ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине

"Математика"

для обучающихся специальности

08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

Ставрополь, 2023

Настоящие методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатациязданий и сооружений и программой дисциплины «Математика»

Составитель: Еристова А.А.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД», протокол №7 от «24» мая 2023 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №7 от «25» мая 2023 г.

Содержание

Введение

Изучение математики играет решающую роль в системе профессионального образования, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой. Внедрение новых стандартов среднего профессионального образования обеспечило компетентностный подход и изменило содержание образовательной программы по математике на разных специальностях.

В соответствии с ФГОС средствами дисциплины "Математика" и других дисциплин должны быть сформированы общие и профессиональные компетенции.

При изучении дисциплины реализуются следующие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности;

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях;

ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;

ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 3. Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих.

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 17.Способный выдвигать альтернативные варианты действий с целью выработки новых оптимальных алгоритмов; позиционирующий себя в сети как результативный и привлекательный участник трудовых отношений.

Практическое занятие № 1. Операции над матрицами, вычисление определителей

(реализуется в формате практической подготовки)

Определение. **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов,называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, aj- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение.Если число столбцов матрицы равно числу строк(m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение.Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

Называется **единичной матрицей**.

Определение.Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

<u>Определение.</u>Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они <u>определены только для матриц одинакового размера</u>. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

<u>Определение.</u>Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

C = A + B = B + A.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Операция умножения матриц</u>.

<u>**Определение:**</u>**Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Свойства операции умножения матриц.</u>

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. AB $\neq$ BA даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение AB=BA выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \quad O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$A(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц det (AB) = detA · detB.

Понятие det(определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>Определение</u>.Матрицу B называют**транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u>Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u>Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример.Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители (детерминанты) матрицы.

Определение.Определителем квадратной матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}}, \text{ где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n.}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение.Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки иj-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство2.$\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3.Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение:Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Свойство 9.</u> Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u>.Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найтиdet (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A · det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7 · 18 - 8 · 19 = 126 –
– 152 = -26.

Задания к практическому занятию

1.Вычислить определители:

$а) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; б) \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; в) \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}; г) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; д) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$

2. Решить уравнения:

$а) \begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; б) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0; в) \begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$

$г) \begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$

3. Решить неравенства:

$а) \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; б) \begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0; в) \begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \geq 5; г) \begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14.$

4. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$;

л) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; м) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}$; н) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

5 Даны матрицы $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

6. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times4}\cdot B_{4\times5}=C_{m\times n}$; б) $A_{2\times3}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times6}$; в) $A_{2\times m}\cdot B_{n\times3}=C_{2\times3}$.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$; д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1}; з) B^{-1}.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1}; ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

9. Найти:

а) $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

10. Найти значение многочлена $f(A)$, если:

а) $f(X)=3X^2-4$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(X)=X^2-3X+1$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $f(X)=3X^2-2X+5$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое матрица?
2. Какая матрица называется единичной?
3. Дайте понятие диагональной матрицы.
4. Как определяется сложение и вычитание матриц? В каких случаях возможны эти операции?
5. Опишите алгоритм произвеления матриц.

Практическое занятие № 2. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и Гаусса

(реализуется в формате практической подготовки)

Метод Крамера. (Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\dots a_{1n} \\ a_{21}\dots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример.Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\left| x+3y-6z=12 ¿ \right| 3x+2y+5z=-10 ¿¿¿¿$$; *Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.*

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases}$$

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 13y+7z=14 \\ 7y=0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ y+\frac{7}{13}z=\frac{14}{13} \\ \frac{-49}{13}z=\frac{-98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z=\frac{-98}{13}:\left(\frac{-49}{13}\right)=2$$

$$y=\frac{14}{13}-\frac{7}{13}\cdot 2=0$$

$x=-3+4\cdot 0+2\cdot 2=1$

Таким образом, $x=1\,,y=0\,,z=2$.

Определение. Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Задания к практическому занятию

Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3, \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-3, \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1+x_2-6x_3-x_4=6, \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6, \end{cases}$

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1-5x_2=13, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16, \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7, \\ x_1+4x_2+2x_3=-1, \end{cases}$

3. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1+3x_2+4x_3=3, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-3x_3=5, \\ x_1-3x_2+4x_3=1, \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \end{cases}$

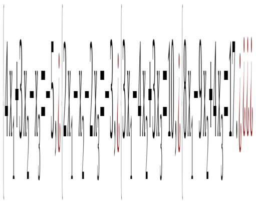
д) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=4, \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-x_2+7x_3=5, \end{cases}$

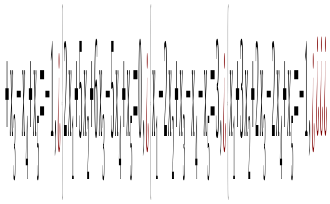
ж) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-3, \\ x_1+2x_2+4x_3=9, \\ 2x_1+7x_2-x_3=0, \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1, \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4, \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1, \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6, \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2, \\ 7x_1-2x_2+x_4=3, \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=7, \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5=3, \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4+3x_5=1, \end{cases}$

оо)

н) 



Вопросы к практическому занятию

1. Что такое система линейных уравнений?
2. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
3. Сколько решений имеет система линейных уравнений?
4. В чем суть метода Крамера?
5. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
6. В каких случаях система уравнений может быть решена и что называется ее решениями?

Практическое занятие № 3. Операции над векторами. Вычисление модуля и скалярного произведения векторов.

(реализуется в формате практической подготовки)

Определение.Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение.Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$$

Определение.Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение.Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение.Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение.Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a};\ |\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4) $\vec{a}+(-1)\vec{a}=\vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a}=\lambda(\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3)=(\lambda\alpha)\vec{e}_1+(\lambda\beta)\vec{e}_2+(\lambda\gamma)\vec{e}_3.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3; \qquad \vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\beta_3\vec{e}_3;$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\vec{e}_2+(\alpha_3+\beta_3)\vec{e}_3.$$

Линейная зависимость векторов.

<u>Определение.</u>Векторы $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$, то векторы называются линейно независимыми.

<u>Свойство 1.</u>Если среди векторов $\vec{a}_i$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

<u>Свойство 2.</u> Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

<u>Свойство 3.</u>Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

<u>Свойство 4.</u> Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

<u>Свойство 5.</u> Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

<u>Свойство 6.</u> Любые 4 вектора линейно зависимы.

<u>Система координат.</u>

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки M. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке M можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение.Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **апликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение.Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}$(1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1)и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\{\alpha - \beta + 2\gamma = 0 ¿ \{2\alpha + 0\cdot\beta + \gamma = 0 ¿¿¿¿$$

линейно независимы.

