ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по общеобразовательной учебной дисциплине

«Математика»

для обучающихся по специальности

54.02.01 Дизайн (в промышленности)

Ставрополь,2022

Методические указания составлены в соответствии с ФГОС СОО и примерной рабочей программой общеобразовательной учебной дисциплины "Математика" для гуманитарного профиля обучения для профессиональных образовательных организаций от 2022 г

Рассмотрено на заседании методического объединения общеобразовательного цикла, протокол №5 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26 » мая 2022 г.

Составитель: Т.И. Дмитриенко, канд. пед. наук

Введение

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Математика» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины ориентирована на достижение следующих целей:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь обучающимся осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

Освоение содержания учебной дисциплины обеспечивает на каждом практическом занятии достижение обучающимися следующих результатов:

Личностных:

ЛР 09. Готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Метапредметных:

МР 02. Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты.

МР 03. Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

Предметных:

ПРб 01. сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке.

ПРб 03. владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

Проведение практических занятий способствует формированию **общих компетенций:**

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:
ЛР 3. Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих.
ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».
ЛР 13. Выбирающий оптимальные способы решения профессиональных задач на основе уважения к заказчику, понимания его потребностей.

Содержание

Практическое занятие 1

Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений, сравнение числовых выражений

Теоретическая часть

Умение выполнять алгебраические преобразования является важнейшим элементом математической подготовки. В экзаменационных заданиях и тестах всегда присутствуют задачи на упрощения, преобразования и вычисления.

Преобразования алгебраических выражений строятся на использовании формул сокращенного умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ - *квадрат* $\frac{\text{суммы}}{\text{разности}}$;
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm$ [illegible] $\frac{\text{суммы}}{\text{разности}}$;
3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – *р*[illegible]*вадратов;*
4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ - *разность кубов;*
5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ - *сумма кубов;*

правил действия со степенями ($a > 0$, $b > 0$, *x и y – действительные числа)*:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$;	5. $(ab)^x = a^x b^x$;
2. $a^{x-y} = a^x / a^y$;	6. $(a/b)^x = a^x / b^x$;
3. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$;	7. $a^1 = a$;
4. $a^{-x} = 1/a^x$;	8. $a^o = 1$;

и свойств арифметических корней ($a \geq 0$, $b \geq 0$, *k, m, n – натуральные числа)*:

1. $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$;	5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
2. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;	6. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$;
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;	7. $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$;

$$4.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\qquad\qquad 8.\ \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|.$$

Кроме того, следует помнить о существовании в математике множеств натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел, которые образуют множество действительных чисел.

N – натуральные числа. Множество натуральных чисел состоит из единицы, простых и составных чисел. Натуральное число, большее единицы, называется простым, если оно не имеет делителей, кроме единицы и самого себя. Если же число имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя, то оно называется составным.

Наибольшим общим делителем (НОД) нескольких натуральных чисел называют наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел. Для отыскания НОД нескольких натуральных чисел необходимо разложить их на простые множители, а затем составить произведение всех простых множителей, общих для данных чисел.

Наименьшим общим кратным (НОК) нескольких натуральных чисел называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Для отыскания НОК нескольких натуральных чисел необходимо разложить их на простые множители, выписать все множители одного из чисел, дописать все недостающие множители из других чисел и все их перемножить.

Z – целые числа. Если к натуральным числам добавить им противоположные по знаку и ноль, то получится множество целых чисел.

Q – рациональные числа. Если к целым числам добавить дроби, то получится множество рациональных чисел. Рациональные числа представимы в виде дроби , где p – целое число, а q – натуральное число. Рациональные числа – это числа, которые можно представить в виде бесконечных периодических дробей.

Если период начинается сразу после запятой, то такая дробь называется чистой периодической дробью. Например, 3,(06). Если же период начинается не сразу после запятой, то дробь называется смешанной периодической. Например, 0,3(1).

Каждую периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби. В случае чистой периодической дроби к целой части прибавить обыкновенную дробь, в числителе которой записывают период, а в знаменателе – цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например: $3,(06)=3+\frac{6}{99}=3+\frac{2}{33}=3\frac{2}{33}$.

В случае смешанной периодической дроби предварительно переносят за-пятую к началу периодической части, затем обращают полученную чистую периодическую дробь в обыкновенную и делят последнюю на 10k, где k – число разрядов, на которые перенесена запятая вправо.

