ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по учебной дисциплине **Математика**

специальность **44.02.02 «Преподавание в начальных классах»**

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 44.02.02 Преподавание в начальных классах и программой дисциплины «Математика».

Составитель: Ерёмина Е.Р.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26» мая 2022 г.

Оглавление

1.1. Область применения программы

Рабочая программа учебной дисциплины является частью основной профессиональной образовательной программы в соответствии с ФГОС по специальности СПО: 44.02.02 Преподавание в начальных классах.

Рабочая программа учебной дисциплины может быть использована в дополнительном профессиональном образовании (в программах повышения квалификации и переподготовки) и профессиональной подготовке.

1.2. Место дисциплины в структуре основной профессиональной образовательной программы: дисциплина входит в математический и естественнонаучный цикл.

1.3. Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

- применять математические методы для решения профессиональных задач;
- решать текстовые задачи;
- выполнять приближенные вычисления;
- проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований, представлять полученные данные графически;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

- понятие множества, отношения между множествами, операции над ними;
- понятия величины и ее измерения;
- историю создания систем единиц величины;
- этапы развития понятий натурального числа и нуля;
- системы счисления;
- понятие текстовой задачи и процесса ее решения;
- историю развития геометрии;
- основные свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве;
- правила приближенных вычислений;
- методы математической статистики.

2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Математика» В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен:

уметь:

-применять математические методы для решения профессиональных задач;

-решать текстовые задачи;

-выполнять приближенные вычисления;

-проводить элементарную статистическую обработку информации и результатов исследований, представлять полученные данные графически;

знать:

-понятие множества, отношение между множествами, операции над ними;

- понятия величины и ее измерения;

-историю создания систем единиц величины;

-этапы развития понятий натурального числа и нуля;

-системы счисления;

-понятие текстовой задачи процесса ее решения;

-историю развития геометрии;

-основные свойства геометрических фигур на плоскости и в пространстве;

-правило приближенных вычислений;

-методы математической статистики

3. Требования к результатам освоения ППССЗ

Учитель начальных классов должен обладать общими компетенциями

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы решения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности

ОК 6. Работать в коллективе и команде, взаимодействовать с руководством, коллегами и социальными партнерами

ПК 1.1 Определять цели и задачи, планировать уроки

ПК 1.2. Проводить уроки

ПК 2.1. Определять цели и задачи внеурочной деятельности и общения, планировать внеурочные занятия

ПК 2.2. Проводить внеурочные занятия

ПК 4.2. Создавать в кабинете предметно-развивающую среду

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР14. Стремящийся находить и демонстрировать ценностный аспект учебного знания и информации и обеспечивать его понимание и переживание обучающимися

Практическая работа № 1. Множества и операции над ними.

Начальные понятия теории множеств

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия **множества**. Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Объекты, которые образуют множество, будем называть **элементами** множества и обозначать малыми буквами латинского алфавита.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Пример. Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$. Если какое-либо множество A включено в другое множество B, то используется запись $A \subset B$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример. 1. Множество корней уравнения $\sin x = 2$ является пустым.

2. Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда $a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Множество считается заданным, если каким-либо образом указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств (при этом в обоих случаях при задании множеств используют фигурные скобки).

Примеры задания множеств. 1. Множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде: $M = \{0, 1, \ldots, 9\}$ или $M = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$, где справа от вертикальной черты указывают свойство элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде: $M = \{x \mid x$ – чётное число$\}$.

2. Если R – множество точек числовой прямой, то R^n – множество точек n-мерного арифметического пространства; в частности, R^2 – множество точек плоскости, R^3 – множество точек пространства трех измерений.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном этого множества и обозначать $B(M)$, а множество M будем называть универсальным (универсумом или пространством) и обозначать 1 или U. Множество M (универсальное) не должно быть у́же объединения рассматриваемых множеств, т. е. оно должно быть равно или содержать объединение рассматриваемых множеств.

Пример. Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $B(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$B(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Мы видим, что множество $B(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Приведем стандартные обозначения для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

N – множество натуральных чисел (иногда его начинают с 1, иногда с 0; обычно это оговаривается);

P – простые числа;

Z – множество целых чисел (положительные, отрицательные и 0);

R – множество действительных чисел.

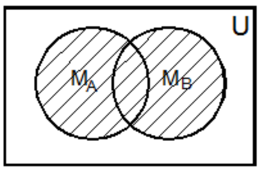
Очевидное соотношение: $N \subseteq Z \subseteq R$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих на примере пространства или множества U, определив в нём 4 операции над множествами A и B: объединение, пересечение, разность, дополнение.

Операции над множествами

Объединением A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A$ и / или $x \in B\}$.

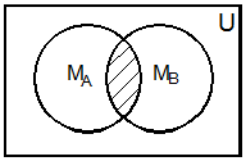


Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \cup B$ – множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.



Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

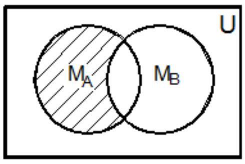
2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \cap B$ – множество чисел, которые делятся и на 2, и на 3: $A \cup B = \{6, 12, 18, \dots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Разностью (относительным дополнением) множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

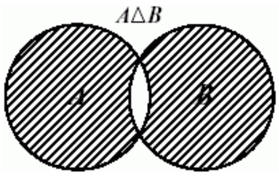
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.



Пример. 1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.



Пример.1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 5\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Универсальное множество

Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множеств I, то это самое большое множество называют *универсальным* (*или полным*) *множеством, или* - *универсум*.

В различных конкретных случаях роль универсального множества играют различные множества. Так, при рассмотрении студентов института универсальным (полным) множеством является вся совокупность студентов. Отдельные группы (факультеты) можно рассматривать как подмножества. В некоторых случаях универсальным множеством может являться и отдельная группа, в которой имеют место свои подмножества (отличники; студенты, проживающие в общежитии; юноши; девушки и т.п.).

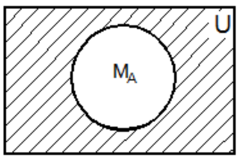
Вполне очевидно, что для универсального множества справедливы следующие соотношения:

$$\boxed{A \cap I = A} \quad \text{и} \quad \boxed{A \cup I = I}$$

Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Различные области внутри прямоугольника будут означать различные подмножества универсального множества. Изображение множества в виде областей в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называют диаграммой Эйлера-Венна.

Дополнением $\overline{M}$ множества M является множество

$\overline{M} = \{m_i \mid m_i \notin M\}$.



Пример. Заданы множества $A = \{1, 2, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 6\}$ на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Выполнить операции $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение. В результате выполнения заданных операций получим следующие множества: $\overline{A} = \{3, 7\}$; $\overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

Для конечных множеств существует понятие: мощность множества A – число его элементов. Обозначают мощность множества $|A|$.

Пример. $A = \{1, 2, 5, 6\}$, тогда мощность множества $|A| = n(A) = 4$; $|\varnothing| = 0$; $|\{\varnothing\}| = 1$.

Также справедливы следующие формулы: для любых множеств A и $B \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то есть учитываются общие для обоих множеств элементы.

Пример. $A = \{1, 2, 3\}$ $|A| = 3$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|B| = 5$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|A \cup B| = 5$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ $|A \cap B| = 3$, то есть получим равенство: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $5 = 3 + 5 - 3$.

Для конечного множества M мощность его булеана $|B(M)|$ равна $2^{|M|}$.

Применение диаграмм Эйлера-Венна при решении практических задач

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используются диаграммы Эйлера-Венна. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга (рис. 1).

С помощью диаграмм Эйлера-Венна удобно иллюстрировать операции над множествами. Результирующее множество каждой операции выделено штриховкой.

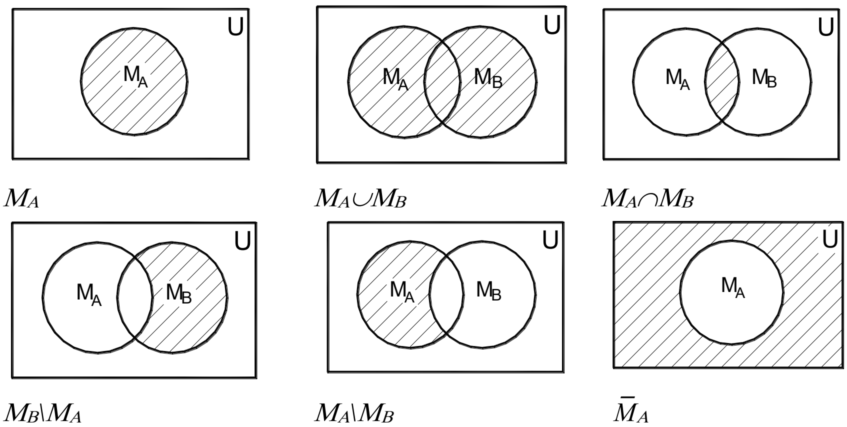


Рис. 1. Представление операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Пример. Рассмотрим операцию дополнения множества, являющегося пересечением множеств M_A и M_B. Необходимо доказать, что её результат совпадает с объединением дополнений этих множеств:

Решение. $M = \overline{M_A \cap M_B} = \overline{M}_A \cup \overline{M}_B$.

Задания к практическому занятию:

1. Записать множество M целых чисел x, которые делятся на три и находятся в интервале $3 \le x \le 15$. Записать двумя способами.
2. Записать множество A целых чисел x, которые делятся на 2 и на 3 и находятся в интервале $20 \le x \le 25$. Записать двумя способами.

3. Принадлежит ли x множеству M, если:

а) M = {2, 6, 8, …, 50}; x = 35;

б) M = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, …, 100}; x = 23;

в) M = {-2, 2, -4, 4, …, 120}; x = -30.

Практическая работа № 2. Законы алгебры множеств.

Принцип двойственности в алгебре множеств

В теории множеств и ее приложениях очень важную роль играет принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

Дополнение объединений равно пересечению дополнений.

$$I \setminus \bigcup_i A_i = \bigcap_i (I \setminus A_i) \qquad 1.26$$

Дополнение пересечения равно объединению дополнений.

$$I \setminus \bigcap_i A_i = \bigcup_i (I \setminus A_i) \qquad 1.27$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества I, совершенно автоматически может быть получено другое двойственное равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, объединений множеств – пересечениями, а пересечений – объединениями.

Приведем доказательство соотношения 1.26.

Пусть $x \in I \setminus \bigcup_i A_i$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_i A_i$, т.е. не входит ни в одно из множеств A_i. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $I \setminus A_i$ и поэтому $x \in \bigcap_i (I \setminus A_i)$. Обратно: пусть $x \in \bigcap_i (I \setminus A_i)$, т.е. x входит в каждое $I \setminus A_i$. Тогда x не входит ни в одно из множеств A_i, т.е. не принадлежит их объединению $\bigcup_i A_i$, но тогда $x \in I \setminus \bigcup_i A_i$. Равенство доказано. Аналогично доказывается равенство 1.27.

Тождества алгебры множеств

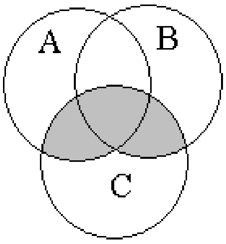
С помощью операций объединения, пересечения, дополнения из множеств можно составить различные алгебраические выражения. Обозначим через V(A,B,C) некоторое алгебраическое выражение, составленное из множеств A, B, C и представляющее собой некоторое множество.

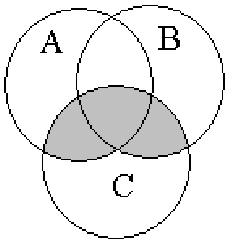
Пусть W(A,B,C) – другое алгебраическое выражение, составленное из тех же множеств. Если оба алгебраических выражения представляют собой одно и тоже множество, то их можно приравнять друг к другу, получая алгебраическое тождество вида:

$$V(A,B,C)=W(A,B,C)$$

Такие тождества очень полезны при преобразовании алгебраических выражений над множествами.

Составим диаграммы Эйлера-Венна для выражений:



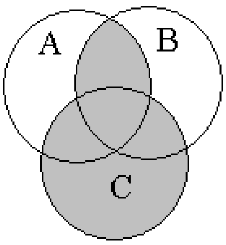


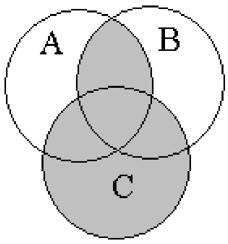
$(A \bigcup B) \bigcap C$ и $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$

Из диаграмм видно, что оба выражения определяют одно и тоже множество, так что имеет место равенство[1]:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) \qquad 1.28$$

Составим диаграммы Эйлера-Венна для выражений





$(A \bigcap B) \bigcup C$ и $(A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$.