Тогда $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3+(-2-3)+12=4\neq 0$$

$|\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1=d_1 ¿ |\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2=d_2 ¿¿¿$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3)+(-2-2)+12=-1.$

$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-1/4$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2)-3(-2-3)+2(4-6)=-4+15-4=7;$

$\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=7/4;$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6+(4-6)+18=10;$

$\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=5/2;$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d}$ {-1/4, 7/4, 5/2}.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\mu+\lambda};\quad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\mu+\lambda};\quad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\mu+\lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x=(x_1+x_2)/2;\qquad y=(y_1+y_2)/2;\qquad z=(z_1+z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A,y_A,z_A);\ \vec{b}(x_B,y_B,z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}(x_A+x_B;y_A+y_B;z_A+z_B);\ \ \alpha\cdot\vec{a}=(\alpha x_A;\alpha y_A;\alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение.Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a,y_a,z_a);\ \vec{b}(x_b,y_b,z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\phi=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=10|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2=40-27=13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=4,\ \vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=9,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

<u>Пример.</u>Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=6+8-6=8$:

$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};\quad |\vec{b}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$.

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7};\quad \phi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\hat{\vec{a}\vec{b}}=\pi/3$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2-28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+12|\vec{b}|^2=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+$

$+ 12\cdot36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$,

$\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (3, 4, 5)$, $\vec{b} = (4, 5, -3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17$:

$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}$; $|\vec{b}|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}$.

$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{17}{50}$; $\phi=\arccos\frac{17}{50}$.

Пример. При каком m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a} = (m, 1, 0)$; $\vec{b} = (3, -3, -4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3m-3=0;\ \Rightarrow m=1$.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ и $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\hat{\vec{a}\vec{b}}=\hat{\vec{a}\vec{c}}=\hat{\vec{b}\vec{c}}=\frac{\pi}{3}$.

$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}) =$

10 { $\vec{a}\cdot\vec{a}$+12 { $\vec{a}$¿$\cdot\vec{b}$+14 { $\vec{a}$¿$\cdot\vec{c}$+15 { $\vec{a}$¿$\cdot\vec{b}$+18 { $\vec{b}$¿$\cdot\vec{b}$+21 { $\vec{b}$¿$\cdot\vec{c}$+¿

+20 { $\vec{c}\cdot\vec{a}$+24 { $\vec{b}$¿$\cdot\vec{c}$+28 { $\vec{c}$¿$\cdot\vec{c}$=10¿

Задание к практическому занятию

Задание 1: Коллинеарны ли векторы c_1 и c_2, разложенные по векторам a и b ?

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы a и b ?

Задание 3: Компланарны ли векторы a, b, c ?

Задание 4: При каком значении α векторы AB и AC перпендикулярны?

$a = \{1; +2; 3\}, b = \{-3; 0; -1\}, c_1 = 2a - 4b, c_2 = 3a + b.$

$a = \{-2; 3; +1\}, b = \{1; +1; -3\}, c = \{1; -9; 1\}.$

$a = \{1; 3; -1\}, b = \{3; -2; 3\}.$

Задание 5: Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB ;

3) площадь грани ABC ;

A) $A(\alpha; -2; 3), B(0; -1; 2), C(3; -4; 5).$

B) $A(-1; 2; 1), B(-1; 3; -4), C(0; 1; -2).$

C) $A(1; -1; 1), B(-1; 2; -4), C(2; 0; -6), D(-2; 5; 1).$

Вопросы к практическому занятию

1.Что такое вектор?

2. В чем отличие вектора от скалярной величины?

3. Как найти проекции вектор на координатные оси?

4. Как найти длину вектора?

5. Как найти скалярное произведение?

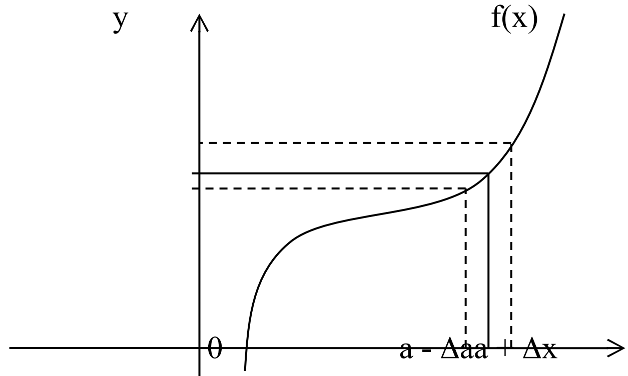
6. Как определить перпендикулярность и параллельность векторов в пространстве?

7. Какие векторы назвывают коллинеарными?

Практическое занятие № 4. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенности

(реализуется в формате практической подготовки)

<u>Предел функции в точке.</u>



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

<u>Определение.</u> Число A называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

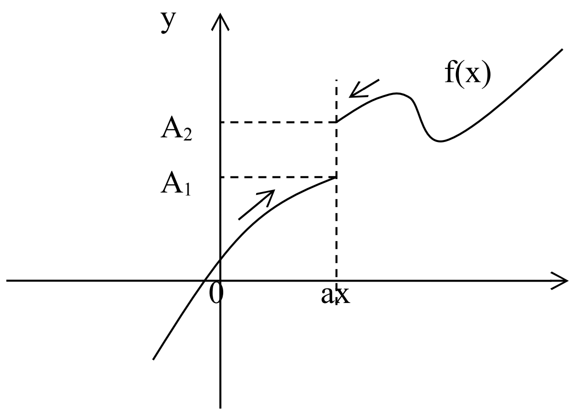
верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что А – **конечный предел** функции f(x).

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

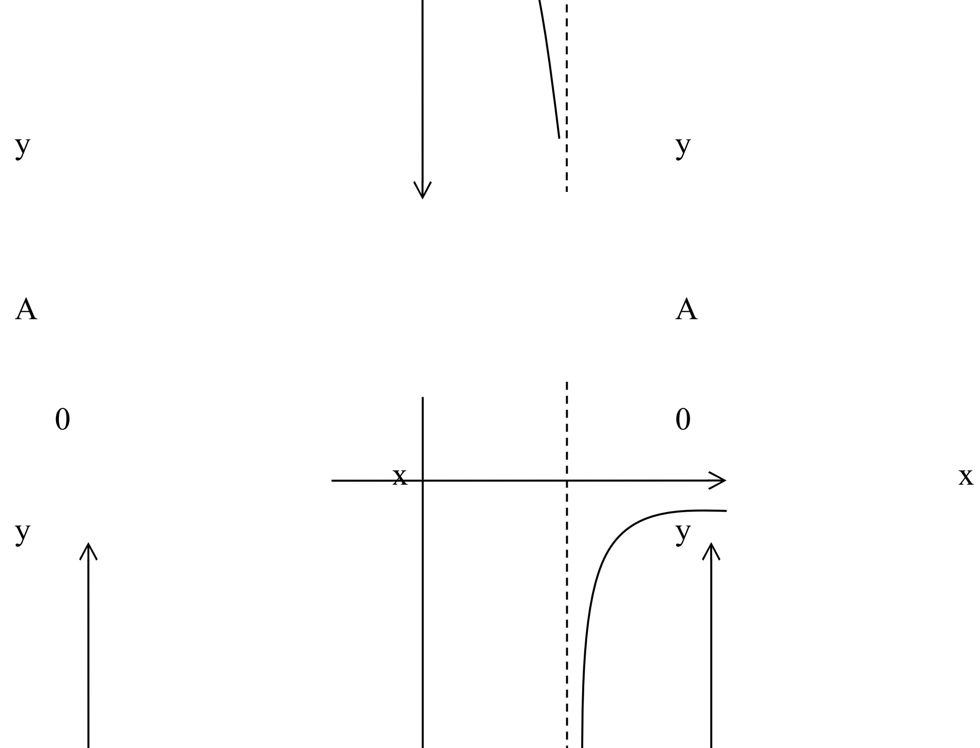
Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$ выполняется неравенство