Например: $0,3(1)=\frac{1}{10}\cdot 3,(1)=\frac{1}{10}\cdot 3\frac{1}{9}=\frac{3}{10}+\frac{1}{90}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$.

Иррациональные числа – бесконечные непериодические десятичные дроби. Например: $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,e,\log_3 2$ …

Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных чисел R.

Число a называется приближенным значением числа x, вычисленным с точностью до $h>0$, если выполняется неравенство $|x-a|<h$.

Разность $|x-a|$ называют ***погрешностью (абсолютной)***, а h – оценкой погрешности приближенного вычисления.

Относительная погрешность – это отношение погрешности к приближенному значению, т.е. число $r=\frac{h}{a}=\frac{|x-a|}{a}$ называют относительной погрешностью вычисления. Часто относительную погрешность указывают в процентах.

Например: «Температура равна 16 плюс-минус 1 градус», т.е. $t=(16\pm 1)°C$. Это означает, что истинное значение температуры отличается от 16^0C не более чем на 1^0. Эту информацию можно записать так: $16-1<t<16+1$ или $|t-16|<1$. Здесь 16 – приближенное значение температуры, 1 – оценка погрешности. Относительная погрешность равна $\frac{1}{16}=0{,}0625$ или 6,25%.

Например: Приближения числа π

а) $\pi\approx 3$ такое приближение упоминается в Библии;

б) $\pi\approx 3+\frac{432}{3100}=3{,}12$ - это приближение древнего Вавилона;

в) $\pi\approx\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3{,}16$ - это приближение древних египтян;

г) $\pi\approx\frac{22}{7}=3{,}14...$ - это приближение Архимеда.

д) Вычислим относительную погрешность приближения египтян, приняв приближение Архимеда за наиболее точное. Тогда: $a\approx 3{,}16;\quad h=|3{,}14-3{,}16|=0{,}02;\quad r=\frac{h}{a}=\frac{0{,}02}{3{,}16}\approx 0{,}0063=0{,}63\%$. Т.е. погрешность в вычислении египтян меньше 1%!

Стандартная запись числа. Это представление чисел в виде: $x = a \cdot 10^k;\quad 1 \le a < 10$. Число а называют мантиссой числа x, а показатель k – его порядком.
Например: $3672500 = 3{,}672500 \cdot 10^6 \approx 3{,}67 \cdot 10^6$ с точностью до сотых;
Масса Солнца: $M \approx 1{,}9891 \cdot 10^{30}$ кг;
Масса атома водорода: $m \approx 1{,}674 \cdot 10^{-27}$ кг

Задания к практическому занятию

Задача 1. Указать все номера целых чисел данного множества:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{15}} \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; 2) $\left(\sqrt{7}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} 25}$; 3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$; 4) 33 · 0,(15); 5) $\left(\sqrt[3]{7\sqrt{6}}\right)^6$.

Решение:

$$1)\ \sqrt{8-2\sqrt{15}} \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \sqrt{8-2\sqrt{5}\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}} \cdot$$
$$\cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2} \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5-3 = 2$$

$$2)\ \left(\sqrt{7}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} 25} = 7^{\frac{1}{2}\log_{5^{-1}} 5^2} = 7^{-1} = \frac{1}{7};$$

$$3)\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})} = \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{9+\sqrt{14}}{7-2} = \frac{9+\sqrt{14}}{5}.$$

4) 33 · 0,(15)= $33 \cdot \dfrac{15}{99} = 33 \cdot \dfrac{5}{33} = 5$;

5) $\left(\sqrt[3]{7\sqrt{6}}\right)^6 = \left(7\sqrt{6}\right)^{6/3} = \left(7\sqrt{6}\right)^2 = 49 \cdot 6 = 294$.

Ответ: 1; 4; 5.

Задача 2. Вычислить:

1) $\left(8\sqrt{27}-\sqrt[3]{32}\right)-\left(\sqrt[3]{108}+6\sqrt{48}\right)$.

Решение: т.к. $8\sqrt{27} = 8\sqrt{9\cdot 3} = 8\cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8\cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27\cdot 4} = 3\sqrt[3]{4}$, $6\sqrt{48} = 6\sqrt{16\cdot 3} = 6\cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$, то

$$\left(8\sqrt{27}-\sqrt[3]{32}\right)-\left(\sqrt[3]{108}+6\sqrt{48}\right) = 24\sqrt{3}-2\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}-24\sqrt{3} = -5\sqrt[3]{4}.$$

Ответ: $-5\sqrt[3]{4}$.