Из построенных диаграмм видно, что они отражают одно и тоже множество, следовательно, между выражениями можно поставить знак равенства:

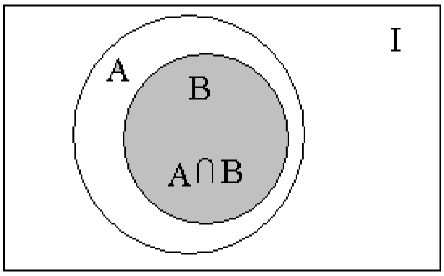
$$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) \qquad 1.29$$

Легко убедиться, что если $B \subseteq A$, то

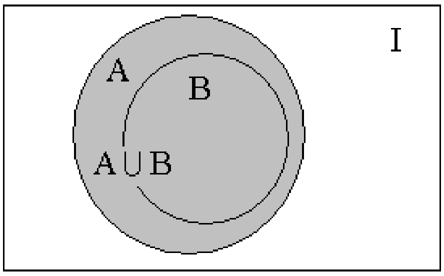
$$A \bigcap B = B, \quad A \bigcup B = A. \qquad 1.30$$

Действительно, все элементы множества B являются в то же время и элементами множества A (т.к. A включает B по определению). Следовательно, пересечение этих множеств, т.е. общая часть множеств A и B совпадает с B. В объединение множеств A и B множество B не внесет ни одного элемента, т.к. каждый элемент множества B является и элементом множества A (по определению), и следовательно $A \bigcup B = A$. Соответствующие диаграммы Эйлера-Венна приведены на рис. 1.6.

[1] Равенство аналогично дистрибутивному закону (a+b)c=ac+bc в обычной алгебре.



$B \subseteq A$; $A \bigcap B = B$



$B \subseteq A$; $A \bigcup B = A$

Рис. 1.6

Полагая в 1.30 B=A и учитывая, что $A \subseteq A$, получаем:

$$A \bigcap A = A, \quad A \bigcup A = A. \qquad 1.31$$

Установление тождеств алгебры множеств с помощью диаграмм Эйлера-Венна не всегда является удобным. Имеется более общий способ установления тождественности двух алгебраических выражений. Ранее было показано, что множество A равняется множеству B, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Пусть как и ранее через V(A,B,C) и W(A,B,C) обозначены два алгебраических выражения, получившихся путем применения операций объединения, пересечения и дополнения к множествам A, B, C. Тогда, чтобы доказать, что V=W достаточно показать $V \subseteq W$ и что $W \subseteq V$. В свою очередь, чтобы показать, что $V \subseteq W$, нужно убедиться, что из x∈V следует x∈W. Аналогично, чтобы показать, что $W \subseteq V$, нужно убедиться, что из x∈W следует x∈V.

Следует заметить, что каждое из доказательств состоит из последовательности утверждений вида "если P, то Q" (если справедливо P, то справедливо и Q). Для удобства это утверждение записывается как $"P \Rightarrow Q"$ и читается "из P следует Q". Следовательно, если имеется последовательность $P_{0,}\ P_1\ P_2 \ldots . P_n$ такая, что $P_0 \Rightarrow P_1, P_1 \Rightarrow P_2, \ldots . P_{n-1} \Rightarrow P_n$ (из P_0 следует P_1, из P_1 следует P_2, ….. P_{n-1} следует P_n), то имеет место доказательство $P_0 \Rightarrow P_n$.

Воспользовавшись этим методом, докажем некоторые тождества.

Доказать, что $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

Доказательство:

$x \in A \bigcap (B \bigcup C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in (B \bigcup C) \Rightarrow$ (Скобки означают, что объединение следует вычислить перед пересечением) $\Rightarrow x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C) \Rightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) \Rightarrow (x \in A \bigcap B)$ или $(x \in A \bigcap C) \Rightarrow x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$. Таким образом $A \bigcap (B \bigcup C) \subseteq (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$. (a)

Теперь необходимо доказать включение $\subseteq$ в обратную сторону:

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (x \in A \cap B)$ или $(x \in A \cap C) \Rightarrow$
$(x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) \Rightarrow$ $x \in A$ и $(x \in B$ или $x \in C) \Rightarrow x \in A$ и $x \in B \cup C$
$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

Следовательно, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. (б)

Тогда на основании полученных выражений (а) и (б) имеет место равенство:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Аналогично доказывается и равенство $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Доказать тождество:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{1.32}$$

Доказательство:

a. $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, т.е. $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

b. $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$;

Следовательно, $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$.

Доказать тождество:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.33}$$

Доказательство:

a. $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A}$ и (или) $x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, т.е. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$;

b. $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$, т.е $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cap B}$;

Следовательно, $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$

Тождества 1.32 и 1.33 играют важную роль в преобразовании алгебраических выражений алгебры множеств и особенно в математической логике. Их обычно называют *тождествами де-Моргана* или *законами де-Моргана.*

Конечно, для доказательств тождеств могут использоваться разные подходы. Докажем, например, тождество 1.33, основываясь на соотношении 1.32 и учитывая 1.24

Итак, необходимо доказать, что $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Приведем обе части равенства к одному виду. Выполняя операцию дополнения над обеими частями, получаем:

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}.$$

Но, учитывая соотношение 1.24 ($\overline{\overline{A}} = A$), $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$.

Для правой части на основании 1.32 имеем:

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

Итак, обе части приведены к одному виду, следовательно, тождество справедливо.

На основании вышеизложенных операций и определений приведем основные законы теории множеств:

1. Законы коммутативности (переместительный закон):

$A \cap B = B \cap A;$

$A \cup B = B \cup A.$

2. Законы ассоциативности (сочетательный закон):

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

3. Законы дистрибутивности (распределительный закон):

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

4. Законы идемпотетности:

$A \cup A = A;$

$A \cap A = A.$

5. Законы поглощения:

$A \cup (B \cap A) = A;$

$A \cap (B \cup A) = A.$

6. Законы склеивания:

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$

7. Законы де-Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

8. Законы нуля и единицы:

$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

$A \cup I = I;$ $A \cap I = A.$

9. Закон двойного дополнения (инволюция):

$\overline{\overline{A}} = A.$

Примеры. 1. Рассмотрим предположение о том, что произвольные множества A и B попарно эквивалентны: 1) $A \subset B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

Решение. Докажем, что из первого предположения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subset A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subset A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, т. к. $A \subset B$ и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предположения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предположения следует первое. Так как $A \subset A \cup B$, а по условию третьего предположения $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

Задания к практическому занятию:

1. Записать приведенные множества с указанием свойств их элементов.

2. Доказать неравенство: $\{\{1, 2\}, \{ 2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

3. Какие из следующих выражений являются истинными и какие ложными:

а) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; б) $1 \in \{\{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

4. Привести примеры таких множеств A, B, C, чтобы были истинными следующие высказывания:

а) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \notin C$;

б) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \in C$.

5. Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны:

а) $\{x \in R| \, x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

б) $\{x \in N| \, x^2 - 5x + 4 > 0\}$;

в) $\{x \in N| \, x^2 / 24\}$.

8. Равны ли множества:

а) $\{x \in R| \, x^2 - 2x – 2 = 0\}$ и $\{x \in Q| \, x^2 - 2x – 2 = 0\}$;

б) $\{x \in Z| \, 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in Z| \, 4/x \wedge 15/x\}\{x \in Z| \, 20/x \wedge 30/x\}$.

6. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $\{x \in R| \, x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in R| \, x^2 + 1 = 0\}$;

в) множество всех корней уравнения $x^2 + 6x + 9 = 0$.

7. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств:

а) $\{x | x \subseteq \{1\}\}$;　　в) $\{x | x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{x | x \subseteq \{1, 2\}\}$;　　г) $\{x | x \subseteq \varnothing\}$.

Практическая работа № 3. Задачи, решаемы при помощи кругов Эйлера.

Теория.

Одним из первых, кто использовал для решения задач круги, был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с кругами. Затем этот метод основательно развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707 – 1783).

Леонард Эйлер, крупнейший математик XVIII века, родился в Швейцарии. В 1727г. по приглашению Петербургской академии наук он приехал в Россию. Эйлер попал в круг выдающихся математиков, получил большие возможности для создания и издания своих трудов. Он работал с увлечением и вскоре стал, по единодушному признанию современников, первым математиком мира.

Леонард Эйлер

(1707 – 1783)

Научное наследие Эйлера поражает своим объемом и разносторонностью. В списке его трудов более 800 названий. Полное собрание сочинений ученого занимает 72 тома.

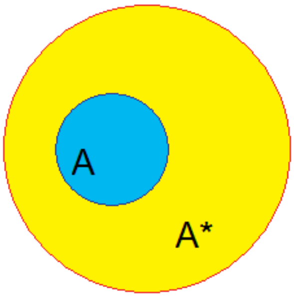
Последние 17 лет жизни Эйлера были омрачены почти полной потерей зрения. Но он продолжал творить так же интенсивно, как в молодые годы. Только теперь он уже диктовал ученикам, которые проводили за него громоздкие вычисления.

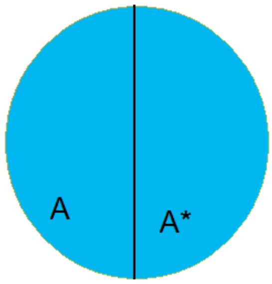
С1761 по 1768 год им были написаны знаменитые «Письма к немецкой принцессе», где Эйлер как раз и рассказывал о своем методе, об изображении множеств в виде кругов. Именно поэтому рисунки в виде кругов, обычно называют «кругами Эйлера». Эйлер отмечал, что изображение множеств в виде кругов «очень подходит для того, чтобы облегчить наши рассуждения». Понятно, что слово «круг» здесь весьма условно, множества могут изображаться на плоскости в виде произвольных фигур.

После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781 – 1848). Только в отличие от Эйлера он рисовал не круговые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шредер (1841 – 1902). Этот метод широко используется в его книге «Алгебра логика». Но наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843 – 1923). С наибольшей полнотой этот метод изложен им в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называют иногда диаграммами Венна; в некоторых книгах их называют также диаграммами (или кругами) Эйлера – Венна.

Рассмотрение простейших случаев кругов Эйлера – Венна

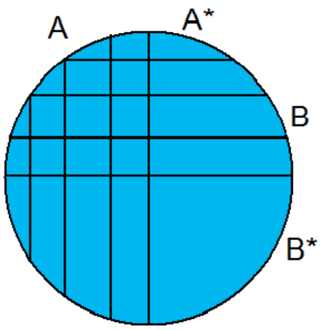
а) Пусть дано некоторое множество и указано свойство А. Очевидно, элементы данного множества могут обладать или не обладать данным свойством. Поэтому данное множество распадается на две части, которые можно обозначить через А и А*. На рисунке можно это изобразить двумя способами.

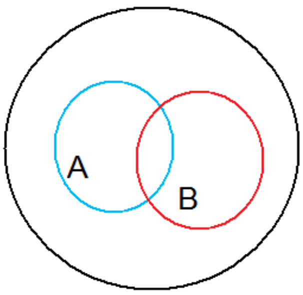




Большой круг изображает данное множество, маленький круг А – ту часть элементов данного множества, которое обладает свойством А, а кольцеобразная часть А* – ту часть элементов, которые не обладают свойством А.

б) Пусть дано некоторое множество и указаны два свойства: А, В. Так как элементы данного множества могут обладать или не обладать каждым из этих свойств, то возможны четыре случая: АВ, АВ*, А*В, А*В*. Следовательно, данное множество распадается на 4 подмножества. Это можно изобразить также двумя способами: в виде кругов или диаграмм.

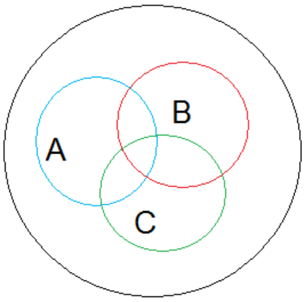


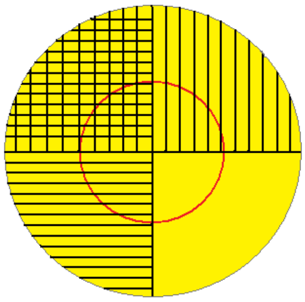


На первом рисунке круг А – это подмножество тех элементов данного множества, которые обладают свойством А, а область вне круга, т.е. область А*, - это подмножество тех элементов, которые свойством А не обладают. Аналогично круг В и область вне его.

На втором рисунке подмножества А, А*, В*, В изображены по-другому: подмножество А – это область слева от вертикально черты, а подмножество А* - это область справа от этой черты. Аналогично изображены В и В*: область В – это верхний полукруг, а область В* - это нижний полукруг.

в) Пусть дано некоторое множество и указаны три свойства: А, В, С. В этом случае данное множество распадается на восемь частей. Это можно изобразить двумя способами.

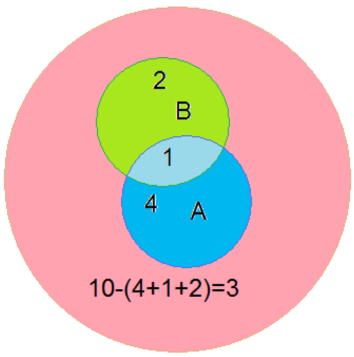




Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера

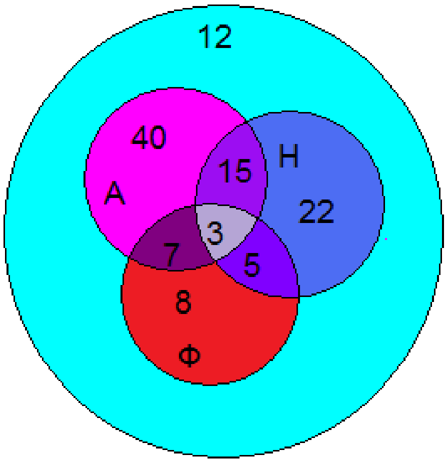
Задача №1. Сколько натуральных чисел из первого десятка не делится ни на 2, ни на 3?