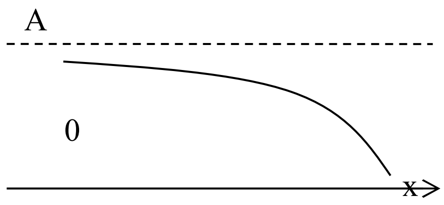
$$|A-f(x)|<\varepsilon$$

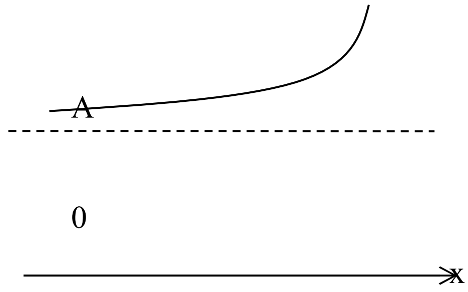
При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

Графически можно представить:







Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ для любого x>Mи

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема1. $\lim\limits_{x\to a} C=C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.

Теорема2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела приf(x) < 0, f(x) $\geq$ 0, f(x) $\leq$ 0.

Теорема 6. *Если g(x) $\leq$f(x) $\leq$u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a}=A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|$<Mвблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x\to a$, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|\text{, т.е.}$$

$$|f(x)| < M\text{, где } M = \varepsilon + |A|$$

Некоторые замечательные пределы.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого:
$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = ¿\left|0,\ при\ n<m¿\ \left|\frac{a_0}{b_0},\ при\ n=m¿¿¿¿\right.\right.}$$

Первый замечательный предел. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1}$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x \to 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{tgx - tgx_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0)\cos x \cos x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} ¿ \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = ¿ \left| y = \pi/2 - x ¿ \right| \left| x = \pi/2 - y ¿ \right| ¿ \{\} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = ¿ \left| y = x - 1 ¿ \right| \left| x \to \infty ¿ \right| ¿ \{\} = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^{y} \cdot \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^{4} =$$

$$¿ \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{z} \right)^{4} = e^4$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 – 6x + 8 = 0$; $x^2 – 8x + 12 = 0$;

$D = 36 – 32 = 4$; $D = 64 – 48 = 16$;

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4$; $x_1 = (8 + 4)/2 = 6$;

$x_2 = (6 – 2)/2 = 2$; $x_2 = (8 – 4)/2 = 2$;

Тогда $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Пример.Найти предел.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженноевыражение: $\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}$ =

$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left|x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right|=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример.Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 – 3x + 2 = (x – 1)(x – 2)$$

$x^3 – 6x^2 + 11x – 6 = (x – 1)(x – 2)(x – 3)$, т.к.

$x^3 – 6x^2 + 11x – 6$ x - 1

$x^3 – x^2 x^2 – 5x + 6$

$- 5x^2 + 11x$

$- 5x^2 + 5x$

6x - 6

6x - 6

0

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2}=$$

$$¿2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы -∞ и +∞.

Задания к практическому занятию

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\dfrac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\left(\frac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x\,tg\,2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^3-5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,tg\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{x-x^2}{1-2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x^2-4x})$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое предел функции?
2. Какая функция называется ограниченной?
3. Перечислите основные свойства пределов.
4. Как найти предел простейших функций?
5. Как ликвидировать неопределенность ∞/∞ при нахождении предела?
6. Как ликвидировать неопределенность 0/0 при нахождении предела?

Практическое занятие №5. Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

(реализуется в формате практической подготовки)

Непрерывность функции в точке.

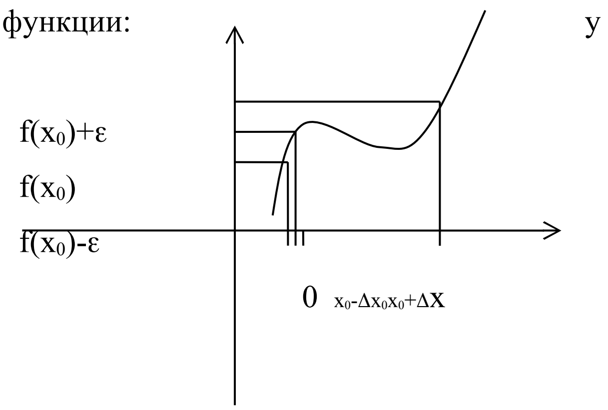
Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

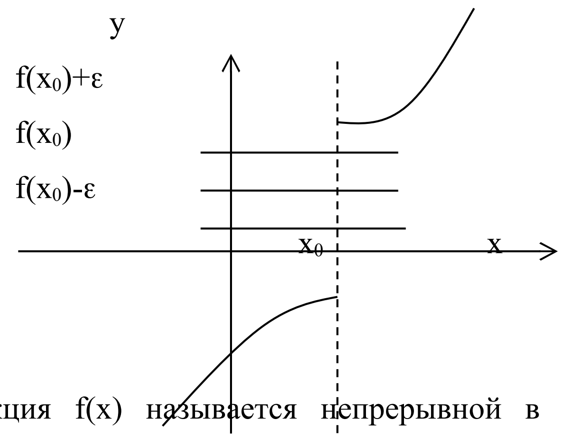
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения. 2) Рациональная функция $f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sinи cosнепрерывны на своей области определения.
Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, или после преобразования:

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx→0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к. предел функции синус $\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx→0.

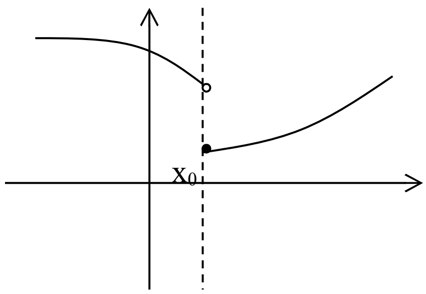
Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения x = x_0 из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Точки разрыва и их классификация.