2) $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{7}}{-7}\right)^{-6}\left(7-5\sqrt{2}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{50}\right)^{-2}\left(7-5\sqrt{2}\right)^{2}}$.

Решение: используя свойства арифметических корней: $\sqrt{a^2}=|a|$ и $\sqrt[3]{a^3}=a$, имеем

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{-7}\right)^{-2}\left(7-5\sqrt{2}\right)+\left(\frac{5\sqrt{2}}{50}\right)^{-1}\left|7-5\sqrt{2}\right|=\frac{49}{7}\left(7-5\sqrt{2}\right)+\frac{50}{5\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}-7\right)=$$
$$\left(7-5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)=99-70\sqrt{2}.$$

Ответ: $99-70\sqrt{2}$.

Задача 3. Если 30% числа равны $\sqrt{\left(9+\sqrt{82}\right)^2}-\sqrt{\left(9-\sqrt{82}\right)^2}$, то само число равно?

Решение: т.к. $\sqrt{a^2}=|a|$, то

$\sqrt{\left(9+\sqrt{82}\right)^2}-\sqrt{\left(9-\sqrt{82}\right)^2}=9+\sqrt{82}-\left|9-\sqrt{82}\right|=9+\sqrt{82}-\sqrt{82}+9=18.$ Итак, 30% числа равны 18, следовательно, обозначив искомое число через *x,* имеем: $x=\frac{18\cdot 100}{30}=60$.

Ответ: 60.

Задача 4. Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{x-y}+\frac{3xy}{y^3-x^3}\right):\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}\right)$$

Решение: используя формулы сокращенного умножения, имеем

1)

$$\frac{1}{x-y}+\frac{3xy}{y^3-x^3}=\frac{x^2+xy+y^2-3xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x-y}{x^2+xy+y^2};$$

2) $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}=\frac{2x^2+2y^2-x^2-2xy-y^2}{2(x-y)(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{2(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{2(x+y)};$$

3) $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}:\frac{x-y}{2(x+y)}=\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$.

Ответ: $\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие целых, натуральных, рациональных, действительных чисел.
2. Какие числа называются иррациональными?
3. Как находится процент от числа?
4. Перечислите основные свойства корней и степеней.

Практическое занятие 2

Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Непрерывные и периодические функции. Обратные функции и их графики. Преобразования графика функции. Гармонические колебания

Теоретическая часть

§2: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 41,45,52,55-60**: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дать определение функции.
2. Какие виды функций вы знаете?
3. Дать понятие графика функции.
4. Дать понятие периода функции.
5. Дать определение чётной и нечётной функций.

Практическое занятие 3

Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1-6:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Как связаны градусная и радианная меры угла?
2. Чему равен 1 радиан?
3. Дать понятие тригонометрической окружности.

Практическое занятие 4

Основные тригонометрические тождества

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 7,8,12:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие тригонометрии как науки.
2. Перечислите основные тригонометрические тождества.

Практическое занятие 5

Формулы сложения, удвоения

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 9,10,11, 21,22**: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите формулы сложения аргументов тригонометрических функций.
2. Какие вы знаете формулы двойных аргументов тригонометрических функций?

Практическое занятие 6

Формулы преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 14,15 (а, б):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Назовите основные формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.
2. Назовите основные формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Практическое занятие 7

Тригонометрические функции числового аргумента ч.1

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 28-30(а, б):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные тригонометрические функции.
2. Как называются графики тригонометрических функций?

Практическое занятие 8

Тригонометрические функции числового аргумента ч.2

Теоретическая часть

§1: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 31-33(а, б)**: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные свойства тригонометрических функций.
2. Какие из тригонометрических функций являются нечётными?

Практическое занятие 9

Обратные тригонометрические функции

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 118,121,122,123,124,125**: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Назовите обратные тригонометрические функции.
2. Как связаны графики тригонометрических функций и им обратных?

Практическое занятие 10

Простейшие тригонометрические уравнения

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 136-146(а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие формулы предназначены для решения решений уравнения $\sin x = a$?
2. Какие формулы предназначены для решения решений уравнения $\cos x = a$?

Практическое занятие 11

Решение тригонометрических уравнений ч.1

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 164-168(а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные виды тригонометрических уравнений и методы их решения.

Практическое занятие 12

Решение тригонометрических уравнений ч.2

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 169-174(а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие уравнения называются однородными?
2. В чём заключается метод решения тригонометрических уравнений, сводимых к квадратным?