Решение. Для решения задачи удобно воспользоваться кругами Эйлера. В нашем случае три круга: большой круг – это множество чисел от 1 до 10, внутри большого – два меньших круга, пресекающихся друг с другом. Пусть множество чисел, кратных 2– это множество А, а множество чисел, кратных 3 – множество В. Рассуждаем. На 2 делится каждое второе число. Значит, таких чисел будет 10:2=5. На 3 делится 3 числа (10:3). На 2 и 3 делятся те числа, которые делятся на 6. Такое число только одно. Поэтому множество А состоит из 5-1=4 чисел, множество В – 3-1=2 чисел. Отсюда следует, что в первом десятке содержится 10-(4+1+2)=3 числа.



Задача №2. С помощью кругов Эйлера можно ответить на множество вопросов, поставленных к одному условию задачи.

Пусть круг А изображает всех учащихся, говорящих по-английски, круг Н – говорящих на немецком языке, Круг Ф – говорящих по-французски. *Сколько учащихся говорит: а) на всех* *трех языках? б) по-английски и по-немецки? в) по-французски? Сколько всего учащихся, говорящих на иностранном языке? Сколько из них не говорит по-французски? Сколько из них не говорит по-немецки? Сколько из них не говорит на иностранном языке?*

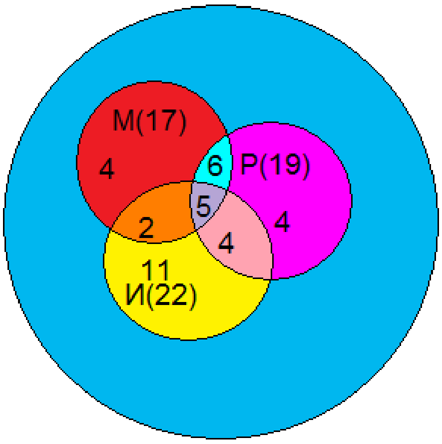


Ответ: а) На всех трех языках говорят 3 ученика; б) По-английски и по-немецки – 15 человек; в) только по-французски – 8 учащихся. Всего 100 (40+7+3+15+5+22+8) ребят, говорящих на иностранных языках. По-французски не говорят 77учащихся (100-(8+5+7+3) и т.д.

Кроме данных вопросов к этой задаче можно составить ещё множество других.

Задача №3. В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике – 17 человек и по истории – 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по русскому языку – 4 человека, по математике – 4 человека, по истории – 11 человек. Семь учеников имеют «тройки» и по математике и по истории, а 5 учеников – «тройки» по всем предметам. Сколько человек учится без «троек»? Сколько человек имеют «тройки» по двум из трех предметов?

Решение. Нарисуем круги Эйлера. Внутри большего круга, изображающего всех учеников класса, поместим три меньших круга М, Р, И, означающих соответственно математика, русский язык и история.

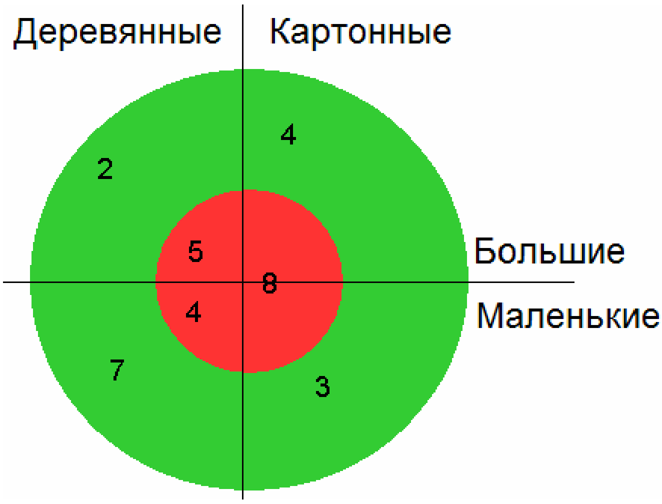


Дальнейшие расчеты не представляют большого труда. Так как число ребят, имеющих «тройки» по математике и истории, равно 7, то число учеников, имеющих только две «тройки» - по математике и по истории, равно 7-5=2. Тогда 17-4-5-2=6 учеников имеют две «тройки» - по математике и по русскому языку, а 22-5-2-11=4 ученика только две «тройки» - по истории и по русскому языку. В этом случае без «тройки» учится 40-22-4-6-4=4 ученика. А имеют «тройки» по двум предметам из трех 6+2+4=12 человек.

Задача № 4. Задача, решаемая с помощью диаграммы Эйлера – Венна.

Ребятам поручили изготовить кубики. Несколько кубиков сделали из картона, а остальные из дерева. Кубики были двух размеров: большие и маленькие. Часть из них покрасили в зеленый цвет, другую – в красный. Получилось 16 зеленых кубиков. Зеленых кубиков большого размера было 6. Больших зеленых из картона было 4. Красных кубиков из картона было 8,красных кубиков из дерева – 9. Больших деревянных кубиков было 7, а маленьких деревянных кубиков было 11. Сколько же всего получилось кубиков?

Решение. Выполняем рисунок.



Заполняем диаграмму.

1) Надо начинать с того подмножества, для которого указаны три свойства. Это большие зеленый кубики из картона – таких кубиков 4.

2) Далее ищем подмножества, для которого указаны два свойства из перечисленных трех. Это большие зеленые кубики – 6. Но это подмножество состоит из картонных и деревянных. Картонных было 4. Значит, деревянных 6-4=2.

3) Больших деревянных кубиков 7. Из них зеленых – 2. Значит, красных будет 7-2=5.

4) Красных деревянных кубиков 9., из них 5 – большие. Значит, маленьких красных кубиков из дерева будет 9-5=4.

5) Маленьких деревянных кубиков 11. Из них красных – 4. Значит, маленьких зеленых кубиков из дерева 11-4=7.

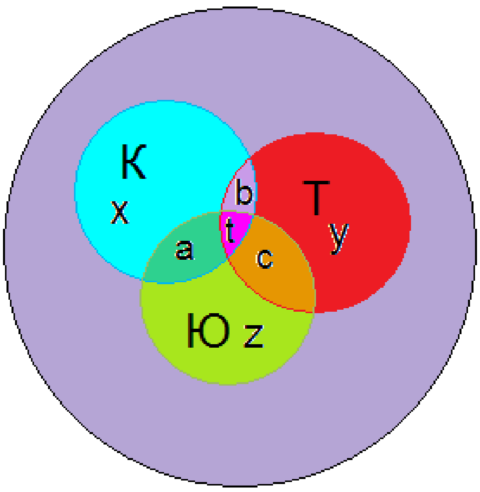
6) Всего зеленых кубиков 16. Зеленые кубики помещены в кольцеобразную часть, состоящую из четырех частей. Значит, маленьких зеленых кубиков из картона 16-(4+2+7)=3.

7) Осталось последнее условии: красных кубиков из картона было 8. Нам и не надо узнать, сколько из них маленьких, сколько больших.

8) Считаем: 2+5+8+4+4+7+3=33. Ответ: всего было изготовлено 33 кубика.

Задача № 5. Более сложные задачи можно решить с помощью кругов Эйлера и составлением системы уравнений. Ребят, которые хотят обмениваться различного рода журналами, собралось 10 человек. Среди них выписывают К - 6 человек, Т – 5 человек, Ю – 5 человек, К и Т – 3 человека, Т и Ю -2 человека, К и Ю – 3 человека., а один человек не выписывает ни одного журнала., но читает все эти журналы в библиотеке. Надо узнать, сколько человек выписывают все три журнала, сколько – два, а сколько – только один журнал.

Решение. Пусть большой круг, состоящий из 10 человек, – это множество всех ребят, обменивающихся журналами. Внутри большого круга нарисуем три меньших круга: К, Т, Ю, которые изображают ребят, подписавшихся на соответствующие журналы.. Известно, что один человек не выписывает ни одного журнала. Значит, в области, расположенной вне кругов К, Т, Ю, запишем 1. В остальных ячейках получившегося рисунка запишем буквы a, b, c, x, y, z, t, которые будут обозначать число ребят, подписавшихся на соответствующие журналы.



$$\begin{cases} x+a+b+t=6, \\ y+b+c+t=5, \\ z+a+c+t=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+t=3, \\ c+t=2, \\ a+t=3. \end{cases}$$

Так как членов кружка было 10, то можно записать еще одно уравнение

$$(x+y+z)+(a+b+c)+t+1=10 \quad (1)$$

Складывая уравнения первой системы,

получим $(x+y+z)+2(a+b+c)+3t=16$ (2).

Складывая уравнения второй системы, получим $(a+b+c)+3t=8$ (3).

Подставляя во (2) уравнение (1) и (3), получим $10-t-1+8=16$

Отсюда t = 1, b = 2, c = 1, a =2. Значит, a + b + c = 5.

Вычисляя далее, получаем: x =1, y = 1, z = 1, т.е. x+y+z =3.

Итак, 3 – это число ребят, подписавшихся только на один журнал, 5 – это число ребят, подписавшихся на два журнала, а 1 – число ребят, подписавшихся на все три журнала.

Составление задач, имеющих практическое значение.

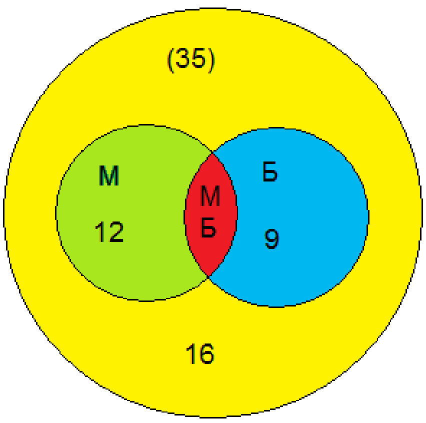
Задача 1. В классе 35 учеников. В математическом кружке из них 12 занимаются, в биологическом - 9, а 16 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой.

Решение**:** Мы видим, что кружки посещают 19 ребят, так как 35 - 16=19, из них 10 человек посещают только математический кружок (19-9=10) и 2 биолога (12-10=2) увлекаются математикой.

Ответ: 2 биолога.

С помощью кругов Эйлера легко увидеть и другой способ решения задачи.

Количество учеников изобразим с помощью большого круга, а внутри поместим круги поменьше.



Очевидно, что в общей части кругов окажутся те самые биологи-математики, о которых спрашивается в задаче. Теперь посчитаем: Внутри большого круга 35 учеников, внутри кругов

М и Б : 35-16=19 учеников, внутри круга М - 12 ребят, значит, в той части круга Б, которая не имеет ничего общего с кругом М, находится 19-12=7 учеников, следовательно, в МБ находится 2 ученика (9-7=2). Таким образом, 2 биолога увлекаются математикой.

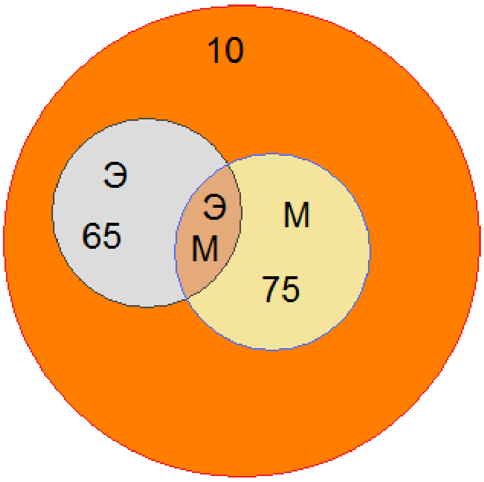
1)35-16=19(чел.);

2) 12+9=21 (чел.);

3)21-19=2(чел.).

Ответ: 2 биолога.

Задача 2. Из 100 семиклассников, выполнивших практическое задание по физике, 75 сделали модели, а 65 эскиз фонтана, а 10 человек ни чего не сделали. Сколько учеников сделали модель и эскиз?



Решение: В большом круге, изображающем 100 семиклассников, поместим 2 меньших круга, изображающих учеников, выполнивших модель и эскиз фонтана.

Мы видим, что 90 учеников (100-10)выполнили хотя бы одну часть задания; 15 учеников (90-75) сделали только эскиз фонтана, 75-15=50 – учеников сделали эскиз и фонтан.

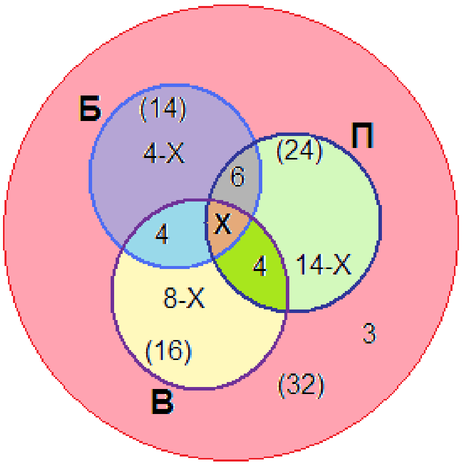
Ответ: 50 учеников.