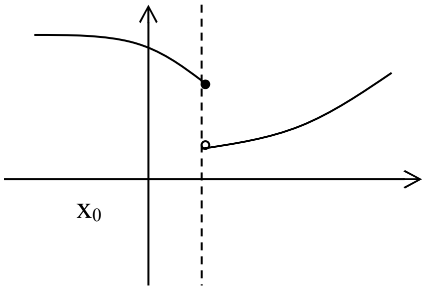
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что x = x_0 является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке x = x_0, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

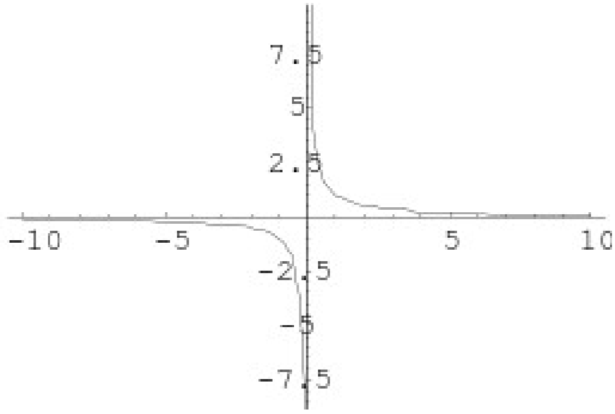
<u>Пример.</u>Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = ¿ \{ 1,\ x - \text{рациональное число} ¿¿¿¿$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u>Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке x_0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = -\infty.$$

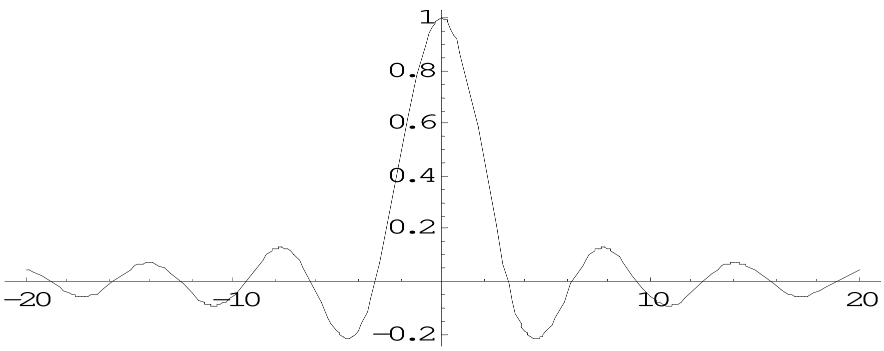


Пример. f(x) = $\dfrac{\sin x}{x}$

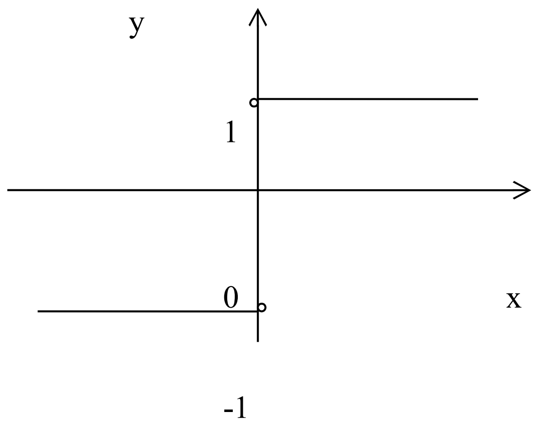
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x)=¿\left\{\frac{\sin x}{x},\ при\ \ x\neq 0¿¿¿¿\right.$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\dfrac{x}{|x|}=\left\{1,\ при\ \ x>0¿¿¿¿\right.$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение.Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \leq f(x) \leq M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

<u>Свойство 2:</u>Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что$f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

<u>Свойство 3:</u> (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

<u>Свойство 4:</u>Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

<u>Свойство 5:</u> (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

Т.е. если$\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то$\exists x_0$: $f(x_0) = 0$.

<u>Определение.</u>Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

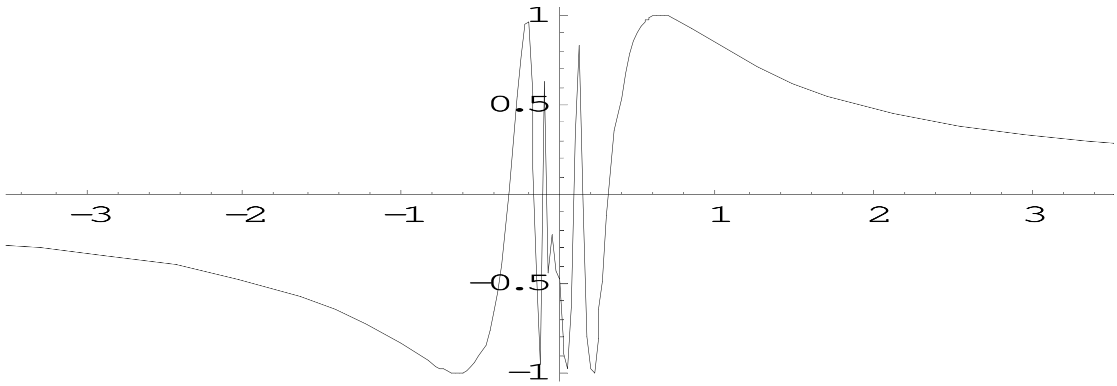
верно неравенство $$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x.

<u>Свойство 6:</u> Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

<u>Пример.</u> $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, а), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число Δ>0 такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

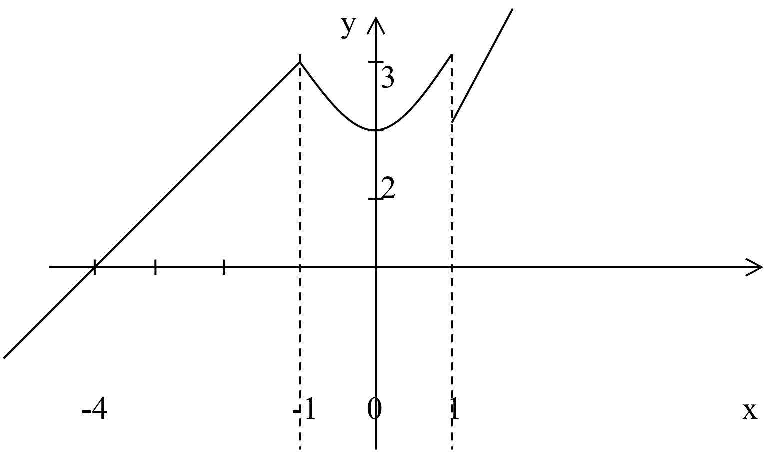
<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