Практическое занятие 13

Решение систем тригонометрических уравнений.

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 175-176:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для

общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие методы решения систем уравнений вы знаете?
2. В чём особенность решения систем тригонометрических уравнений?

Практическое занятие 14

Простейшие тригонометрические неравенства

Теоретическая часть

§3: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 151-163 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие тригонометрической окружности.
2. Какие знаки имеют тригонометрические функции в четвертях?
3. Какой период имеет каждая из тригонометрических функций?
4. Назовите области определения и области значения каждой из тригонометрических функций.

Практическое занятие 15

Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности. Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Теоретическая часть

Последовательность можно понимать как частный вид функций, а именно как функцию номера места члена последовательности $a_n = f(n),\ n \in N$. Обозначение числовой последовательности - $(a_n),(b_n)...$ или $\{a_n\},\{b_n\}$, где n – номер члена последовательности, a_n – *общий член последовательности.*

S_n – *последовательность сумм.* $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$.

Примеры числовых последовательностей:

- $1, 3, 5, 7, \ldots \quad a_n = 2n-1$;
- $0, 3, 8, 15, \ldots \quad a_n = n^2 - 1$;
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \quad a_n = \frac{n}{n+1}$ и т.д.

Способ задания последовательности, при котором для вычисления n-го члена надо знать предыдущие, называется *рекуррентным.*

1) ***Арифметическая прогрессия (a_n) –*** это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d. Число d называется *разностью прогрессии*.

   Формулы: $\boxed{a_n = a_1 + d(n-1), \; S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$

   Например, сумма n первых натуральных чисел: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

2) ***Геометрическая прогрессия (b_n)*** – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число q. Число q называется *знаменателем прогрессии*.

   Формулы: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \; S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$

3) ***Последовательность Фибоначчи***. Если взять $a_1=1$, $a_2=2$, то получится стандартная последовательность чисел Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 11, 21, … Здесь $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, т.е. задается с a_3.

   В такой последовательности разность между соседними членами также является последовательностью Фибоначчи $\{d_n\}$: $\{a_n\}$: 1, 2, 3, 5,8, 11, 21, …
   $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

   Формула общего члена: $\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$

4) ***Последовательность факториалов***. Приняв $a_1=1$, a_n является произведением натуральных чисел от 1 до n: $\boxed{a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!}$. Восклицательный знак – это обозначение факториала. Например: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

   Формула общего члена: $\boxed{a_{n+1} = (n+1)a_n}$

5) ***Последовательность квадратов***. Это последовательность чисел 1, 4, 9, 25, 36, … Задается первым членом $a_1=1$ и формулой: $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2n + 1}$

Предел последовательности

Число А называют *пределом* последовательности a_1 ,a_2 ,…, если начиная с некоторого момента все члены этой последовательности, будут сколь угодно мало отличаться от А.

Обозначение: $\boxed{A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Произношение: предел последовательности a_n при n стремящемся к бесконечности; *lim* от латинского лимит.

Последовательности, которые имеют пределы, называются ***сходящимися***, а которые не имеют – ***расходящимися***.

К явно сходящимся последовательностям относится и ***бесконечно убывающая геометрическая прогрессия***.

Это геометрическая прогрессия, у которой $|q|<1$. Для неё определяется понятие *суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии*, а именно: это число, к которому неограниченно приближается сумма n первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле: $S=\dfrac{b_1}{1-q}$

Правила вычисления пределов:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C \quad (C = const)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0\right)$

Задания к практическому занятию

1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2,$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=1-0=1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n}{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{2n}{n}}{\frac{3n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-2}{3}=-\dfrac{2}{3}\quad\left(\dfrac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0\right),$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n^3}{2n^2+2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{3n^3}{n^3}}{\frac{2n^2}{n^3}+\frac{2n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0+3}{0}=\infty$

Вопросы к практическому занятию

1. Какие формулы называются рекуррентными?
2. Дать понятие предела числовой последовательности.

Практическое занятие 16

Правила и формулы дифференцирования, таблица производных

элементарных функций

Теоретическая часть

§4: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **220-226, 251-260:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дать определение производной.
2. Запишите формулы таблицы производных.

Практическое занятие 17

Производная: механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной в общем виде

Теоретическая часть

§5: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 251-260 (а, в), 267-270:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. В чём заключается геометрический смысл производной?
2. В чём заключается физический смысл производной?
3. Расскажите алгоритм составления уравнения касательной.
4. Назовите основные формулы вычисления производных.