Задача 3. В 5 классе нашей школы 22, в 6 классе – 16, в 7 классе – 23 ребят. Известно, что кружки по лыжам, шахматам и спортивным играм ходят 4 человека. Каждые 2 секции посещают 9 человек. Сколько человек ходит из каждого класса на секции? Сколько учеников не ходит ни на какой спортивный кружок?

Решение: Если на все три кружка ходят 4 ученика, а на каждые два – 9 человек, то две секции с 5 и 6 класса, с 6 и 7 класса, с 5 и 7 класса посещают по 5 человек. Получаем 5+5+4=14 пятиклассников посещают кружки, 22-14=8 человек не ходят ни на какой кружков. Рассуждая также, из шестиклассников 16-14=2 ученика никуда не ходя, а из семиклассников – 23-14=9 человек.

Ответ: 14 учеников с каждого класса посещают кружки, не ходят ни на какой из 5-ого – 7, из 6-ого – 2, из 7-ого – 9 учеников.

Задача 4. В классе 32 человека. Из них 14 играют в баскетбол, 24 - в пионербол, 16 - в волейбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и пионерболом - шестеро, баскетболом и волейбол - четверо, пионерболом и волейболом - четверо. Трое ни чем не занимаются. Сколько ребят увлекается всеми видами игры?



Решение. Воспользуемся кругами Эйлера.

1)32-3=29(ч.) – играют хотя бы в одну игру.

2)14-6-4-X=4-X (ч.) – играют только в баскетбол.

3)24-6-4-X=14-X (ч.) – играют только в пионербол.

4)16-4-4-X=8-X (ч.) – играют только в волейбол.

5)4-X+14-X+8-X+5+6+4=29 (ч.)

41-3X=29

3X=12

X=4(ч.)

Ответ: четыре человека увлекаются всеми тремя видами спорта.

Практическая работа № 4. Решение текстовых задач на движение, на совместную работу, на числовые зависимости:

Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, время, а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении этих задач принимают следующие допущения:

Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.

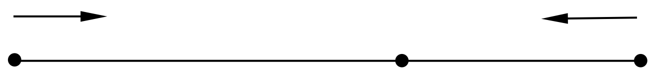
Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.

Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость течения которой равна y, то скорость движения тела по течению считается равной $(x+y)$, а против течения – $(x-y)$.

При решении задач на движение рекомендуется сделать рисунок, отображающий все условия задачи. При этом решающий задачу должен выбрать схему решения: какого вида уравнения составлять, то есть что сравнивать время, затраченное на движение на отдельных участках пути, или пройденный каждым объектом путь.

При решении задач такого типа часто необходимо узнать время встречи двух объектов, начинающих движение одновременно из двух точек с разными скоростями и движущихся навстречу друг другу либо в случае, когда один объект догоняет другой.

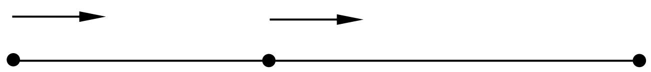
Пусть расстояние между точками A и B равно S. Два тела начинают движение одновременно, но имеют разные скорости v_1 и v_2. Пусть C – точка встречи, а t – время движения тел до встречи. В случае движения навстречу друг другу имеем



$AC=v_1t$, $BC=v_2t$. Сложим эти два равенства:

$$AC+CB=v_1t+v_2t=(v_1+v_2)t \;\Rightarrow\; AB=S=(v_1+v_2)t \;\Rightarrow\; t=\frac{S}{v_1+v_2}.$$

Если одно тело догоняет другое, то теперь получаем $AC=v_1t$, $BC=v_2t$. Вычтем эти равенства:



$AC-BC=(v_1-v_2)t$.

Так как $AC-BC=AB=S$, то время, через которое первое тело догонит второе, определяется равенством

$$t=\frac{S}{v_1-v_2}.$$

Задача 1. Турист, идущий из деревни на станцию, пройдя за первый час 3км, рассчитал, что он опоздает к поезду на 40мин. если будет двигаться с той же скоростью. Поэтому, остальной путь он проходит со скоростью 4км/ч и прибывает на станцию за 45мин. До отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

Решение: 1) Задача на движение.

Речь идет о движении одного человека, известна первоначальная скорость движения и скорость движения, после первого часа пути.

Известно, насколько он опоздает, если будет двигаться с первоначальной скоростью, и насколько времени придет раньше, изменив скорость движения.

Найти нужно одну величину – расстояние от деревни до станции, поэтому введем одну переменную (вместе с тем, движение туриста описывают два условия, поэтому можно ввести две переменные).

Заметим, что в условии задачи время дано как в минутах, так и в часах, поэтому переведем минуты в часы: 40мин. = 40/60ч.=2/3ч, 45мин. = 45/60ч. = 3/4ч.

1 способ.

2) Пусть x км – расстояние от деревни до станции.

3) Тогда $\frac{x}{3}$ км/ч – время движения туриста от деревни до станции с первоначальной скоростью;

$\frac{(x-3)}{4}$ – время движения туриста со скоростью 4км/ч;

$\frac{(x-3)}{4}+1$ – время, затраченное туристом на путь от деревни до станции;

По условию $\frac{(x-3)}{4}+1+\frac{3}{4}$ - время отхода поезда и $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$ тоже время отхода поезда, поэтому можно составить уравнение: $\frac{(x-3)}{4}+1+\frac{3}{4}=\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

4) Решим полученное уравнение: $\dfrac{x-3+4+3}{4}=\dfrac{x-2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x=20$.

5) Через x мы обозначили расстояние между деревней и станцией. Получили положительное число, которое удовлетворяет условиям задачи.

2 способ.

1) Пусть x км – расстояние от деревни до станции; y – время отправления поезда.

2) Тогда $\dfrac{x}{3}$ км/ч – время движения туриста от деревни до станции с первоначальной скоростью;

$\dfrac{(x-3)}{4}$ – время движения туриста со скоростью 4км/ч;

$\dfrac{(x-3)}{4}+1$ – время, затраченное туристом на путь от деревни до станции;

По условию составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

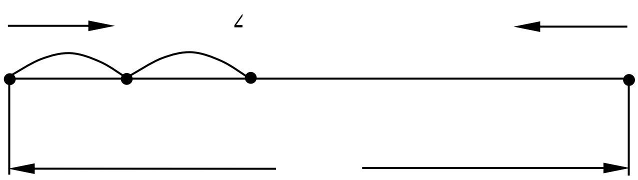
$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{3}=y \\ \dfrac{x-3}{4}+1+\dfrac{3}{4}=y \end{cases}$$

3) Решим эту систему: $\begin{cases} x=3y+2, \\ x=4y-4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=20, \\ y=6 \end{cases}$

Ответ: расстояние между деревней и станцией равно 20км.

Задача 2. Расстояние между городами А и В равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из А в В, другой из В в А. Пройдя 20 км, поезд, идущий из А в В, останавливается на полчаса, затем, пройдя 4 минуты, встречает поезд, идущий из В. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Найдите скорости поездов.

Решение:



1) Отобразим все условия задачи на рисунке.

Заметим, что если время в условии задачи выражено как в часах, так и в минутах, то минуты надо перевести в часы. В нашем случае 4 мин=4/10 часа=1/15 часа.

2) Так как в задаче надо определить две величины, введем две переменные и составим два уравнения.

Пусть x км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта А;

y км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта В.

3) Так как в задаче известно расстояние, выразим время через скорость и расстояние.

$\frac{20}{x}$ – время, за которое поезд из А прошел 20 км.

$\frac{20}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{20}{x}+\frac{17}{30}$ – время, затраченное поездом из А до встречи в пункте D.

$\frac{1}{15}\cdot x$ – расстояние, которое прошел поезд из А за 4 минуты после остановки.

Тогда поезд из А до встречи в пункте D прошел $20+\frac{x}{15}$ км.

$60-\left(20+\frac{x}{15}\right)=40-\frac{x}{15}$ км – расстояние, пройденное поездом из В до встречи.

$\frac{40-\frac{x}{15}}{y}$ – время, пройденное поездом из В до встречи в пункте D.

Так как по условию в пункте D поезда встретились, они затратили на путь до встречи одинаковое время, поэтому получаем первое уравнение: $\frac{20}{x}+\frac{17}{30}=\frac{40-\frac{x}{15}}{y}$.

С другой стороны, выразим время движения поездов после встречи в пункте D.

Так как $\mathrm{AD}=20+\frac{x}{15}$, то $\frac{20+\frac{x}{15}}{y}$ – время движения поезда из В после встречи.

Так как $\mathrm{DB}=40-\frac{x}{15}$, то $\frac{40-\frac{x}{15}}{x}$ – время движения поезда из А после встречи.

По условию $\frac{20+\frac{x}{15}}{y}=\frac{40-\frac{x}{15}}{x}$.

Таким образом, мы составили систему двух уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases}\frac{20}{x}+\frac{17}{30}=\frac{40-\frac{x}{15}}{y};\\ \frac{20+\frac{x}{15}}{y}=\frac{40-\frac{x}{15}}{x}.\end{cases}$$

4) Решим систему, для чего из первого уравнения выразим y и подставим это выражение вместо y во второе уравнение.

$$y=\frac{40-\frac{x}{15}}{\frac{20}{x}+\frac{17}{30}} \Rightarrow \left(20+\frac{x}{15}\right):\frac{40-\frac{x}{15}}{\frac{20}{x}+\frac{17}{30}}=\frac{40-\frac{x}{15}}{x} \Leftrightarrow \left(20+\frac{x}{15}\right)\left(\frac{20}{x}+\frac{17}{30}\right)x=\left(40-\frac{x}{15}\right)^2.$$

Решим полученное уравнение:

$$\left(20+\frac{x}{15}\right)\left(20+\frac{17x}{30}\right)=1600-\frac{16}{3}x+\frac{x^2}{225} \Leftrightarrow x^2+540x-36000=0 \Leftrightarrow x_1=60; \quad x_2=-600.$$

Так как x – скорость, то x_2 не подходит по смыслу задачи. Подставим полученное значение x в выражение для y

$$y=\frac{40-\frac{60}{15}}{\frac{20}{60}+\frac{17}{30}}=\frac{36}{\frac{54}{60}}=\frac{36\cdot 60}{54}=40.$$

Ответ: $v_A=60$ км/ч, $v_B=40$ км/ч.

Решение текстовых задач на совместную работу:

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой может не указываться и не являеться искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением

$$p=\frac{1}{t}.$$

Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.

Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,

y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность труда.

$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$ – время, за которое они выполнят задание, работая вместе.

Задача 1. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 минут совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 часа 15 минут. За какое время мог бы выполнить работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму для этого понадобится на 1 час больше, чем первому.

Решение: 1) Задача на совместную работу. Необходимо найти две величины.

2) Пусть x – время работы первого по выполнению всей работы.

y – время работы второго рабочего.

3) По условию $x=y-1$, и первое уравнение составлено.

Пусть объем всей работы равен 1.

Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.

Так как они работали 45 мин.$=3/4$ часа совместно, то

$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ – объем работы, выполненной рабочими за 45 минут.

Так как второй рабочий работал один 2 часа 15 минут$=2\frac{1}{4}=9/4$ часа, то

$\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{y}$ – объем работы, выполненной вторым рабочим за 2 часа 15 минут.

По условию $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1.$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений: $\begin{cases} x=y-1; \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1. \end{cases}$

3) Решим полученную систему, для этого выражение для x из первого уравнения подставим во второе

$$\frac{3}{4(y-1)}+\frac{3}{y}=1 \Rightarrow 4y^2-19y+12=0 \Rightarrow y_1=\frac{3}{4} \text{ ч. и } y_2=4 \text{ ч.}$$

5) Из двух значений для y выберем то, которое подходит по смыслу задачи $y_1=45$ мин., но 45 мин. рабочие работали вместе, а потом второй рабочий работал еще отдельно, поэтому $y_1=\frac{3}{4}$ не подходит по смыслу задачи. Для полученного $y_2=4$ч. найдем из первого уравнения первоначальной системы значение x: $x=4-1 \Rightarrow x=3$ ч.

Ответ: первый рабочий выполнит работу за 3 часа, второй – за 4 часа.

Замечание: эту задачу можно было решить, не вводя вторую переменную *y*, а выразить время работы второго рабочего через *x*, тогда нужно было составить одно уравнение и решить его.

Задача 2. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала за 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

Решение. 1) Задача на совместную работу, которую производят две бригады.

2) Пусть x деталей в час изготовляет первая бригада (производительность первой бригады).

y – производительность второй бригады.

$x+y$ – совместная производительность бригад.

Так как вместе они сделали 72 детали, то

$\frac{72}{x+y}$ – время совместной работы бригад.