<u>Пример.</u>Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\{x+4,\ x<-1;\ x^2+2,\ -1\le x\le 1$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=3 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=3 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=2$$

в точке x = -1 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

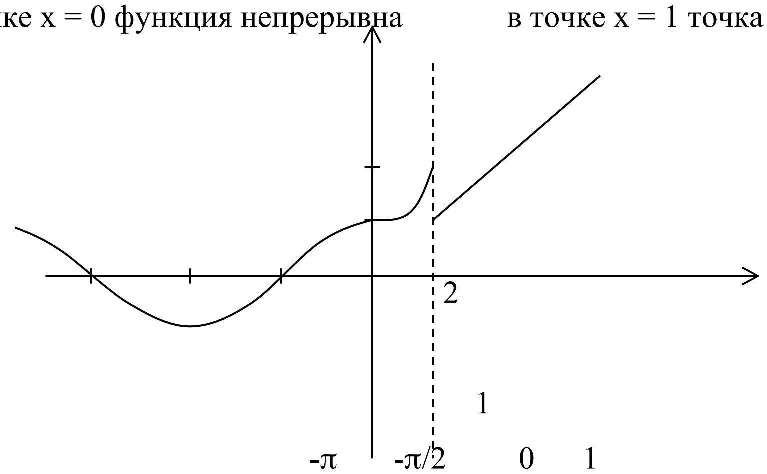


<u>Пример.</u>Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Задания к практическому занятию

Задание№1: Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\end{cases}$$

2. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, & x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3\end{cases}$$

3. $$y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$$

4. $$y=\begin{cases}-\dfrac{2|x|}{x}, & x<0\\ \sqrt{4-x^2}, & 0\le x\le 2,\end{cases}$$

5. $y=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, & x<0,\\ \sqrt{9-x^2}, & 0\le x\le 3,\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, & x<-3,\\ -\sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 3,\end{cases}$

8. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, & x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 0,\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, & x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\end{cases}$

10. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, & x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, & -3\le x\le 0,\end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение непрерывной функции.
2. Дайте определение точки разрыва.
3. Перечислите виды точек разрыва.
4. Дайте определение одностороннего предела.

Практическое занятие №6. Вычисление производных сложных функций.

(реализуется в формате практической подготовки)

<u>Теорема.</u>*Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $\boxed{y'=f'(u)\cdot u'}$

<u>Доказательство.</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ Теорема доказана.

<u>Логарифмическое дифференцирование.</u>

Рассмотрим функцию $y=\ln|x|=¿\{\ln x,\ при\ \ x>0¿¿¿¿$.

Тогда $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)'=\frac{1}{x};\ \ (\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{x}=\frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется**логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x)=(\ln|f(x)|)'\cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$\boxed{\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u}$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x; \quad v = x \cos x;$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x \sin x;$

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + \left(x^2 + 3x\right)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln\left(x^2 + 3x\right)$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y)\, y'$$

т.к. g´(y) ≠ 0 $y' = \frac{1}{g'(y)}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctgявляется функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = tgx; \quad x = arctgy;$$

Известно, что $y' = (tgx\{)' = \frac{1}{\cos^2 x};¿$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \quad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy\{)' = \frac{1}{1+y^2};¿$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных

$y = \sin(x^2+3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2+3$;

$y' = (\sin u)_u' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2+3) \cdot 2x$.

$y = (x^2+e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

$y=u^{10}$, где $u=x^2+e^x$;

$y'=10u^9\cdot\left(x^2+e^x\right)'=10\left(x^2+e^x\right)^9\cdot\left(2x+e^x\right)$.

$y=x^2\cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$y'=\left(x^2\right)'e^{\sin x}+x^2\left(e^{\sin x}\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\left(\sin x\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\cos x$.

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2+2x^2y-x^2=0$.

Решение:

Функция $y=y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по *x*, полагая, что *y* есть функция от *x* и обозначая производную *y*через y':

$2yy'+4x\cdot y+2x^2y'-2x=0$.

Выразим из полученного равенства y':

$\left(2y+2x^2\right)y'=2x-4xy$;

$$y'=\frac{2x-4xy}{2y+2x^2}.$$

б) $\cos y=4y^2+e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$-\sin y\cdot y'=8yy'+e^x$;

$\left(-\sin y-8y\right)y'=e^x$;

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y}.$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используемформулу $y' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2+3)'} = \frac{-\sin t}{2t}$$

Задание к практическому занятию

$y = e^{-x}$

$y = \sqrt{e^x}$

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$

$y = e^{(3x+5)^2}$

$y = a^{3x}$

$y = a^x e^x$

$y = \lg(2x)$

$y = \ln 3x$

$y = \log_3(4x - 2)$

$y = \ln(x^3)$

1) $y = (\ln x)^3$

$y = 5(2x^2 - 3x + 4)^8$

$y = 4\sqrt{1 + 3x^3 - 2x^5}$

$y = \sqrt[3]{(2 - x)(5 - 2x)}$

$y = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

$y = \sqrt{\dfrac{4}{2x^2 + 5}}$

$y = 3\sin(3x - 1)$

$y = \arcsin\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg\,3x}$

$y = \ln\sin x$

$y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение производной функции.
2. Какую функцию называют сложной?
3. Перечислите правила нахождения производной сложной функции.
4. Какую функцию называю обратной?
5. Как находят производные к обратным функциям?

Практическое занятие № 7. Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталля

(реализуется в формате практической подготовки)

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \ldots$
$\ldots + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

Дифференциал функции.Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

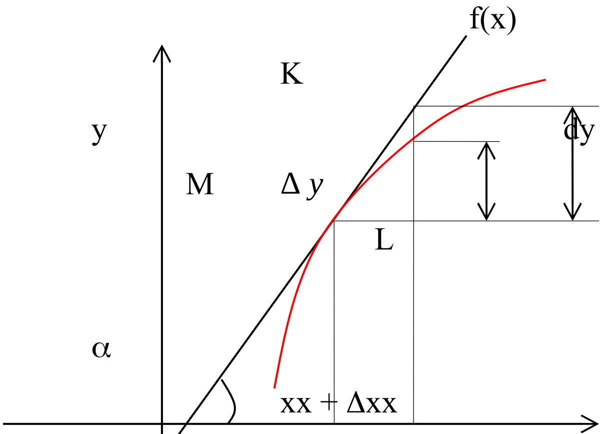
Определение.Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dyили df(x).

Из определения следует, что dy = f′(x)Δxили

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$и $v = g(x)$-функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.
Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$,т.е. y - сложная функция.