Практическое занятие 18

Исследование функции с помощью производной

Теоретическая часть

§6: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 279-281, 288, 290 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Расскажите алгоритм нахождения промежутков монотонности функции.
2. Дайте определение экстремумов функции.

Практическое занятие 19

Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

Теоретическая часть

§6: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 305-309, 311-315:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Как определяется экстремум функции?
2. Какие точки называются критическими?

Практическое занятие 20

Исследование и построение графиков функций с помощью производной

Теоретическая часть

§6: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 296-298, 300-302 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Расскажите алгоритм исследования и построения графика функции с помощью производной.

Практическое занятие 21

Первообразная. Интеграл. Теорема Ньютона-Лейбница. Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Теоретическая часть

§7,8: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 326-333 (а,в), 342-347 (а,в), 348, 349, 353, 355, 357-366 (а,в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие первообразной.
2. В чём заключается геометрический смысл первообразной?
3. Перечислите основные правила нахождения первообразной.
4. Назовите основные формулы таблицы первообразных.

5. Сформулируйте теорему Ньютона-Лейбница.
6. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

Практическое занятие 22

Вычисление и сравнение корней. Выполнение расчетов с радикалами. Корень n-й степени и его свойства

Теоретическая часть

§9: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 381-416(а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные свойства корней.

Практическое занятие 23

Нахождение значений степеней с рациональными показателями. Сравнение степеней. Преобразования выражений, содержащих степени. Решение иррациональных уравнений.

Теоретическая часть

§9: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 390-395, 417-427 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Назовите основные свойства степеней.
2. Дайте определение степени с рациональным показателем.
3. Дайте понятие иррационального уравнения.
4. Перечислите методы решения иррациональных уравнений.

Практическое занятие 24

Степень с рациональным показателем. Показательная функция

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 428-438, 448-450, 453:** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение показательной функции.
2. Сформулируйте свойства показательной функции.

Практическое занятие 25

Показательные уравнения и их системы.

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 460-465 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для

общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие уравнения называются показательными?
2. Перечислите основные методы решения показательных уравнений.

Практическое занятие 26

Показательные неравенства

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 466,467,472,473(а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие неравенства называются показательными?
2. В чём особенность решения показательных неравенств?

Практическое занятие 27

Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. Переход от одного основания к другому. Вычисление и сравнение логарифмов. Логарифмирование и потенцирование выражений. Приближенные вычисления и решения прикладных задач

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 476-497 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение логарифма.
2. Перечислите основные свойства логарифмов.

Практическое занятие 28

Решение логарифмических уравнений и их систем

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 512-522, 529, 530 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие уравнения называются логарифмическими?
2. Назовите основные методы решения логарифмических уравнений.
3. В чём заключается метод потенцирования?
4. Назовите методы решения систем логарифмических уравнений.

Практическое занятие 29

Логарифмические неравенства

Теоретическая часть

§10: Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 525-528 (а, в):** Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для

общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2016.

Вопросы к практическому занятию

1. Назовите методы решения логарифмических неравенств.
2. В чём заключается особенность решения логарифмических неравенств?

Практическое занятие 30

История развития комбинаторики, теории вероятностей и статистики и их роль в различных сферах человеческой жизнедеятельности. Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач. Размещения, сочетания и перестановки. Бином Ньютона и треугольник Паскаля

Теоретическая часть

Комбинаторика - один из разделов математики, который используется в математической логике, вычислительной технике, кибернетике, теории чисел, теории вероятностей и других науках.

Одной из задач комбинаторики является определение количества различных подмножеств из заданного конечного множества, которые можно образовать выборкой элементов из этого множества по определенным правилам, причем в этих выборках расположение элементов может играть важную роль, а может не играть никакой роли; элементы, входящие в выборку могут повторяться, а могут не повторяться; в выборке могут участвовать все элементы заданного множества или не все.

Определение 1. Выборка называется упорядоченной, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными. Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется неупорядоченной.

Рассматривая различные виды выборок, мы приходим к таким комбинаторным объектам как *размещения* (без повторений и с повторениями), *перестановки* (без повторений и с повторениями) и *сочетания* (без повторений и с повторениями).