Так как бригады работали с 8 до 15 часов, всего 7 часов, то

$7-\frac{72}{x+y}$ – время работы бригад раздельно, тогда

$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ – число деталей, которое изготовила первая бригада, работая отдельно

$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ – число деталей, которое изготовила вторая бригада, работая отдельно

По условию $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8$ или $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8$

Составим второе уравнение. По условию:

$x+1$ – производительность труда первой бригады на другой день.

$y-1$ – производительность труда второй бригады на другой день.

$x+1+y-1=x+y$ – совместная производительность (такая же, как и в первый день).

Так как бригады работали с 8 до 13 часов – всего 5 часов, то

$\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x+1)$ – число деталей, которые изготовила первая бригада, работая отдельно, во второй день.

$\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(y-1)$ – число деталей, которые изготовила вторая бригада, работая отдельно, во второй день.

По условию $\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(y-1)=8$ или $\left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8$.

Таким образом, мы составили систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\left(7-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y)=8;\\ \left(5-\dfrac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.\end{cases}$$

3) Решим эту систему методом замены переменных:

Пусть $\dfrac{72}{x+y}=u, \quad x-y=v$ ....(*)

Тогда имеем: $\begin{cases}(7-u)v=8;\\ (5-u)(v+2)=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7v-uv=8;\\ 5v-uv-2u+2=0.\end{cases}$

Выразим из первого уравнения $u=\dfrac{7v-8}{v}$ и подставим во второе уравнение

$$5v-\frac{7v-8}{v}v-2\cdot\frac{7v-8}{v}+2=0 \Rightarrow v^2+2v-8=0 \Rightarrow v_1=2, \quad v_2=-4.$$

Значение $v_2=-4$ не подходит по смыслу задачи (из условия ясно, что производительность первой бригады выше, чем второй, а значит $x-y=v>0$). Найдем значение u, соответствующее $v_2=2$, подставив значение v_2 в выражение для u:

$$u=\frac{7\cdot 2-8}{2}=3.$$

Так как нам нужно найти значения x и y, подставим полученные значения для u и v в (*)

$$\begin{cases}\dfrac{72}{x+y}=3;\\ x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{72}{2y+2}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{36}{y+1}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=13.\end{cases}$$

Ответ: 13 деталей в час изготавливала первая бригада; 11 деталей в час изготавливала вторая бригада.

Решение задач на числовые зависимости:

К этому классу задач можно отнести достаточно много задач с различным содержанием. Мы рассмотрим задачи, в которых необходимо найти цифры многозначного числа, если известны некоторые соотношения, накладываемые на эти цифры или свойства самого числа.

Для успешного решения таких задач необходимо учитывать следующее. Любое *n*-значное число $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0}$ можно представить в виде суммы разраядных единиц (систематическая запись числа):

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}....a_1a_0} = 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + ... + 10 \cdot a_1 + a_0$$

В этой записи $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ - цифры числа А.

Задача 1. Сумма цифр трехзначного числа равна 12; сумма цифр его сотен и десятков кратна 9. Если от искомого числа отнять 99, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение. 1) В задаче речь идет о трехзначном числе.

Известна сумма всех цифр этого числа, свойство суммы сотен и десятков. Известно что получиться, если от числа отнять 99.

Нужно найти это число.

2) Пусть x – число сотен неизвестного числа;

y – число десятков неизвестного числа;

z – число единиц неизвестного числа.

3) Тогда, по условию можно сразу составить первое уравнение: $x + y + z = 12$.

По условию сумма сотен и десятков неизвестного числа кратна 9, т.е. $x + y = 9k$. Заметим, что x и y – это цифры и сумма трех цифр равна 12, поэтому $k = 1$. Получаем второе уравнение: $x + y = 9$.

Составим уравнение по последнему условию, которое есть в тексте задачи:

$$\overline{xyz} - 99 = \overline{zyx} \Rightarrow 100x + 10y + z - 99 = 100z + 10y + x \Rightarrow 99x - 99z = 99 \Rightarrow x - z = 1$$

Таким образом, необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + y = 9 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

4) Подставив в первое уравнение системы 9, вместо $x + y$, получим $z = 3$. Подставив полученное значение в третье уравнение, найдем $x = 4$. Подставим это значение во второе уравнение системы, получим $y = 5$

Таким образом, искомое число: 453.

Нетрудно убедиться в том, что 453 – 99 = 354

Ответ: 453

Задачи для практического занятия:

1. Из двух городов, расстояние между которыми 960 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда и встретились через 8 часов после выхода. Найдите скорость каждого поезда, если один проходит в час на 16 км больше другого.
2. Расстояние между городами А и В равно 153 км. Из А в В выехала легковая автомашина со скоростью 80 км/ч. Через $\frac{3}{5}$ ч после этого из В в А выехал автобус со скоростью, составляющей $\frac{3}{4}$ скорости легкового автомобиля. Через сколько часов после своего выхода автобус встретится с автомобилем?
3. Два пешехода, находящиеся в пунктах А и В, между которыми по прямой расстояние 27км., выходят из этих пунктов одновременно, двигаясь по прямой АВ. Они встречаются через 3ч., если идут навстречу друг другу; и один догоняет другого через 9ч., если идут в одном направлении. Найдите скорости каждого пешехода.
4. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?
5. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?
6. Три цистерны одинакового объема заполняют водой, причем в первую поступает в минуту 120л, а во вторую – 40л в минуту. Известно, что в начальный момент первая цистерна пуста, объем воды в третьей цистерне в два раза меньше, чем во второй, и все три цистерны будут заполнены одновременно. Сколько литров воды поступает в минуту в третью цистерну.
7. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет больше утроенного первоначального числа на 1. Найдите исходное число

Практическая работа № 5. Задачи, решаемые с помощью применения «закона сохранения массы и объёма», задачи на вычисление процентного прироста с применением формул простых и сложных процентов. Часть 1.

Задача 1. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг. морской воды, чтобы соли в последней составляло 2%?

Решение.

Известно, что морская вода содержит 5% соли, то можем найти количество «чистой» соли в 40 кг. морской воды: (40/100) 5 (кг.)

Количество пресной воды, которое надо добавить к морской, чтобы получить

2%-ый раствор соли, обозначим за **x.**

Найдем массу «чистой» соли в разведенном растворе: [(40+x)/100]

Но так как к морской воде добавляли пресную воду, то масса «чистой» соли в

40 кг. Морской воды будет равна массе «чистой» соли в разведенном растворе, согласно закону сохранения массы. Получаем уравнение:

[(40+x)/100]

Решив его находим x=60. Это означает надо прибавить 60 кг. Пресной воды к морской, чтобы получит 2%-ый раствор соли.

Ответ: 60 кг.

Задача 2. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т. стали с содержанием никеля в 30%?

Решение.

Пусть **x *т.*** нужно взять стали первого сорта, и y т. - стали второго сорта. Тогда, учитывая условие задачи, можно составить уравнение:

x +y = 140. (1)

Этот сплав содержит 30% никеля. Тогда масса чистого никеля (140/**100)30**т.

Известно, что сталь первого сорта содержит 5% никеля, а сталь второго

сорта - 40% никеля. Тогда можем найти массу «чистого» никеля:

1 сорт - (x/100)5 т. - масса никеля;

2 сорт - (x/100)5 т. - масса никеля.

Применяя закон сохранения массы, получаем уравнение:

(x/100)5 +(x/100)5 = (140/ 100) 30. (2)

учитывая уравнения (1) и (2), получаем систему:

x +у = 140,

(x/100) 5 + (x/1005 = (140/100) 30.

Решив данную систему, находим x = 40, y = 100.

Ответ: 40 т., 100 т.

Решение задач на нахождение концентрации раствора, процентного содержания вещества

Задача 1. Определить процентное содержание спирта в растворе, полученном при смешивании пяти литров 20% -го и шести литров 35% - го растворов спирта.

Решение.

Количество «чистого» спирта в первом растворе - (5/100)- 20 л.,

а во втором - (6/100) 35 л.

Обозначим за **x** процентное содержание спирта в смешанном растворе.

Применяя формулу для нахождения процентного содержания вещества: (количество «чистого» вещества / массу смеси)100%,

получаем уравнение:

(5/100)20 + (6/100)35100%.

11

Решив его, находимое = 310/11 %.

Ответ: 310/11 %.

Задача 2. Два става с массами m_1 и $т_2$ кг. содержат медь и серебро в отношениях

12 : 1 и 16 : 3 соответственно. Эти два сплава сплавили с $т_3$ кг. чистого серебра и $т_4$ кг. чистой меди. Определить процент серебра в образовавшемся сплаве.

Решение.

1 сплав	2 сплав	Ag	Cu
m_1	m_2	m_3	m_4

где Ag - серебро, Cu - медь.

Найдём массу нового сплава по закону сохранения: m_1+ m_2+ m_3+ m_4.

В первом сплаве отношение количества меди к количеству серебра равно 12 : 1. Значит масса серебра в первом сплаве равна (1/13)m_1 кг. Аналогично находим массу серебра во втором сплаве: (3/19) m_2 кг. По закону сохранения массы находим массу серебра в новом сплаве:

(1/13)m_1 + (3/19)m_2 + m_3

Следовательно, процентное содержание вещества в новом сплаве равно: .

(1/13)m_1 + (3/19)m_2 + m_3 100%.

$M_1 + m_2 + m_3 + m_4$

Задачи на нахождение массы вещества, меняющейся в результате изменения влажности.

Задача 1. Влажность сухой цементной смеси составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезённой смеси, если со склада было отправлено 400 кг. Решение.

1 способ:

Известно, что влажность сухой цементной смеси составляет 18%, то «сухое» вещество составляет 82%. Найдём массу сухого вещества: (400/100) 82 кг.

Так как из-за дождей влажность увеличилась, следовательно, масса тоже увеличилась. Пусть новая масса цементной смеси **-x** кг. Влажность этой смеси стала 18% + 2% = 20%. Значит «сухое» вещество составляет 80%, а масса его будет (x/100) 80 кг. Но масса «сухого» вещества до дождей и после дождей останется прежней. Получаем уравнение:

Находим массу «сухого» вещества: (400/100)82=328 кг. так как из- за дождей влажность стала 20%, то «сухое» вещество составляет 80%. Но это то же самое «сухое» вещество, что и было в смеси до дождей. Поэтому можем записать:

328 кг. это 80%.

Учитывая, что 80% = 0,8 и применяя правило нахождения количества по процентам, получаем: 328/0,8 =410 кг.

Ответ: 410 кг.

2 способ:

Пусть новая масса цементной смеси **-x** кг.

Кол-во цементной Содержание

смеси сухого вещества

400 кг. - 82%

x кг. - 80%

(Обратная пропорциональность)

Составим пропорцию:

$400 : x = 80 : 82$

$x = 400 82 : 80$

$x = 410$

Ответ: 410 кг.

Задачи на вычисление процентного прироста с применением формул простых и сложных процентов

Задача 1. Зарплату повысили на р %. Затем новую зарплату повысили на 2р% в результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

Решение

Начальную зарплату обозначим **-**$\mathbf{A}_0$. Тогда по формуле простых процентов найдём зарплату после повышения на **р%;** $\mathbf{A_1}=\mathbf{A_0}(1 + \boldsymbol{p/100})$**.**

Затем зарплату ещё повысили на **2р%;**

$\mathbf{A}2 = \mathbf{A_1}(1 + \mathbf{2p/100}) = \mathbf{A_0}\ (1 + p/100)(1+2p/100)$.

Известно, что в результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза, т.е. $\mathbf{A}_2 = 1{,}32\ \mathbf{A_0}$. Получаем уравнение:

$\mathbf{Ao}(\boldsymbol{1} + \mathrm{p}/100)(1 + 2\mathrm{p}/100) = 1{,}32\ \mathbf{Ao}$.

Решив его, находим **р** = 10%, а 2**р** = 20%.

Ответ: 20%.

Задача 2. За первый год предприятие увеличило выпуск продукции на 8%. В следующий год выпуск увеличился на 25%. На сколько процентов вырос выпуск продукции по сравнению с первоначальным?

Решение

Первоначальный выпуск продукции обозначаем- A_0, а за p обозначим на сколько процентов вырос выпуск продукции за два года по сравнению с первоначальным

$A_1=A_0\ (1+8/100)$,

$A_2= A_1 (1+25/100)= A_0\ (1+8/100)(1+25/100)$,

$A_2=A_0\ (1+p/100)$.

Составим уравнение:

$A_0\ (1+8/100)(1+25/100)= A_0\ (1+p/100)$.

Решив уравнение, находим p=35%.

Ответ: 35%.

Задача 3. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Решение.

Пусть завод увеличивал выпуск продукции на **р** процентов. Тогда по формуле вычисления сложных процентов, получаем следующее уравнение:

$600\ (1+p/100)^2=726$.

Решим это уравнение:

$(1 + p/100)^2 = 121/100$,

$1 + p/100 = 11/10$ или $1 + p/100 = -11/10$ - не подходит по смыслу задачи.

Находим $p = 10$.

Ответ: 10%.

