа $z = a + b\ i$ **в тригонометрической форме необходимо найти**:

1) модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; изобразить точку $a + b\ i$ $\boxed{\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\phi,\ \phi = \arg\ z = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}}$ и выбрать нужное значение аргумента этого числа;

2) записать $z = a + b\ i$, воспользовавшись соотношением. Получаем тригонометрическую форму комплексного числа

$z = a + b\ i = r(\cos\phi + i\ \sin\phi\ )$.

Пример 1. Записать комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме нужно знать его модуль и аргумент, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2.$

Затем подсчитываем главное значение аргумента $z=1+i\sqrt{3}$. Вещественная и мнимая части данного комплексного числа положительны ($a=1,\ b=\sqrt{3}$). По формуле главное значение аргумента совпадает с $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\dfrac{\pi}{3}$.

Тогда $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Пример 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z=-5$.

Решение. Данное число является вещественным и отрицательным, а главное значение его аргумента (см. формулу (2.9)) равно π. Подсчитаем модуль числа

$$|-5|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5.$$

Модуль и аргумент числа –5 найдены, по формулам (2.7) – (2.9) имеем $z=-5=5(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Ответ: $z=-5=5(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Пример 3. Найти аргумент числа $z=-3-i\sqrt{3}.$

Решение. Вещественные и мнимые части данного числа отрицательны и по формуле (2.9) главное значение аргумента его совпадает с

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-3}+\pi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi.$$

Следовательно, $\arg\left(-3-i\sqrt{3}\right)=\dfrac{7}{6}\pi+2\pi n$.

Задания к практическому занятию:

Выполнить действия:

1. $(5-4i)+(7+2i)$.
2. $(5-4i)+(7+4i)$.
3. $(-6+2i)+(-6-2i)$.
4. $(1-i)-(7-3i)+(6-2i)-(2+i)$.
5. $(-2-i)\cdot(1+i)$.
6. $(5-4i)\cdot(3+2i)$.
7. $\dfrac{1}{1-i}$.
8. $\dfrac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$.
9. $\dfrac{3-2i}{1+3i}$.

10. Найти модуль и аргумент числа $\dfrac{8+2i}{5-3i}$.

1. Представить в алгебраической форме число

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Представить в тригонометрической форме числа:

2. $z_1=2-3i$
3. $z_2=1+4i$
4. $-7i$
5. $9+7i$
6. $-i$
7. $(2-i)+(3+2i)$

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Какое число называется мнимой единицей?

2. Назвать комплексные числа в алгебраической форме?

3. Перечислить действия над комплексными числами в алгебраической форме.

4. Назвать геометрический образ комплексного числа?

5. Назвать комплексные числа в тригонометрической форме?

6. Какое значение аргумента называется главным?

7. Назвать действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме?

8. Записать формулу, по которой осуществляется возведение комплексного числа в целую положительную степень.

9. Записать формулу, по которой находится корень n -й степени из комплексного числа.

Практическое занятие № 15. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

При умножении двух или нескольких чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$r_1(\cos\phi_1+i\ \sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2+i\ \sin\phi_2)=$$
$$\text{¿}\,r_1\cdot r_2(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\ \sin(\phi_1+\phi_2)).$$

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\phi_1+i\ \sin\phi_1)}{r_2(\cos\phi_2+i\ \sin\phi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\ \sin(\phi_1-\phi_2)).$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени, т. е.

$$z^n=(r(\cos\phi+i\ \sin\phi))^n=r^n(\cos n\phi+i\ \sin n\phi),$$

где $n\in N$. Эта формула называется формулой Муавра.

Корень n-й степени из комплексного числа $z=r(\cos\phi+i\ \sin\phi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right),$$

где k = 0, 1, 2,…, n –1.

Пример 1. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, где

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\quad z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Решение. $z_1\cdot z_2=2\cdot3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right)=$

$$=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}+3\ i\sqrt{2}.$$

Ответ: $z_1\cdot z_2=3\sqrt{2}+3\ i\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, где

$$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Найти частное чисел z_1 и z_2, где

$$z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение.

$$z_1 : z_2 = \frac{10}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0 + i) = 5i.$$

Ответ: $z_1 : z_2 = 5i$.