Тогда $$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x,\text{ но}$$

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\,2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{\left(2xe^{x^2} + x^2\,2xe^{x^2}\right)\left(x^2+1\right) - (2x)x^2e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}\left(x^4+1+x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

¿ $\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y'=\frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2}=\frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2}=\frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2}=$$

$$¿\frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2}=\frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y=x^2e^{x^2}\ln x$

$$y'=\left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x+x^2e^{x^2}\frac{1}{x}=\left(2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}2x\right)\ln x+xe^{x^2}=2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x+xe^{x^2}=$$

$$=xe^{x^2}(1+2\ln x+2x^2\ln x)$$

Задание к практическому занятию

Найти производные от указанных функций:

1. а) $y=x^5+\ln(x^2+8x-1)$; б) $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}x+3}$

2. а) $y=\sin 3x\cdot\cos 5x$; б) $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x-\cos x}$

3. а) $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$; б) $y=\frac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$

4. а) $y=x^2+\arcsin\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

5. а) $y=(2x+e^{-x^2})^2$; б) $y=\ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$

6. а) $y=\operatorname{tg}^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\frac{x+1}{x^2-\ln x}$

7. а) $y=(e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$; б) $y=\operatorname{ctg}\frac{\ln x+1}{2-\ln x}$

8. а) $y=x^2\cdot 10^{-x+2}$; б) $y=\frac{e^x+1}{\cos x}$

9. а) $y = \sin^2 2x \cdot \cos\frac{x}{2}$; б) $y = \ln\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

10. а) $y = \operatorname{arctg} x^2 - \ln\sin x$; б) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$

11. а) $y = x^4 + e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y = \frac{\cos x + 2x}{\sqrt{x}}$

12. а) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое дифференциал функции?
2. Каков смысл дифференциала?
3. Что такое производная высшего порядка?
4. Что такое дифференциал высшего порядка?
5. Каково правило нахождения дифференциала высшего порядка?
6. Каково правило нахождения производной высшего порядка?

Практическое занятие № 8. Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле.

(реализуется в формате практической подготовки)

<u>Определение:</u>Функция F(x) называется **первообразной функцией** функцииf(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

<u>Неопределенный интеграл.</u>

<u>Определение:</u>Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

<u>Свойства:</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

<u>Пример:</u> $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	$-\ln\mid\cos x\mid+C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	$\ln\mid\sin x\mid+ C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln \left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq-1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert+C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

<u>Непосредственное интегрирование.</u>

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x+C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))'=-\frac{1}{x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dtполучается:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt*.

$$\int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$.

Замена $t = x^2+1;\ \ dt = 2xdx;\ \ dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где uиv – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \text{¿}\left| u = x^2;\ \ dv = \sin x dx; \text{¿}\right| \text{¿}\{\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \text{¿}\left| u = x;\ \ dv = \cos x dx; \text{¿}\right| \text{¿}\{\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \text{¿}\left| u = e^{2x};\ \ du = 2e^{2x}dx; \text{¿}\right| \text{¿}\{\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$= \text{¿}\left| u = e^{2x};\ \ du = 2e^{2x}dx; \text{¿}\right| \text{¿}\{\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$

$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \left|2x+1 = t;\ \ dt = 2dx;\right| = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t;\ \ dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$=-2\sin^{-1/2}x+C=-\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x^2e^{5x}dx=\left\{u=x^2;\ dv=e^{5x}dx;\right\}=\frac{1}{5}e^{5x}x^2-\int\frac{1}{5}e^{5x}2xdx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx=\left\{u=x;\ dv=e^{5x}dx;\right\}=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right]=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125}=\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\left|dx=d(x+1)\right|=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\left|x+1=t\right|=$$
$$=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left(u=\ln x;\ dv=\frac{1}{x^3}dx;\right)\{\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x\ln x\,dx=\left|u=\ln x;\ \ dv=xdx;\right|\{\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$
$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx=\left| t=e^{\cos^2 x};\ \ dt=-e^{\cos^2 x}¿2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right|=-\int dt=-t+C=$$
$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\ \ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\,arctgt+C=2\,arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Задание к практическому занятию

Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$
2. а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int(x+3)e^{2x}dx$
3. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$
4. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$
5. а) $\int\frac{dx}{(1+x^2)^5}$; б) $\int(x+5)e^{2x}dx$
6. а) $\int\sqrt{1-5x}\,dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$
7. а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int xarctgxdx$
8. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$
9. а) $\int\sqrt{1-2x}\,dx$; б) $\int(1-x)\sin 3xdx$
10. а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$
11. а) $\int\frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int(1-x)\cos 4xdx$
12. а) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int\ln x(2x+5)dx$

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.

2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.
3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.
4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.
5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.
6. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.
7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.
8. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.
9. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3}dx$.

$\int \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования заменой переменных.
5. Сформулируйте правило интегрирования по частям.

Практическое занятие № 9. Вычисление определенных интегралов.

(реализуется в формате практической подготовки)

Задания к практическому занятию

1. С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ 2. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^4}$. 3. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$. 4. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^5+1}$. 5. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) dx}{\sin^5(x)}$ 7. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$ 8. $\int_0^1 (e^x+4)^2 e^x dx$ 9. $\int_0^1 e^{2x+1} d$ 10. $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x) dx$

2. С помощью формулы интегрирования по частям вычислить интегралы

1. $\int_0^1 xe^{-x} dx$. 2. $\int_0^{\pi/2} x\cos(x) dx$ 3. $\int_1^e \ln(x) dx$. 4. $\ln(x+1) dx$. 5. $e^x\cos(x) dx$.

6. $\int_0^{\pi} e^x \sin(x) dx$. 7. $\int_4^3 x\sin^{-2}(x) dx$. 8. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} x\cos^{-2}(x) dx$. 9. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$. 10. $\int_0^1 \frac{e^x}{x} dx$.

3.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$.
2. $y^2=2px$, $x=h$.
3. $y=\ln(x)$, $x=c$, $y=0$.
4. $y=x^2$, $y=2-x^2$.
5. $y=x^2$, $y=1$.
6. $y=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.
7. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
8. $y=\sin(x)$, $y=x^2-\pi x$.
9. $x^2-y^2=1$, $x=2$.
10. $y=x^2$, $y=x^{1/2}$.

4.Найти длину дуги кривой

1. $y = x^{3/2}$ от x=0 до x=4.
2. $y = x^2 - 1$, отсеченный осью Ox.
3. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln(x)$ от x=1 до x=e.
4. $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ от x=-1 до x=2.
5. $y = x^2$ от x=0 до x=2.
6. $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \pi/2$.
7. $\rho = 2(1 - \cos\phi)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
8. $y = e^x + e^{-x}$ от x=0 до x=1.
9. $y = \sin x$, y=0, $0 \le x \le \pi$.
10. $x^2 + y^2 = 16$.

Вопросы к практическому занятию

1.Что такое определенный интеграл?

2.Что является результатом при вычислении определенного интеграла?