Задачи к практическому занятию:

1. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг. морской воды, чтобы содержание соли составляло 2 %?
2. Кусок сплава меди с оловом массой 12 кг. содержит 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску, чтобы получившийся сплав имел 40 % меди?
3. Сколько литров воды нужно долить до 5 л. 90%-ого спирта, чтобы получить 60 %-спирт?
4. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40 %. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 т. стали с содержанием никеля в 30 %?
5. Масса первого сплава на 3 кг. больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10 % цинка, а второй 40 % цинка. Новый сплав, полученный из первых двух, содержит 20 % цинка. Определить массу нового сплава.
6. При смешивании 40 %-го раствора соли с 10 %-ым раствором получили 800 г. раствора соли 21,25 %. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?
7. Если смешать 8кг. и 2 кг. раствора серной кислоты разной концентрации, то получим 12 %-ый раствор кислоты. При смешивании двух одинаковых масс тех же растворов получим 15 %-ый раствор. Определить первоначальную концентрацию каждого раствора.
8. Определить процентное содержание спирта в растворе, полученном: при смешивании пяти литров 20% -го и шести литров 35% -го растворов спирта.
9. Два сплава с массой m_1 и m_2 кг. содержат медь и серебро в отношениях 12: 1 и 16: 3 соответственно. Эти два сплава сплавили с m_3 кг. чистого серебра и m_4 кг. чистой меди. Определить процент серебра в образовавшемся сплаве.

Практическая работа № 5. Задачи, решаемые с помощью применения «закона сохранения массы и объёма», задачи на вычисление процентного прироста с применением формул простых и сложных процентов. Часть 2.

10. В двух различных сплавах золото и серебро относятся соответст- венно как 1: 2 и 2: 3. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы после совместной переплавки получить 19 г. нового сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 7: 12?
11. Влажность сухой цементной смеси составляет 18%. Во время пере- возки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу

привезённой смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

12. Собрали 140 кг. грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?
13. Свежие грибы содержат 92% воды, а сухие - 8 %. Сколько получится сухих грибов из 23 кг. свежих?
14. Имеется два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй - 26% меди. Процентное содержание цинка в обоих сплавах одинаково. Сплавив 150 кг. первого сплава и 250 кг. второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определить, сколько кг. олова содержится в новом сплаве.
15. В сосуд ёмкостью 6 л. налито 4 л. 70 %-го раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же ёмкости налито 3 л. 90 %-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужноперелить из второго сосуда в первый, чтобы в нём получился р%-ый раствор серной кислоты? Найти все значения р, при которых задача имеет решение.

Практическая работа № 6. Решение нестандартных задач. (Комбинаторные, логические задачи) Часть1.

Понятие «нестандартная задача» и их виды:

Какая задача по математике может называться нестандартной? Хорошее определение приведено в книге «Как научиться решать задачи» авторов Л.М. Фридмана, Е.Н. Турецкого.

«Нестандартные задачи – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения». Не следует путать их с задачами повышенной сложности. Условия задач повышенной сложности таковы, что позволяют ученикам довольно легко выделить тот математический аппарат, который нужен для решения задачи по математике. Учитель контролирует процесс закрепления знаний, предусмотренных программой обучения решением задач этого типа. А вот нестандартная задача предполагает наличие исследовательского характера. Однако если решение задачи по математике для одного учащегося является нестандартным, поскольку он незнаком с методами решения задач данного вида, то для другого – решение задачи происходит стандартным образом, так как он уже решал такие задачи и не одну. Одна и та же задача по математике в 4 классе нестандартна, а в 5, 6 классах она является обычной, и даже не повышенной сложности.

Итак, если решение задачи учащийся не знает, на какой теоретический материал ему опираться, он тоже не знает, то в этом случае задачу по математике можно назвать нестандартной на данный период времени.

Традиционно нестандартными для младших школьников являются:

некоторые виды *арифметических текстовых задач* (задачи на предположение, на движение мимо объектов с учетом их протяженности, на движение в одном направлении; задачи, решаемые способом уравнивания или замены данных, методом инверсии (т. е. с «конца»); задачи с неопределенными неизвестными);

некоторые виды геометрических задач (деление фигур на части, составление фигуры из частей, преобразование фигур);

логические задачи (на установление временных, пространственных, функциональных отношений; на активный перебор вариантов; на планирование деятельности; на установление сходства и отношения между элементами множеств; на оперирование категориями *все, некоторые, отдельные*); процессуальные задачи (задачи о переправах; задачи о переливаниях; задачи о взвешиваниях)

комбинаторные задачи (на упорядочение предметов; на выбор подмножеств и их упорядочение; на определение количества различных вариантов; на выбор наилучшего результата по определенным критериям).

Требования, предъявляемые к нестандартным задачам в начальной школе:

Использованию в практике преподавания в начальной школе нестандартных математических задач предшествует большая подготовительная работа по их отбору. Поэтому необходимо сформулировать требования, на основе которых осуществляется отбор задач для начального математического образования:

1. Задача, предъявляемая младшему школьнику, должна быть интересной и значимой для ученика, должна вызвать его желание к исследованию за счет:

- элементов новизны или занимательности в фабуле задачи как благоприятного фактора возбуждения интереса учеников к математике и мотивирования их интеллектуального труда;

- реальности описываемой в задаче ситуации, ее близости жизненному опыту ребенка;

- неожиданного, оригинального решения, требующего применения известных методов в необычных условиях, рационализации и упрощения уже известного приема.

2. Задача должна соответствовать возможностям учащихся начальных классов. Младший школьник должен не только хотеть, но и быть в состоянии решить предложенную задачу. Разочарование учеников слишком трудными математическими вопросами является одной из причин торможения их развития. Нерешенная задача отрицательно влияет на воспитание интереса к математике. Поэтому очень важно, особенно на начальном этапе обучения предмету, чтобы поставленные перед школьниками нестандартные задачи были ими успешно решены. В этой связи внедренные в содержание начального математического образования нестандартные задачи должны:

а) соответствовать по объему элементов и сложности их отношений уровню теоретических знаний и практическому опыту учащихся (в целях обеспечения возможности самостоятельного их решения или хотя бы его понимания);

б) иметь преимущественно лаконичные формулировки;

в) допускать практическое решение (необходимым условием этого является наличие небольших числовых данных), а также разные варианты решения и способы проверки его правильности. В то же время решение задачи не должно быть слишком легким, основанным на догадках, не требующих ни знаний, ни навыков практических действий.

3. Система нестандартных задач для начальной школы должна включать в себя все основные темы курса, тем самым обеспечивая отработку необходимых, предусмотренных программой знаний и умений, т. е. быть полной. Кроме этого, структурные характеристики задачи должны быть разноплановы: с полным (или недостаточным) набором условий, с наличием избыточных данных. Это приучает учеников не доверять внешнему облику задачи и не приступать к ее решению сразу, полагая, что внешний вид совпадает с действительным содержанием.

Эффективность обучения младших школьников решению нестандартных задач зависит, на наш взгляд, от нескольких условий. Во-первых, задачи следует вводить в процесс обучения в определенной системе с постепенным нарастанием сложности, так как непосильная задача мало повлияет на развитие учащихся. Во-вторых, необходимо предоставлять ученикам максимальную самостоятельность в поиске решения задач, давать возможность пройти до конца по неверному пути, убедиться в ошибке, вернуться к началу и искать другой, верный путь решения. В-третьих, нужно помочь учащимся осознать некоторые способы, приемы, общие подходы к решению нестандартных арифметических задач.

Задача 1. Бревно длиной 12 м распилили на 6 равных частей. Сколько распилов сделали?

После чтения задачи ученикам предлагается ответить на вопрос, решали ли они задачи такого вида и известен ли им способ решения таких задач.

Возможно, некоторые ученики ошибочно будут считать, что знают, как решить задачу: «Надо 12 м разделить на 6 равных частей». Учитель должен дать учащимся возможность найти результат, оценить его и убедиться в ошибке. (Разделив 12 на 6, мы узнали, что длина одной части равна 2 м. Но в задаче спрашивается, не какова длина одной части, а сколько сделали распилов. Следовательно, задача решена неправильно.) Затем ученики могут вновь прийти к ошибочному заключению: «Сколько частей, столько и распилов». Учитель предлагает проверить найденный ответ, сделав условный рисунок или чертеж. Ученики обозначают бревно прямоугольником или отрезком длиной 12 клеточек, делят его вертикальными засечками на 6 равных частей. Подсчитав число полученных засечек (распилов), они убеждаются, что их 5, а не 6, как они считали раньше. Эту задачу решили, не выполняя арифметических действий. Ответ получили, построив чертеж (рисунок). Под ним ученики записывают ответ задачи. Таким образом, учащиеся приходят к следующему выводу: при поиске решения незнакомой задачи полезно сделать чертеж (рисунок), так как работа с чертежом (рисунком) может являться способом решения задачи.

2. При решении нестандартных задач в некоторых случаях *часть данных целесообразно найти с помощью графических изображений (рисунков, чертежей), а часть - с помощью арифметических действий.*

Задача 2. Ширина занавески для окна равна 1 м 20 см. Надо пришить 6 колец на одинаковом расстоянии друг от друга (первое и последнее кольца должны располагаться по краям занавески). Сколько сантиметров надо оставлять между кольцами?

Следуя ранее выведенной рекомендации, ученики начинают делать схематический чертеж к данной задаче. Они показывают засечкой первое кольцо, откладывают отрезок любой выбранной длины, ставят вторую засечку, откладывают отрезок такой же длины, как первый, ставят третью засечку и так действуют до тех пор, пока не поставят 6 засечек. По полученному схематическому чертежу подсчитывают число равных частей, на которые 6 колец разделят занавеску.

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, остается разделить всю ширину занавески на 5 равных частей: 120 : 5 = 24 (см).

3. Иногда в процессе решения задачи *нужно делать дополнительные построения или перестраивать чертежи с учетом найденных чисел.* Это можно сделать при решении следующей задачи.

Задача 3. Муравей находится на дне колодца глубиной 30 м. За день он поднимается на 18 м, а за ночь сползает вниз на 12 м. Сколько дней нужно муравью, чтобы выбраться из колодца?

Самостоятельно решая эту задачу, учащиеся могут сделать чертеж (рис.1) и неверно решить задачу:

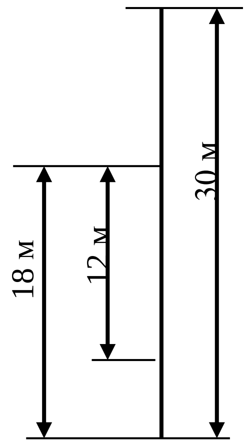


Рис. 1

1) 18 - 12 = 6 (м) - поднимается муравей за сутки.

2) 30 : 6 = 5 (сут.) - потребуется муравью, чтобы выбраться из колодца.

Учитель предлагает: а) проверить решение, показав на отдельных чертежах положение муравья в каждый день; б) в ходе решения подсчитывать, сколько метров остается муравью, чтобы выбраться из колодца.

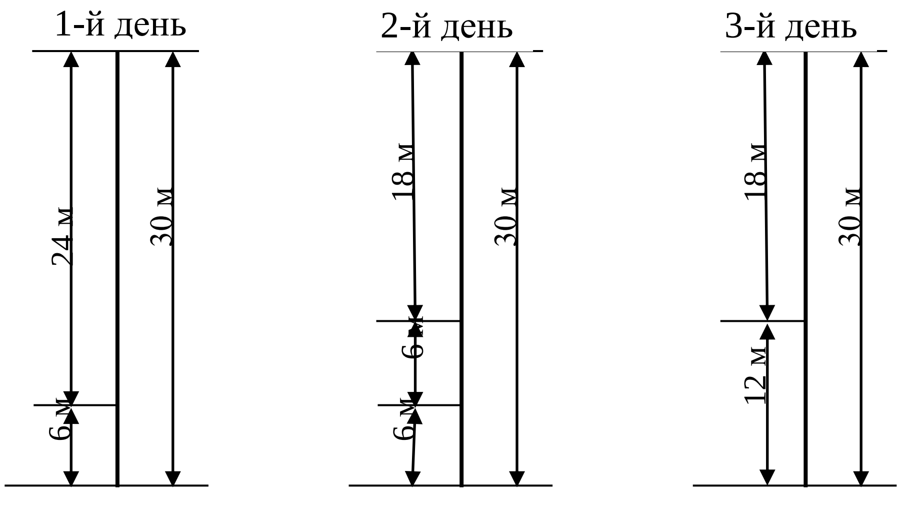


Рис. 2

Таким образом, ученики видят, что в третий день муравей поднимется на 18 м и выберется из колодца. Значит, сначала они решили задачу неправильно. А найти верный ответ им помогло последовательное построение нескольких чертежей, отражающих те изменения, которые происходили в реальной ситуации, описываемой в задаче.

Комбинаторные задачи и способы их решения

Комбинаторная задача – это задача, решение которой предполагает перебор всех возможных вариантов решения или подсчет их количества.

Способы решения комбинаторных задач делятся на две группы:

1) неформальные;

2) формальные.

Неформальный способ решения на первый план выводит сам процесс составления различных комбинаторных конфигураций. И главная его задача – быстро и правильно найти все возможные варианты.

К неформальным способам решения комбинаторных задач относят *полный* (непосредственный, хаотичный) *перебор.* Это самый элементарный способ, так как он не требует знания определений и формул. Поэтому именно его целесообразно использовать в начальной школе.