Определение 2. Пусть нужно выполнить одно за другим *к* действий, причем 1 действие можно выполнить m_1 способами, 2 действие - m_2 способами и т.д. Тогда общее число способов выполнить все эти *к* действий находится по формуле:

$$N = m_1 * m_2 * \ldots * m_k.$$

Определение 3. Число перестановок - это число способов, которыми можно поменять n элементов местами, т.е.

$$P_n = n! = 1*2*3*4*\ldots*n$$

$$0!= 1!=1$$

Перестановки с повторениями:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

Определение 4. Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, \ldots a_n$. Тогда число способов извлечь m элементов, не учитывая порядок следования, определяется числом сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ n>m}$$

Свойства сочетаний:

1^0. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2^0. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

3^0. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Определение 5. Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, \ldots a_n$. Тогда число способов извлечь m элементов, учитывая порядок следования, определяется числом размещений из n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ n>m}$$

Числа C_n^k

Подсчитывать числа вида C_n^k приходится не только при решении комбинаторных задач, но и для определения ***биномиальных коэффициентов в биноме Ньютона*** *(подробно – в следующей лекции).* Французский математик Блез Паскаль разработал способ вычисления, при котором числа представлены в виде таблицы, которая называется ***арифметический треугольник Паскаля.***

В общем виде треугольник Паскаля имеет следующий вид:

					C_0^0					
				C_1^0		C_1^1				
			C_2^0		C_2^1		C_2^2			
		C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3		
	C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3		C_4^4	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	C_n^0	…	C_n^1	..	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

$C_n^0 = 1, \; C_n^n = 1, \; C_n^1 = n, \; C_n^k = C_n^{n-k}$

Боковые стороны треугольника Паскаля состоят из единиц. Внутри треугольника Паскаля стоят числа, получающиеся сложением двух соответствующих чисел над ним.

Формула бинома Ньютона для натуральных n имеет вид:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n}$$

где $\boxed{C_n^k = \frac{(n)!}{(n-k)! \cdot (k)!}}$ - ***биномиальные коэффициенты***, *представляющие из себя сочетания из n по k.*

Выражение в правой части бинома Ньютона называют ***разложением выражения*** $(a+b)^n$, а выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ - ***(k + 1) - м членом разложения***.

К примеру, известная формула сокращенного умножения «квадрат суммы» - это частный случай бинома Ньютона при $n = 2$: $(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Аналогичным образом докажите формулу «куба суммы»: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Свойства биномиальных коэффициентов

Для коэффициентов бинома Ньютона справедливы следующие свойства:

- коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой $C_n^k = C_n^{n-k}$ (правило симметрии)
- $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
- сумма биномиальных коэффициентов равна числу *2*, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона: $\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n}$;
- сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}

Первые два свойства являются свойствами числа сочетаний.

Биномиальные коэффициенты разложения удобно представлять в виде треугольника Паскаля:

показатель степени	биномиальные коэффициенты									
0						C_0^0				
1					C_1^0		C_1^1			
2				C_2^0		C_2^1		C_2^2		
3			C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3	
⋮		…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	C_n^0		C_n^1	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

Биноминальное разложение с использованием треугольника Паскаля

Рассмотрим следующие выражения со степенями $(a + b)^n$, где a + b есть любой бином, a n - целое число.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Каждое выражение - это полином. Во всех выражениях можно заметить особенности.

1. В каждом выражении на одно слагаемое больше, чем показатель степени n.
2. В каждом слагаемом сумма степеней равна n, т.е. степени, в которую возводится бином.
3. Степени начинаются со степени бинома n и уменьшаются к 0. Последний член не имеет множителя a. Первый член не имеет множителя b, т.е. степени b начинаются с 0 и увеличиваются до n.
4. Коэффициенты начинаются с 1 и увеличиваются на определенные значения до "половины пути", а потом уменьшаются на те же значения обратно к 1.

Задания к практическому занятию

1. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
Ответ: $2(n!)^2$ способами. Действительно, выбрать места для мужчин и для женщин можно двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранных местах n! способами. На остальных местах n! способами можно посадить женщин.

2. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза.

Ответ: а) C_{52}^{10} - C_{48}^{10}; б) $C_4^1 \cdot C_{48}^9$; в) C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4C_{48}^9; г) $C_4^2 \cdot C_{48}^8$.

3. Для награждения победителей школьной олимпиады по математике куплено 10 различных книг (книги равноценные). Сколькими способами эти книги можно распределить между победителями олимпиады, если участник, занявший 1-е место должен получить 5 книг; победитель, занявший 2-е место – 3 книги, а участник, занявший 3-е место – 2 книги?