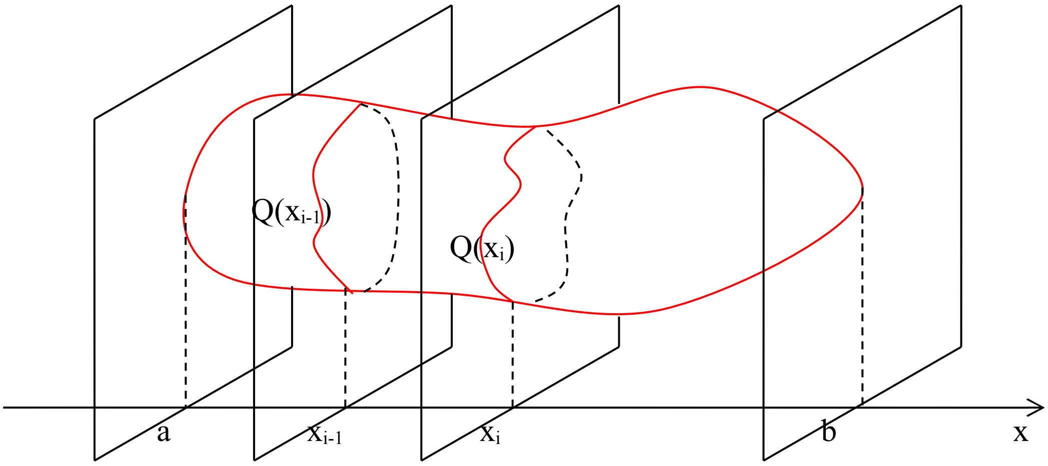
3.Приведите формулу Ньютона-Лейбница?

4.Как можно приближенно вычислить определенный интеграл?

5. Дайте определение интегала при помощи понятия интегральной суммы.

Практическое занятие № 10. Приложение определённого интеграла. Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_iразбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_iи m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$и $m_i\Delta x_i$здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

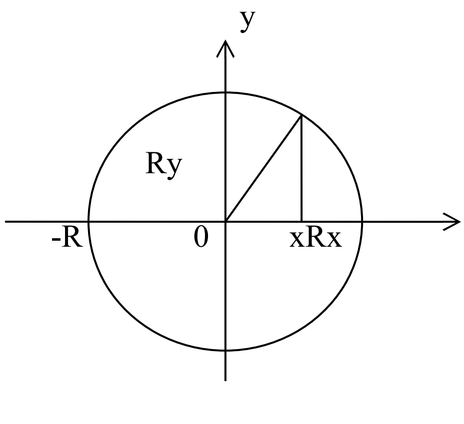
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример:Найти объем шара радиуса R.



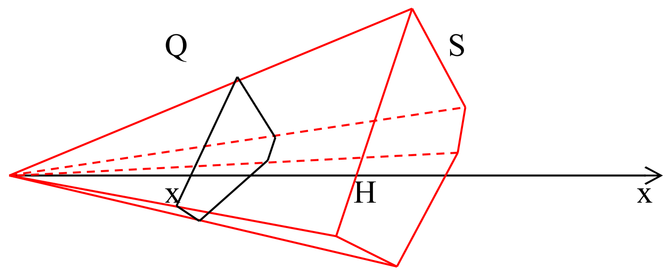
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса у. В зависимости от текущей координаты х этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2-x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2-x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\pi\left(-R^3+\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пример:Найти объем произвольной пирамиды с высотой Н и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению х/Н, где х – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

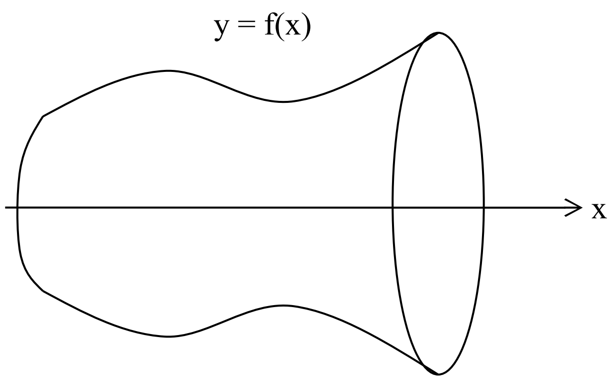
$$\frac{Q}{S}=\left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x)=\frac{S}{H^2}x^2.$

Находим объем пирамиды: $V=\int_0^H\frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH$

Объем тел вращения.

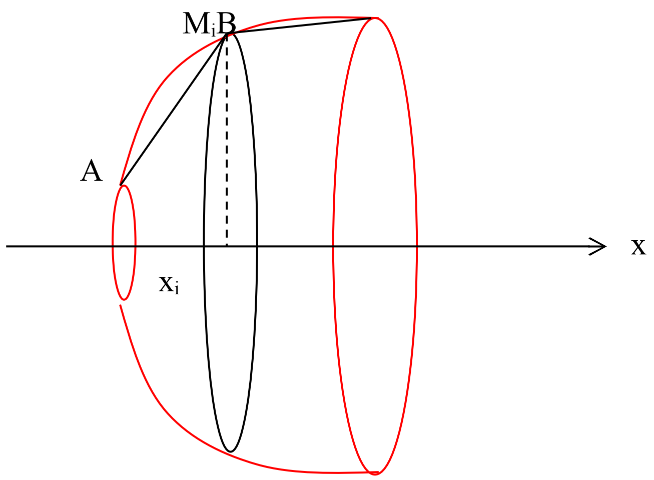
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями а и b вращать вокруг оси Ох, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R=|f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение:Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу АВ на nчастей точками M_0, M_1, M_2, … ,M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_iиy_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$

Применяем теорему Лагранжа (см. Теорема Лагранжа.) к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f(\varepsilon_i),\quad x_{i-1}<\varepsilon<x_i$

Тогда $\Delta S_i=\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\Delta x_i$

$\Delta P_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'(\varepsilon_i)}\Delta x_i$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)}\, \Delta x_i$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)}\, \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'(\varepsilon_i)}\, \Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$ - формула вычисления площади поверхности тела вращения.

Задание к практическому занятию

.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox линии заданной уравнением, и ограниченного плоскостями перпендикулярными оси OX

1. $y = 4x - x^2$, y=x.
2. $x^2 + y^2 = 9$.
3. $y^2 = 2x$, x=1.
4. $y = x^2$, $y^2 = x$.
5. $y^2 = 8x$, 1≤x≤2.
6. $x^2 - y^2 = 9$, x-2y+6=0.
7. $y = 4 - x^2$, y=0, x=0, где x≥0.
8. $y = x^2 + 1$, y=0,x=1,x=2.
9. $y = x^3$, y=1, x=0.
10. $y = \cos(2x)$, y=0, x=0, где 0≤x≤π/4.