Сущность данного способа – перебрать, пересмотреть все возможные варианты и показать, что других быть не может. При этом важно, как организован процесс перебора, так как, если действовать случайным, хаотичным образом, то нельзя быть уверенным, что найдены все возможные комбинации. Чтобы избежать этого, нужно выполнять перебор по определенной системе, т.е. *систематический перебор*. Для этого используют комбинаторные таблицы, графы, «дерево решений».

Использование графа:

По определению Н.Я. Виленкина, *граф* - это «множество, состоящее из конечного числа точек, некоторые пары которых соединены дугами (такие графы называются неориентированными; если вместо дуг используются стрелки, то получится ориентированный граф, или, орграф)».

А.М. Пышкало, Л.П.Стойлова, В.В.Рожденственская *графом* называют «особый чертеж, состоящий из точек и линий, идущих из одной точки в другую».

Задача *:* На пришкольном участке растут 8 деревьев: яблоня, тополь, береза, рябина, дуб, клен, лиственница и сосна. Рябина выше лиственницы, яблоня выше клена, дуб ниже березы, но выше сосны, сосна выше рябины, береза ниже тополя, а лиственница выше яблони. Расположите деревья от самого низкого к самому высокому.

Решение: Вершины графа - это деревья, обозначенные первой буквой названия дерева. В данной задаче два отношения: — «быть ниже» и — «быть выше». Рассмотрим отношение —

«быть ниже» и проведем стрелки от более низкого дерева к более высокому. Если в задаче сказано, что рябина выше лиственницы, то стрелку ставим от лиственницы к рябине и т.д. Получаем граф, на котором видно, что самое низкое дерево – клен, затем идут яблоня, лиственница, рябина, сосна, дуб, береза и тополь.

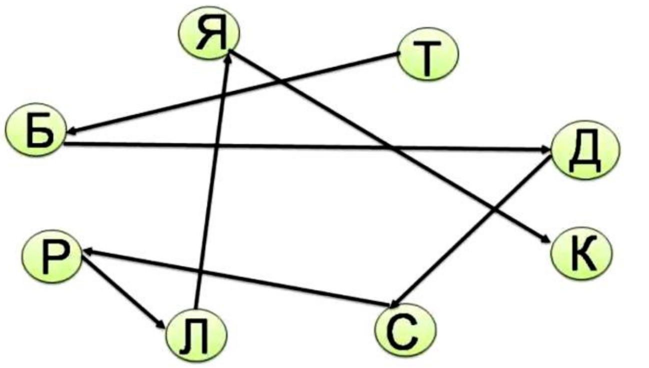


Рис. 9

Ответ: клен, яблоня, лиственница, рябина, сосна, дуб, береза, тополь.

Задача: В парке 5 беседок. Было решено от каждой беседки ко всем остальным проложить дорожку. Продолжи рисунок, покажи, какие дорожки будут сделаны. Посчитай, сколько всего будет дорожек.

Решение:

Вершины графа - это беседки, обозначенные треугольниками (рис. 10).

Рассмотрим отношение между каждой беседкой. В задаче сказано, что нужно провести дорожки к каждой беседке. Продолжаем рисунок, проведя дорожки. Получаем граф, на котором видно сколько дорожек нужно провести.

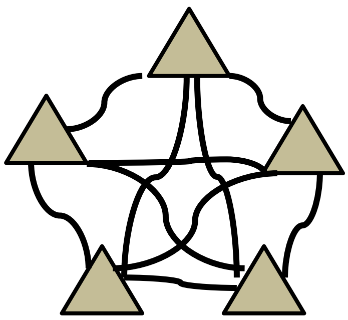


Рис. 10

Ответ: 10 дорожек.

Использование таблицы

Решение комбинаторных задач можно выполнить и с помощью таблиц. Они схожи с деревом возможных вариантов, поскольку предлагают наглядное решение ситуации. Для нахождения правильного ответа нужно сформировать таблицу, причем она будет зеркальной: горизонтальные и вертикальные условия будут одинаковыми. Возможные варианты ответов будут получаться на пересечении столбцов и строчек. При этом ответы на пересечении столбца и строки с одинаковыми данными получаться не будут, эти пересечения необходимо особо пометить, чтобы не запутаться при составлении итогового ответа.

Задача: Маша, Оля, Вера, Ира, Андрей, Миша и Игорь готовились стать ведущими на Новогоднем празднике. Назовите возможные варианты, если ведущими могут быть только одна девочка и один мальчик.

Решение. Составим таблицу: слева первый столбец - имена девочек, вверху первая строка - имена мальчиков.

Таблица 1

	Андрей	Миша	Игорь
Маша	Маша – Андрей	Маша - Миша	Маша – Игорь
Оля	Оля – Андрей	Оля – Миша	Оля – Игорь
Вера	Вера - Андрей	Вера – Миша	Вера – Игорь
Ира	Ира - Андрей	Ира - Миша	Ира - Игорь

Ответ: Все возможные варианты перечисляются в строках и столбцах таблицы.

Задача : У Кати 6 карандашей и две коробки: синяя и красная. Как она может разложить карандаши в эти коробки? Сколько различных вариантов распределения карандашей по коробкам ты насчитал?

Таблица 2

Синяя коробка	0	1	2	3	4	5	6
Красная коробка	6	5	4	3	2	1	0

Решение: Задача решается методом систематического перебора. Разложить карандаши можно так: в красную коробку положить все 6 карандашей, в синюю – ничего не класть; в красную положить 5 карандашей, в синюю – 1 и т.д. *Ответ:* 7 вариантов.

Использование дерева выбора (вариантов)

Некоторые комбинаторные задачи можно решить, только составляя схемы, в которых будет подробно указана информация о каждом элементе. Составление дерева возможных вариантов – еще один способ нахождения ответа. Он подходит для решения не слишком-то сложных задач, в которых имеется дополнительное условие.

Задача:: У Наташи есть 2 конверта: обычный и авиа, и 3 марки: прямоугольная, квадратная и треугольная. Сколькими способами Наташа может выбрать конверт и марку, чтобы отправить письмо?

Решение:

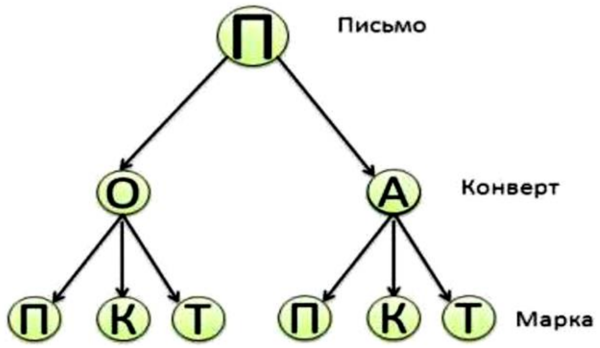


Рис. 11

Ответ: 6 способов.

При *формальном способе* решения нужно определить характер выборки, выбрать соответствующую формулу или комбинаторный принцип подставить числа и вычислить результат. Результат - это количество возможных вариантов, сами же варианты в этом случае не образовываются. Основные комбинаторные правила: сложения, умножения.

Использование правила суммы

Пусть даны m действий x_1, x_2,, …, x_m таких, что выполнение любого из них не зависит от выполнения остальных действий. Если действие x1 можно выполнить k1 способами (i=1,2, …, m), тогда действие, состоящие в том, что выполняется одно любое из данных действий, можно выполнить $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ способами.

Задача .

В вазе 6 белых цветов, 9 красных и 5 желтых. Сколькими способами можно взять из вазы один цветок?

Решение: Белый цветок можно выбрать 6 способами, красный - 9, жѐлтый – 5.На основании правила суммы заключаем, что или белый, или красный, или жёлтый цветок можно выбрать из вазы 6+9+5 способами.

Ответ. 20 способов.

Использование правила произведения

Если элемент x_1 можно выбрать k_1 способами, элемент x_2 – k_2 способами, …, элемент x_m - k_m способами, то набор (x_1, x_2, …, x_m) можно составить

$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$ способами.

Задача:. В магазине «Всё для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?

Решение: Чашку модем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать 6 · 4=24 способами (по правилу произведения).

Ответ: 24 способа.

Таким образом, для того, чтобы решить простую комбинаторную задачу, достаточно:

1) обозначить исходное множество, о котором идет речь в задаче; выяснить число его элементов;

2) определить тип выполняемой в задаче комбинаторной операции (упорядочивание, построение неупорядоченного подмножества, построение упорядоченного подмножества);

3) учитывая наличие или отсутствие повторения элементов в строящемся множестве, указать результат выполняемой комбинаторной операции;

4) подставить числовые данные в соответствующую формулу результата комбинаторной операции и вычислить ответ в задаче.

Для того, чтобы решить составную комбинаторную задачу, достаточно:

1) разбить исходную задачу на простые подзадачи и решить их с помощью сформулированного выше алгоритма;

2) ответить на вопрос исходной задачи, применив основные правила комбинаторики (правило суммы или правило произведения) к выделенным простым подзадачам.

Задачи на нахождение числа элементов в объединении и разности конечных множеств

Задача:

25 учеников класса изучают английский язык, немецкий — 27 учеников, причем 18 школьников изучают одновременно оба языка. Сколько всего человек в классе изучают эти иностранные языки?» — лучше выполнить с помощью диаграммы Эйлера-Венна или отрезков.

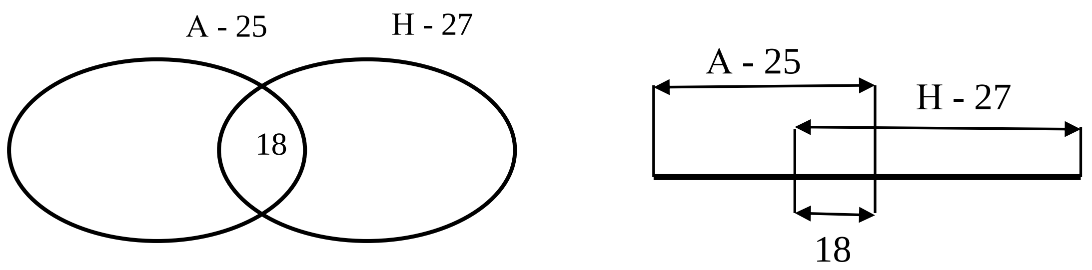


Рис. 12

Решение. Такая интерпретация условия задачи позволяет увидеть, что численное значение искомого не является суммой данных в тексте количеств учеников, изучающих какой-либо иностранный язык, поскольку число 18 содержится в этой сумме дважды. Поэтому для нахождения ответа на поставленный вопрос необходимо его удалить из полученного результата, т. е. решение задачи оформится выражением (25 + 27) – 18.

Ответ: 34 ученика в классе изучают эти иностранные языки.

Практическая работа № 6. Решение нестандартных задач. (Комбинаторные, логические задачи) Часть 2.

Логические задачи и способы их решения

Логические задачи – это задачи, при решении которых поиск ответа на вопрос осуществляется на основе рассуждений. Вычисления при решении логических задач играют вспомогательную роль, а иногда совсем не нужны.

Различают следующие виды логических задач:

1. с истинными и ложными высказываниями;
2. на установление соответствия между множествами;
3. на упорядочивание множества;
4. на доказательство, основанное на выявлении худшего случая и с использованием принципа Дирихле;
5. на планирование действий (взвешивания, переливания, переправы и др.)

Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач: способ рассуждений; способ таблиц; способ графов.

Охарактеризуем кратко эти способы.

Способ рассуждений - самый примитивный способ. Этим способом решаются самые простые логические задачи. Его идея состоит в том, что мы проводим рассуждения, используя последовательно все условия задачи, и приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи

Задача:

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Решение. Имеется три утверждения:

1. Вадим изучает китайский;

2. Сергей не изучает китайский;

3. Михаил не изучает арабский.

Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно. Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно. Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

Ответ: Сергей изучает китайский язык, Михаил — японский, Вадим — арабский.

Задачи на установление соответствия между элементами различных множеств

Рассмотрим задачи, содержащие конечные множества с одинаковым числом элементов, между которыми необходимо установить взаимно однозначное соответствие. Решению таких задач помогает использование таблиц или схем.

Задача:

Беседуют трое друзей: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой – брюнет, а третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из друзей?

Решение. В задаче рассматриваются два множества: множество друзей и множество цветов волос. Необходимо установить соответствие между элементами этих множеств. Очевидно, что соответствие является взаимно однозначным.

Для решения данной задачи воспользуемся таблицей. По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не брюнет и Рыжов не рыжий. Поставим знак «-» в соответствующих ячейках таблицы. Кроме того, по условию, Белокуров – не брюнет, и, значит, на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Черный» также поставим знак «-».

Таблица 3

Цвет / Фамилия	рыжие	чёрные	русые
Белокуров		-	-
Чернов		-	
Рыжов			-

С помощью таблицы можно сделать вывод, что Белокуров имеет рыжий цвет волос. Поставим знак плюс в соответствующей ячейке. Отсюда видно, что цвет волос Чернова не рыжий. Обозначим это знаком минус в таблице. Следовательно, Чернов может быть только русым, а Рыжов – брюнетом.