Ответ: $C_{10}^5 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 2520$ способами.

4. Десять различных книг нужно расставить на двух книжных полках так, чтобы на каждой полке стояло не менее 4 книг. Порядок расположения книг на полке не учитывается. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $C_{10}^4 \cdot C_6^6 + C_{10}^5 \cdot C_5^5 + C_{10}^6 \cdot C_4^4 = C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 = 672$ способа.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение комбинаторики.
2. Запишите основные формулы комбинаторики.

Практическое занятие 31

Классическое определение вероятности, свойства вероятностей, теорема о сумме вероятностей. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи. Представление числовых данных. Основные теоремы теории вероятностей

Теоретическая часть

Алгебра событий. Вероятность

Теория вероятностей - математическая дисциплина, которая изучает закономерности, свойственные случайным событиям или явлениям.

Вероятность характеризует меру возможности появления того или иного события при данном комплексе условий.

Т.о., основными понятиями теории вероятностей являются: испытание, комплекс условий, событие.

Определение 1. Комплекс условий - всё то, что сопровождает данное событие.

Определение 2. Событие - всё то, что может произойти или не произойти при данном испытании.

Определение 3. Событие - достоверно, если оно обязательно произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 4. Событие - невозможно, если оно никогда не произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 5. Событие - случайное, если оно может произойти или не произойти при данном комплексе условий.

Определение 6. События $A_1, A_2, .. A_n$ - совместные, если появление одного из событий при одиночном испытании не исключает появление других событий.

Определение 7. Два события - независимые, если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого.

Определение 8. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Определение 9. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение 10. Разностью двух событий *A* и *B* называется событие, которое состоится, если событие *A* произойдёт, а событие *B* не произойдёт.

Пусть из n элементарных событий какое - то число m благоприятствует появлению события *A*.

Определение 11. (классическое) Вероятность события равна отношению числа исходов, благоприятных появлению данного события, к общему числу всех равновозможных исходов, т.е.

$$P(A) = m \backslash n.$$

Вероятность P(A) удовлетворяет следующим условиям:

1. Вероятность любого события $0<P(A)<1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0.

Теорема 1(правило «+» вер.): Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий,

$$\text{т.е. } P(A+B+C+\ldots+N) = P(A)+P(B)+\ldots+P(N).$$

Следствие: Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB).$$

Задания к практическому занятию

1. Из кубиков составлено слово «КНИГА». Ребёнок, не умеющий читать, смешал все кубики. Какова вероятность того, что он повторно сложит исходное слово.

Решение: Пусть *A*- событие, что слово «КНИГА» сложено, m = 1, n = 5.

Тогда P(A)=1\5!= 1\120.

2. В урне 5 синих, 6 красных, 10 зеленых и 15 желтых шаров. Один шар взяли. Найти вероятность того, что этот шар будет синий или желтый.

Решение: Пусть *A*- событие, что шар синий или желтый.

Тогда n = 36, m = 5+15 = 20. Значит, P(A) = m\n = 20\36 = 5\9.

3. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекается 1 деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

Ответ: а) 2/3; б) 1/3.

4. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

Ответ: 1/120.

5. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета.

Ответ: 5/9.

6. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Ответ: 18/35.

7. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение: Пусть A - выпало четное число очков; $B_к$ - выпало k очков (k = 1,2,3,4,5,6). Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6, т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6 несовместны, то $P(B_к) = 1/6$ (k = 1,2, 3, 4, 5, 6).

$P(A) = P(B_2)+ P(B_4)+ P(B_6)$ =1/6+1/6+1/6 =3/6=1/2.

Замечание: Тот же результат получается и непосредственно по формуле P(A)=m/n=3/6=1/2.

8. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение: Извлечение цветного шарика означает появление либо голубого, либо зеленого шарика. Вероятность извлечения голубого шарика (событие A): P(A) = 15/40 = 3/8. Вероятность извлечения зеленого шарика (событие B): P(B) = 5/40 = 1/8. Так как события A и B несовместны, то получим P(A+ B) = P(A)+ P(B) =3/8+1/8=4/8=1/2.

9. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A - "сумма выпавших очков не превосходит четырех".

Ответ: 1/6.

10. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй - 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?
Ответ: 0,7.

11. 2 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,7, второго -0,8. Найти вероятность поражения цели.
Решение: Пусть A - событие, что цель поражена.

A_1 -событие, что 1 стрелок попал в цель.

A_2 - событие, что 2 стрелок попал в цель.