Вопросы к практическому занятию

1. Что понимается под геометрическим приложением определенного интеграла?
2. Сформулируйте правило нахождения площадей приближенным методом и с применением определенного интеграла.
3. Сформулируйте правило нахождения объема тел приближенным методом и с применением определенного интеграла.
4. Сформулируйте правило нахождения площадей тел вращения с применением определенного интеграла.

Практическое занятие № 11.

Основные понятия теории вероятностей

Определение 1. Комплекс условий - всё то, что сопровождает данное событие.

Определение 2. Событие - всё то, что может произойти или не произойти при данном испытании.

Определение 3. Событие - достоверно, если оно обязательно произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 4. Событие - невозможно, если оно никогда не произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 5. Событие - случайное, если оно может произойти или не произойти при данном комплексе условий.

Определение 6. События $A1, A2, .. An$ - совместные, если появление одного из событий при одиночном испытании не исключает появление других событий.

Определение 7. Два события - независимые, если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого.

Определение 8. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Определение 9. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение 10. Разностью двух событий A и B называется событие, которое состоится, если событие A произойдёт, а событие B не произойдёт.

Определение 11. (классическое) Вероятность события равна отношению числа исходов, благоприятных появлению данного события, к общему числу всех равновозможных исходов, т.е.

P(A) = m\n.

Задания для практического занятия

1. Из кубиков составлено слово «КНИГА». Ребёнок, не умеющий читать, смешал все кубики. Какова вероятность того, что он повторно сложит исходное слово.

2. В урне 5 синих, 6 красных, 10 зеленых и 15 желтых шаров. Один шар взяли. Найти вероятность того, что этот шар будет синий или желтый.

3. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекается 1 деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

4. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

5. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета.

6. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Вопросы к практическому занятию

1. Что называют опытом или испытанием?

2. Что называют событием?

3. Какое событие называют достоверным в данном испытании?

4. Какое событие называют невозможным в данном испытании?

5. Какое событие называют случайным в данном испытании?

6. Какие события называют совместными?

7. Что называется суммой, разностью, произведением событий?

8. Сформулировать и записать классическое определение вероятности.

9. Свойства вероятности.

10.Сформулировать и записать геометрическое определение вероятности.

Практическое занятие № 12.

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 1:(правило «+» вер.): Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий,

т.е. $P(A+B+C+...+N) = P(A)+P(B)+\ldots+P(N)$.

Следствие: Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB)$.

Определение 1. Условная вероятность события B при условии события A - отношение вероятности совместного появления событий A и B к вероятности события A, т.е.

$P_A(B) = P(AB)/P(A)$.

Теорема 3(правило «*»вер.): Вероятность произведения 2 зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что 1 событие произошло

$P(AB) = P(A)P(B/A)$, $P(AB) = P(B)P(A/B)$.

Теорема 4: Вероятность произведения 2 независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$P(AB) = P(A)P(B)$.

Теорема справедлива для любого числа n независимых событий.

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Пусть событие *A* появляется с одним из событий *B1, B2,....Bn*, причём

P(*B1*+ *B2*+....+*Bn*) = P(*B1*)+P(*B2*)+....+ P(*Bn*).

Тогда P(*A*) = P(*AB1*+ *AB2*+.. ..+*ABn*) = P(*AB1*)+P(*AB2*)+....+ P(*ABn*) =

P(*B1*)P(*A**B1*)+P(*B2*)P(*A**B2*)+....+ P(*Bn*)P(*A**Bn*). Т.о.,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) * P(A \setminus B_k)$$

\- *формула полной вероятности,*

где *Bk* - гипотезы.

С помощью формулы Байеса можно определить, каким образом распределились гипотезы.

$$P(B_k \setminus A) = \frac{P(B_k) * P(A \setminus B_k)}{P(A)}$$

\- *формула Байеса.*

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти некоторое событие A. Испытание повторяется n раз. При этом выполняются следующие условия:

1. Вероятность наступления события P(*A*) = *p* в каждом испытании одна и та же.
2. Результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Такая последовательность испытаний называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*.

Теорема 5. Если вероятность *p* наступления события *A* в каждом испытании постоянна, то вероятность P(*m,n*) того, что событие *A* наступит *m* раз в *n* независимых испытаниях, равна

$$P(m,n) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

, где $q = 1-p$ – формула Бернулли.

Отметим, что при большом числе испытаний формулу Бернулли применять достаточно сложно. В этих случаях применяются т.н. асимптотические формулы, самой простой из которых является формула Пуассона.

Теорема 6. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причём произведение np стремиться к постоянному числу λ, то вероятность Р(m,n) того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет равенству:

$$P(m,n) \approx Pm(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$ - формула Пуассона.

Локальная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность Р(m,n) того, что событие A произойдёт m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, равна:

$$P(m,n) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции $\varphi(x)$

Если в задаче требуется найти вероятность, принадлежащую некоторому интервалу, то используется следующая теорема.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n равна:

$$Pn(a \le m \le b) = \frac{1}{2}(\Phi(x2) - \Phi(x1)),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ и $x1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}$, $x2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции *Ф (x)*

Задания для практического занятия

1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение: Пусть *А* - выпало четное число очков; *Вк* - выпало *k* очков *(k* = 1,2,3,4,5,6). Событие *А* означает, что наступило хотя бы одно из событий: *В2, В4, В6,* т.е. *А = В2 + В4 + В6.* Поскольку события *В2, В4, В6* несовместны, то

Р(Вк) = 1/6 *(k* = 1,2, 3, 4, 5, 6).

Р(А) = Р(В2)+ Р(В4)+ Р(В6) =1/6+1/6+1/6 =3/6=1/2.

Замечание: Тот же результат получается и непосредственно по формуле

P(A)=m/n=3/6=1/2.

2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

3. 2 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,7, второго -0,8. Найти вероятность поражения цели.

4. 3 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,8, второго - 0,7, третьего - 0,9. Найти вероятность того, что в мишени три пробоины.

5. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

6. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок в течении часа потребует внимания рабочего равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станке независимы, найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего:

а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере один станок.

7. Пусть имеется три урны с шарами: 1- 5 белых, 3 красных; 2 - 3 белых, 5 красных; 3 - 4 белых, 4 красных. Из одной урны наугад вытащили 1 шар. Найти вероятность того, что он белый.

8.В некоторой местности на каждых 100 семей приходится 80 автомобилей. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют автомобили.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух событий.

2. Как определяется независимость двух событий?

3. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

4. Сформулируйте теорему о вероятности произведения n событий?

5. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?

6. Записать формулу полной вероятности, формулу Байеса.

7. Записать и пояснить формулу Пуассона. В каких случаях она применима?

8. Сформулировать и записать локальную теорему Муавра-Лапласа.

9. Сформулировать и записать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1235904

Дополнительная литература

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.-