Пример 4. Найти z^6, где $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Возводим в шестую степень z, согласно формуле (2.13):

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 = 2^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right] = ¿¿$$

$$= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^6(-1 + i\cdot 0) = -2^6.$$

Ответ: $z^6 = -2^6$.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\sin(\phi_1-\phi_2))$$

Пример 5. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{2}<|(1-i)z-i|<2\sqrt{2}.$$

Решение. Поскольку $z=a+i\,b$, имеем

$$(1-i)z-i=(a+i\,b)(1-i)-i=(a+b)+(b-a-1)i.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа

$$|(a+b)+(b-a-1)i|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a-1)^2}=\sqrt{2a^2+2b^2+2a-2b+1}.$$

По условию

$\sqrt{2<}$¿¿$\sqrt{2a^2+2b^2+2a-2b+1}$¿$2\sqrt{2}$, или

$$2<2a^2+2b^2+2a-2b+1<8,$$

$$1<a^2+b^2+a-b+0,5<4.$$

Выделяя полные квадраты по a и b, получим

$$1<(a+0,5)^2+(b-0,5)^2<4.$$

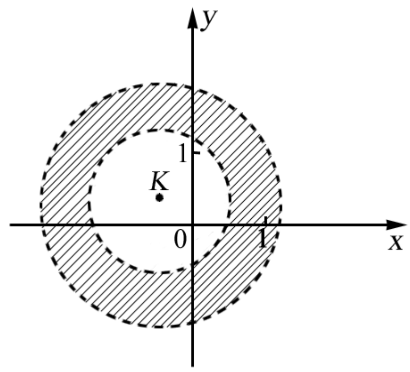


Рис. 2

Это неравенство представляет собой внутренность кольца (рис. 2.7), т. к. левая часть двойного неравенства – область, лежащая вне круга радиусом 1 с центром в точке C (–0,5; 0,5), правая часть – круг с центром в точке C и радиусом, равным 2 (границы окружностей в область не входят, поэтому они изображены пунктиром).

Пример 16. Найти наибольшее и наименьшее значения $|z|$, если $z=2+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Решение. Имеем

$$|z| = \sqrt{(2+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$
$$= \sqrt{4 + 4\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{5 + 4\cos\alpha}.$$

Анализируя полученное $|z| = \sqrt{5+4\cos\alpha}$, делаем вывод, что наибольшее значение $|z|$ равно $\sqrt{9}=3$ (при $\alpha=0$), а наименьшее значение $|z|$ равно $\sqrt{5-4}=1$ (при $\alpha=\pi$).

Ответ: наибольшее значение $|z|$ = 3 (при $\alpha=0$), а наименьшее значение $|z|$ = 1 (при $\alpha=\pi$).

Задание к практическому занятию:

1. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$,

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Найти частное чисел z_1 и z_2, где

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Возвести в степень $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$.

4. Извлечь корень $\sqrt{i}$.

5. Решить на множестве комплексных чисел уравнение $4x^2 - 8x + 13 = 0$.

6. Выполнить действия $\frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i}$.

7. Найти мнимую часть комплексного числа $z = \frac{3-2i}{1-4i} + i^9$.

8. Найти действительную часть комплексного числа $z = \frac{(2-i)^3}{3+4i}$.

9. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $2 \le |z-2-i| \le 3$, $0 \le \operatorname{Im} z < 3$.

10. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $|z| < 2$.

11. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

Контрольные вопросы к практическому занятию:

1. Какое число называется мнимой единицей?
2. Назвать комплексные числа в алгебраической форме?
3. Перечислить действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Назвать геометрический образ комплексного числа?
5. Назвать комплексные числа в тригонометрической форме?
6. Какое значение аргумента называется главным?
7. Назвать действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме?
8. Записать формулу, по которой осуществляется возведение комплексного числа в целую положительную степень.

Практическое занятие №16.
Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени

Определение. Уравнение называется *дифференциальным*, если оно содержит независимую переменную x, неизвестную функцию $y=f(x)$ и ее производные или дифференциалы.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от одной независимой переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если же неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение называют *порядком данного уравнения*.

В общем виде дифференциальные уравнения 1-го порядка записываются в виде:

$F(x,y,y')=0$ или $y'=f(x;y)$.

Определение. *Решением* (или интегралом) *дифференциального уравнения* называется функция $y=f(x)$, если при подстановке ее и ее производных, дифференциальное уравнение обращается в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*.

Определение. График функции $y=f(x)$ являющейся решением дифференциального уравнения, называют *интегральной кривой*.

Основная задача интегрального исчисления заключается в нахождении решения ДУ $y'=f(x)$, т.е. $y=\int f(x)dx+C$.

Решения дифференциального уравнения подразделяются на: 1) общее решение, 2) частное решение.

Определение. *Общим решением* ДУ $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ называется такое решение $y=f(x,C_1,C_2,\ldots C_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_i,\quad i=\overline{1,n}$, каков порядок этого ДУ.

Определение. Если общее решение представлено в виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,\ldots C_n)=0$, то оно называется *общим интегралом* ДУ.