Тогда, $P(A) = P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0.7+0.8-0.56 = 0.94$.

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные виды событий.
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.

Практическое занятие 32

Аксиомы стереометрии

Теоретическая часть

§1: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1,3,5**: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение стереометрии.
2. Сформулируйте основные аксиомы стереометрии.

Практическое занятие 33

Параллельность прямых в пространстве. Признаки взаимного расположения прямых. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости

Теоретическая часть

§2: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1,2,3,7,8,13,15,18,20,22,23,25,27-30:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение параллельных прямых в пространстве
2. Сформулируйте признак параллельности прямых в пространстве.
3. Сформулируйте определение перпендикуляря, наклонной, проекции.
4. Запишите формулу для вычисления угла между прямой и плоскостью.
5. Сформулируйте теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости.

Практическое занятие 34

Перпендикулярность прямых в пространстве. Теорема о трех перпендикулярах. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей. Расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, расстояние между плоскостями, между скрещивающимися прямыми, между произвольными фигурами в пространстве

Теоретическая часть

§3: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1-6, 9, 10, 12, 13, 17-20, 45-50, 54-59:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямых в пространстве.
3. Сформулируйте теорему о 3 перпендикулярах.

4. Какие прямые называются скрещивающимися?
5. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей в пространстве.

Практическое занятие 35

Векторы в пространстве. Параллельное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника. Взаимное расположение пространственных фигур. Действия с векторами. Использование векторов при доказательстве теорем стереометрии. Декартова система координат в пространстве. Уравнение окружности, сферы, плоскости. Расстояние между точками. Действия с векторами, заданными координатами. Скалярное произведение векторов. Векторное уравнение прямой и плоскости.

Теоретическая часть

§4: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1, 2, 4-6, 9-11, 14, 30-34, 43-46, 48, 50, 51, 53-58, 65, 66:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие вектора.
2. Какие вектора называются компланарными?
3. Какими координатами характеризуется точка в пространстве?
4. Запишите формулу нахождения середины отрезка в пространстве.
5. Какими формулами можно задать уравнение плоскости в пространстве?
6. Запишите формулу для нахождения расстояния между точками в пространстве.
7. Запишите формулу для нахождения скалярного произведения векторов.

Практическое занятие 36

Различные виды многогранников. Их изображения. Сечения, развертки многогранников. Виды симметрий в пространстве.

Симметрия тел вращения и многогранников

Теоретическая часть

§5: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 2-5, 7, 9-16, 23, 26-29, 32:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Перечислите основные виды многогранников.
2. Какие виды симметрий в пространстве вы знаете?

Практическое занятие 37

Пирамида

Теоретическая часть

§5: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 35-39, 41, 43, 45, 48-50, 56-61:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение пирамиды.
2. Какая пирамида называется усечённой?
3. Назовите основные элементы пирамиды.

Практическое занятие 38

Цилиндр. Конус. Шар.

Теоретическая часть

§6: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1,3,5,6,7,9,11-15,21,23,27, 29,31,32,36,37,43,52:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте определение цилиндра.
2. Что называется образующей цилиндра?
3. Сформулируйте определение конуса.
4. В чём отличие конуса от усечённого конуса.
5. Дайте понятие образующей конуса.
6. Какое тело вращения называется шаром?
7. Дайте понятие сферы.

Практическое занятие 39

Объём параллелепипеда, призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара

Теоретическая часть

§7: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 1-6,11-13,19,21,22,27-30,33-37,46:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Запишите формулу для нахождения объёма параллелепипеда.
2. Запишите формулу для нахождения объёма прямой, наклонной призмы.
3. Запишите формулу для нахождения объёма цилиндра.
4. По какой формуле вычисляется объём конуса?
5. Дайте понятие усечённого конуса.
6. Дайте понятие радиуса шара.
7. Запишите формулу для нахождения объёма шара.

Практическое занятие 40

Площадь боковой поверхности тел вращения

Теоретическая часть

§8: Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Задания к практическому занятию

На занятии рассматриваются **№№ 36, 38, 39, 42-44:** Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие тел вращения.
2. Запишите формулы для вычисления боковой поверхности цилиндра и конуса.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2020.

2. Геометрия 10-11 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учреждений / Под ред. А.В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2018.

Список дополнительной литературы

1. Коган, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.А. Коган, А.А. Юрченко. - Москва: ИНФРА-М, 2020. https://znanium.com/catalog/product/1044968