Определение. Всякое решение ДУ, которое получается из общего при определенных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением* этого ДУ.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в дифференциальной форме:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - известные функции. Это уравнение удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами.

<u>Пример.</u> Найти решения ДУ $y'=2x$.

Легко догадаться, что решением данного уравнения является функция $y=x^2$, а также $y=x^2+1$, $y=x^2-\sqrt{3}$ и вообще $y=x^2+c$, где c – const.

<u>Определение.</u> Уравнение вида $P(x)dx+Q(y)dy=0$, где $P(x)$ и $Q(y)$ – данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными*.

Это уравнение можно переписать в виде $P(x)dx=-Q(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием:

$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=c$ - общий интеграл.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $2ydy=3x^2dx$.

Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int 2ydy=\int 3x^2dx,$$

$$y^2=x^3+C,$$

$$y=\sqrt{x^3+C}.$$

<u>Пример.</u> Найти частное решение дифференциального уравнения $dy=(x^2-1)dx$, если $y=4$ при $x=1$.

Интегрируя левую и правую части имеем

$$\int dy=\int (x^2-1)dx,$$

$$y=\frac{x^3}{3}-x+C,$$

$4=\frac{1}{3}-1+C$.

Отсюда $C=\frac{14}{3}$.

Итак, получаем ответ: $y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{14}{3}$.

Определение. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется линейным, если его можно записать в виде $y'+p(x)\cdot y=g(x)$,

где $p(x), g(x)-$ некоторые (непрерывные) функции переменной *x*, в частности – постоянные.

Особенность этих ДУ заключается в том, что искомая функция у и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Существуют два метода решения уравнений вида $y'+p(x)\cdot y=g(x)$ - метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Пример. Решить уравнение $xy'-2y=2x^4$.

*Р*азделим левую и правую части уравнения $xy'-2y=2x^4$ на *x*, получим линейное неоднородное уравнение

$$y'-\frac{2}{x}y=2x^3.$$

Пусть $y=uv$, т.е. $y'=u'v+uv'$, тогда уравнение $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$ примет вид

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=2x^3,\ u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=2x^3.$$

Положим

$$v'-\frac{2}{x}v=0,\ \frac{dv}{dx}=\frac{2}{x}v,\ \frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x}.$$

Найдем какое – либо частное решение этого уравнения, например, при $c=1$

$$\ln|v|=2\ln|x|,$$

$$v=x^2.$$

При $v=x^2$ равенство $u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=2x^3$ обратится в уравнение

$u'x^2=2x^3$,

$\frac{du}{dx}=2x$,

$du=2xdx$,

$\int du=2\int xdx$,

$u=x^2+c$.

Тогда окончательно имеем

$y=uv=(x^2+c)x^2=x^4+cx^2$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'+2xy=2x$.

$y'+2xy=0$, $\frac{dy}{dx}=-2xy$, $\frac{dy}{y}=-2xdx$, $y=c\cdot e^{-x^2}$.

Заменяем *c* на $c(x)$, т.е. решение дифференциального уравнения $y'+2xy=2x$ ищем в виде $y=c(x)\cdot e^{-x^2}$.

Имеем

$y'=c'(x)\cdot e^{-x^2}+c(x)\cdot e^{-x^2}\text{¿}(-2x)$.

Тогда

$c'(x)\cdot e^{-x^2}-2xc(x)\cdot e^{-x^2}+2xc(x)\cdot e^{-x^2}=2x$,

$c'(x)\cdot e^{-x^2}=2x\Rightarrow$ $c(x)=\int 2xdx$,

$c(x)=e^{x^2}+c$.

Поэтому

$y=\left(e^{x^2}+c\right)\cdot e^{-x^2}$ или $y=1+c\cdot e^{-x^2}$ - общее решение уравнения.

Задания к практическому занятию

1. Найти общие решения уравнений

1) $xydx=(1+x^2)dy$

2) $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$

3) $\left(1+y^2\right)dx-\sqrt{x}\,dy=0$

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\dfrac{dy}{x^2}=\dfrac{dx}{y^2}\,;\,y=2\,\text{при}\,x=0$

2) $\left(1+y\right)dx=\left(1-x\right)dy\,;\,y=3\,\text{при}\,x=-2$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие дифференциального уравнения и его порядка.
2. Дайте определение решения обыкновенного дифференциального уравнения.
3. Что называется общим решением дифференциального уравнения y'= f (x, y).
4. Приведите примеры линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.
5. Запишите общий вид уравнения Бернулли.

Практическое занятие №17.
Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение

<u>**Определение.**</u> Уравнение вида $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$, где $P_1(x),\ P_2(x),\ Q_1(y),\ Q_2(y)$ – заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной *x* окажутся в одной части равенства, а переменная *y* - в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Это легко сделать путем почленного деления уравнения на $Q_1(y)P_2(x)\neq 0$. Получаем

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=0,$$

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=c$$ - общий интеграл.

Замечания. 1. При проведении почленного деления дифференциального уравнения на $Q_1(y)P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения*.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$$

и разделим обе части его на $xy\neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0.$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0,$$

$x+\ln|x|+\ln|y|-y=c$, т.е. $\ln|xy|+x-y=c$.

Здесь уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ имеет вид $xy=0$. Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями данного дифференциального уравнения, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x=0$, $y=0$ являются особыми.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4)=1$.

Имеем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$\ln y = \ln c - \ln x$,

т.е. $y = \frac{c}{x}$ - общее решение ДУ, подставив в него $x=4, y=1$, получим

$$1 = \frac{C}{4}, C = 4.$$

Получаем $y = \frac{4}{x}$ - частное решение уравнения $y' = -\frac{y}{x}$.

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка. Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями.

<u>Определение.</u> Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если приумножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т.е.

$$f(\lambda \cdot x . \lambda \cdot y) = \lambda^n f(x, y).$$

<u>Пример.</u> Проверить является ли функция $f(x, y) = x^2 - 2xy$ однородной.

Согласно определения однородной функции имеем:

$$f(\lambda \cdot x . \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (x^2 - 2xy) = \lambda^2 f(x,y).$$

Получили, что данная функция - однородная, второго порядка.

<u>Определение.</u> Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Уравнение $y' = f(x, y)$ может быть представлено в виде

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Например, уравнение $y' = \frac{y}{x} \cos\ln \frac{y}{x}$ - однородное.

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$\frac{y}{x}=u$ или, что то же самое, $y=u\cdot x$.

Однородное дифференциальное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Это дифференциальное уравнение будет однородным, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$- однородные функции одного порядка.

Переписав уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ в виде

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x;y)}{Q(x;y)},$$

и применив в правой части преобразование, рассмотренное выше, получим уравнение $y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'=\frac{x+2y}{x}$.

Так как $\frac{x+2y}{x}=1+2\frac{y}{x}$, то уравнение $y'=\frac{x+2y}{x}$ имеет вид $y'=\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ при $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=1+2\frac{y}{x}$..

Положим $u=\frac{y}{x}$, тогда

$\phi(u)-u=1+2u-u=1+u$ и, согласно $\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$, имеем $\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x}$

$$\ln|1+u|=\ln|x|+C_1 \quad\Rightarrow\quad |1+u|=e^{C_1}|x|$$

или

$1+u=Cx$, где $C=\pm e^{C_1}$.

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим

$$1+\frac{y}{x}=Cx \quad\Rightarrow\quad y=(Cx-1)x.$$

<u>Пример.</u> Найти общий интеграл уравнения $(x^2-y^2)\cdot dx+2xy\cdot dy=0$.

Данное уравнение однородное, т.к. функции $P(x,y)=x^2-y^2$ и $Q(x,y)=2xy$ - однородные функции второго порядка.

Положим $y=u\cdot x$. Тогда $dy=xdu+udx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$(x^2-u^2x^2)\cdot dx+2x\cdot ux\cdot x\cdot du+2x\cdot ux\cdot u\cdot dx=0,$$

$x^2\left(1-u^2+2u^2\right)\cdot dx+2ux^3\cdot du=0$,

$\left(1+u^2\right)\cdot dx+2ux\cdot du=0$.

Последнее уравнение – уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{1+u^2}\cdot du=0.$$

Интегрируем полученное уравнение

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2u}{1+u^2}\cdot du=c,$$

$\ln|x|+\ln\left|1+u^2\right|=c_1$,

$\ln\left|x\cdot\left(1+u^2\right)\right|=c_1$,

$x\cdot\left(1+u^2\right)=e^{c_1}$.

Обозначим $c=e^{c_1},\quad c>0$. Тогда

$x\cdot\left(1+u^2\right)=c$.

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $x^2+y^2=cx$ - общий интеграл уравнения.

Задания к практическому занятию

1. Найти общие решения уравнений

1) $y^2dx+(x-2)dy=0$

2) $x^2dy-(2xy+3y)dx=0$

3) $\sqrt{1-x^2}dy-x\sqrt{1-y^2}dx=0$

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x-1}=\frac{dx}{y-2}$; $y=4$ при $x=0$

2) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$; $y=1$ при $x=1$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Какие уравнекния называются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

3. Приведите примеры дифференциальных уравнений $y' = f(x, y)$, однородных относительно x и y.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017.
http://znanium.com/catalog/product/615108

Дополнительная литература

2. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. - 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.