Таблица 4

Цвет / Фамилия	рыжие	чёрные	русые
Белокуров	+	-	-
Чернов	-	-	+

Рыжов	-	+	-

Представим другое решение данной задачи с помощью ее графической модели (рис. 12). При этом элементы различных множеств обозначаются

точками, а соответствия между ними – отрезками. Пунктирные линии будут обозначать указанное в задаче отсутствие соответствия.

Пунктирными линиями соединим пары: Чернов – черные, Белокуров – русые, Рыжов – рыжие и Белокуров – черные.

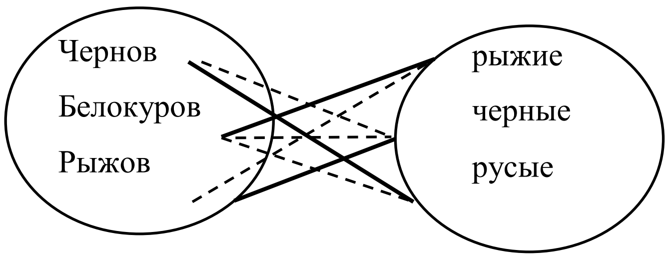


Рис. 13

Тогда, рассуждая аналогично табличному способу решения, мы соединим сплошными линиями: Белокуров – рыжие, затем Чернов – русые и, наконец, Рыжов – черные.

Задачи для практического занятия:

1. Бросают два кубика: красный и синий. Считая все комбинации цифр на красном и синем кубике равновозможными, определите вероятность того, что цифры на красном и синем кубике, будут одинаковы.
2. В том же опыте (бросание красного и синего кубика) подсчитывают сумму очков, выпавших на обоих кубиках. Какая из сумм будет наиболее вероятной?
3. Наудачу выбирают число от 1 до 20. Считая все варианты равновозможными, определите вероятность того, что выбранное число: а) четно;

   б) делится на 3;

   в) делится на 2 и на 3;

   г) не делится ни на 2 ни на 3;

   д) имеет сумму цифр, делящуюся на 3.

4.Секретный замок состоит из четырех дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Найти вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки.

5.Имеется 3 волчка с шестью, восьмью, десятью гранями. Найти вероятность, что при падении у всех трех волчков появится цифра 1.

6.На полке лежат книги. Из них 10 томов Тургенева, 5 томов Гоголя, 8 томов Достоевского. Наудачу выбрана одна книга. Найти вероятность того, что это том

Тургенева или Гоголя.

7.В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

8.В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?

9.Буквы в слове МИША смешали и затем вложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША И МАМА?

10. На острове живут два племени: молодцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил островитянина, спросил его, кто он такой, и когда услышал, что он из племени молодцов, нанял его в проводники. Они пошли и увидели вдали другого островитянина, и путешественник послал своего проводника спросить его, к какому племени он принадлежит. Проводник вернулся и сказал, что тот утверждает, что он из племени молодцов. Спрашивается: был проводник молодцом или лгуном?

11. Перед судом стоят три человека, из которых каждый может быть либо аборигеном, либо пришельцем. Судья знает, что аборигены всегда отвечают на вопросы правдиво, а пришельцы всегда лгут. Однако судья не знает, кто из них абориген, а кто - пришелец. Он спрашивает первого, но не понимает его ответа. Поэтому он спрашивает сначала второго, а потом третьего о том, что ответил первый. Второй говорит, что первый говорил, что он абориген. Третий говорит, что первый назвал себя пришельцем. Кем были второй и третий подсудимые?

12. Турист шел к озеру. Он дошел до перекрестка, откуда вела одна дорога направо, а другая – налево; одна шла к озеру, другая – нет. На перекрестке сидели двое парней, один из них всегда говорил правду, второй всегда лгал. Оба они отвечали на любой вопрос либо «да», либо «нет». Все это было туристу известно, но он не знал, кто из них говорит правду, а кто лжет; он также не знал, какая из дорог ведет к озеру. Турист поставил лишь один вопрос одному из парней. Какой это был вопрос, раз он узнал по ответу, какая дорога ведет к озеру?

Практическая работа № 7. Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешности. Округление чисел.

Выше было дано определение приближенного числа: *приближенным числом а* называется число, незначительно отличающееся от точного числа *А* и заменяющее его в вычислениях.

Если *a<A,* то говорят, что число *а* является приближенным значением числа *А по недостатку;* если *а > А* — приближенным значением *по избытку.*

Разность между точным числом *А* и его приближенным значением *а* составляет *ошибку,* или *погрешность.* Как правило, знак ошибки вычислителя не интересует, поэтому пользуются абсолютной ошибкой, или абсолютной погрешностью.

Абсолютная величина разности между точным числом *А* и его приближенным значением *а* называется *абсолютной погрешностью* приближенного числа *а:*

$\Delta_a = |A-a|$. (1) Здесь возможны два случая.

1. Точное число *А* нам известно. Тогда абсолютная погрешность приближенного числа легко находится по формуле (1).

Пример 1. Пусть *А* = 784,2737*, а* = 784,274; тогда абсолютная погрешность $\Delta_a = |A — a| = |784{,}2737—784{,}274| = 0{,}0003$.

2. Точное число А нам неизвестно, тогда вычислить абсолютную погрешность по формуле (1) нельзя. Поэтому пользуются понятием границы абсолютной погрешности, удовлетворяющей неравенству

$|A—a| < \Delta^*_a$.

Граница абсолютной погрешности, т. е. число, заведомо превышающее абсолютную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной абсолютной погрешностью.*

Следовательно, если Δ^*_a — предельная абсолютная погрешность, то

$\Delta_a = |A-a| < \Delta^*_a$. (2)

Значение точного числа *А* всегда заключено в следующих границах;

$a — \Delta^*_a < A < a + \Delta^*_a$ (3)

Выражение $a — \Delta^*_a$ есть приближение числа *А* по недостатку, а $a + \Delta^*_a$ — приближение числа *А* по избытку. Значение числа *А* записывается так:

$A = a \pm \Delta^*_a$ (3')

Пример 2. Число 45,3 получено округлением. Точное значение числа неизвестно, однако, пользуясь правилами округления чисел, можно сказать, что абсолютная погрешность не превышает (меньше или равна) 0,05

Следовательно, границей абсолютной погрешности (предельной абсолютной погрешностью) можно считать 0,05. Записывают это так: 45,3 (±0,05). Скобки часто опускают, так что запись 45,3 ± 0,05 означает то же самое. Двойной знак ± означает, что отклонение приближенного значения числа от точного возможно в обе стороны. В качестве границы абсолютной погрешности берут по возможности наименьшее число.

Пример 3. При измерении длины отрезка оказалось, что ошибка, допущенная нами, не превышает 0,5 см; тем более она не превышает 1, 2 или 3 см. Каждое из этих чисел можно считать границей абсолютной погрешности. Однако нужно указать наименьшую из них, так как чем меньше граница абсолютной погрешности, тем точнее выражается приближенное значение числа. В записи приближенного числа, полученного в результате измерения, обычно отмечают его предельную абсолютную погрешность.

На практике часто применяют выражения типа: «с точностью до 0,01»; «с точностью до 1 см» и т. д. Это означает, что предельная абсолютная погрешность соответственно равна 0,01; 1 см и т. д.

Пример 4. Если длина отрезка l = 184 см измерена с точностью до 0,05 см, то пишут l = 184 см ± 0,05 см. Здесь предельная абсолютная погрешность Δ^*_l = 0,05 см, а точная величина длины отрезка заключена в следующих границах: 183,95 см < l < 184,05 см.

По абсолютной и предельной абсолютной погрешностям нельзя судить о том, хорошо или плохо произведено измерение.

Пример 5. Пусть при измерении книги и длины стола были получены результаты: l = 28,4 ± 0,1 (см) и L — 110,3 ± 0,1 (см). И в первом, и во втором случае предельная абсолютная погрешность составляет 0,1 см. Однако второе измерение было произведено более точно, чем первое.

Для того чтобы определить качество произведенных измерений, необходимо определить, какую долю составляет абсолютная или предельная абсолютная погрешность от измеряемой величины, В связи с этим вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности к модулю точного числа A ($A \neq 0$), т. е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|A|}. \qquad (4)$$

Отсюда

$\Delta_a = \delta_a |A|$ (4')

Число $\delta *_a$, заведомо превышающее относительную погрешность (или в крайнем случае равное ей), называется *предельной относительной погрешностью:* !

$\delta_a < \delta *_a$ (5)

Из соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\Delta_a \leq |A| \delta_a^*$$

Из определения предельной абсолютной погрешности следует, что $\Delta_a \leq \Delta_a^*$ Тогда можно записать

$$\Delta *_a = |A| \delta_a^* \quad (6)$$

и за предельную относительную погрешность приближенного числа *a* можно принять

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|A|} \quad (7)$$

Учитывая, что *A,* как правило, неизвестно и что *A* $\approx$ *a,* равенства (6) и (7) можно записать так:

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|}, \quad (6')$$

Возвращаясь к примеру 5, найдем предельные относительные погрешности измерения книги и стола.

$\delta_l^* = \frac{0.1cm}{28.4cm} \approx 0.0035$, или 0.35 %,

$\delta_l^* = \frac{0.1cm}{110,3cm} \approx 0.0009$, или 0,09%.

Таким образом, измерение стола было произведено намного точнее.

Очевидно, что как относительная погрешность, так и предельная относительная погрешность представляют собой отвлеченные числа, не зависящие от единиц, в которых выражаются результаты измерений,

Пример 6. Определить (в процентах) предельную относительную погрешность приближенного числа *a* = 35,148 ± 0,00074

Решение. Воспользуемся формулой (7). Тогда

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|a|} = \frac{0.00074}{35.148} \approx 0,000021$$

Пример 7. Определить предельную абсолютную погрешность приближенного числа a = 4,123, если $\delta *_a$ = 0,01%. Решение. Запишем проценты в виде десятичной дроби и для определения предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой (6'); тогда

$$\Delta_a^* = \delta_a^* |a| = 4{,}123 \bullet 0{,}0001 = 0{,}00042.$$

Пример 8. Определить, какое равенство точнее: $a = \dfrac{13}{19} \approx 0.684$ или $b = \sqrt{51} \approx 7{,}21$?

Решение. Для нахождения предельных абсолютных погрешностей берем числа a и b с большим числом десятичных знаков: 13/19 $\approx$ 0,68421; $\sqrt{51} \approx 7{,}2111$. Определяем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

Δ_a^* = |0,68421—0,684 | < 0,00022; Δ_b^* = |7,2111—7,21 | < 0,0012.

Находим предельные относительные погрешности:

$\delta_a^* = \dfrac{\Delta_a^*}{|a|}$ = 0,00022/0,684 ~ 0,00033 = 0,033%; $\delta_b^* = \dfrac{\Delta_b^*}{|b|}$ = 0,0012/7,21 ~ 0,00017 = 0,017%.

Второе равенство является более точным, поскольку $\delta *_b < \delta *_a$.

Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра

Системой счисления, или *нумерацией,* называется совокупность правил, служащих для наименования и обозначения чисел. *Цифрами* называются условные знаки, используемые при обозначении чисел. При записи чисел в десятичной системе счисления пользуются десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Десятичная система является *позиционной:* значение каждой цифры в числе зависит от ее положения среди других цифр этого числа. Так, в числе 7777, 77 имеются шесть цифр 7, Но все они имеют разные значения. Значение первой слева цифры — 7000, второй — 700, третьей — 70, четвертой — 7, пятой — 0,7, шестой — 0,07, Число 7777,77 является сокращенной записью следующей суммы:

$$7777{,}77 = 7 \,.\, 10^3 + 7 \,.\, 10^3 + 7 \bullet 10^1 + 7 \,.\, 10^\circ + 7 \,.\, 10^{-1} + 7\ 10^{-2},$$

В десятичном числе единица каждого разряда равна десяти единицам предыдущего разряда. Вообще, всякое десятичное положительное число a может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби:

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + .. \quad (1)$$

где α_i — цифры числа *(i = 1, 2,.., n...),* причем $\alpha_1 \neq 0$, am — старший десятичный разряд числа *а.*

Значение единицы соответствующего разряда есть *цена* разряда. Так, цена первого (слева) разряда приближенного числа *а* есть 10^m, *п-го* -- 10^{m-n+1}.

При решении задач очень часто ставится условие: вычислить результат с точностью до одной десятой, одной сотой и т. д. Создается впечатление, что точность вычислений определяется числом десятичных знаков после запятой. Это неправильно, так как число десятичных знаков зависит от единицы, выбранной для измерения.

Определяющим точность вычисления является не число десятичных знаков, а число значащих цифр результата

Значащими цифрами приближенного числа *а* называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности. Нули, стоящие левее первой отличной от нуля цифры, не являются значащими цифрами.

Пример 1. Числа 0,001405 и 6,0300 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр. Нуль, записанный в конце десятичной дроби, всегда значащая цифра (иначе его просто бы не писали). В данном примере в числе 6,0300 последний нуль показывает, что число задано с точностью до десятитысячных.

При написании целых чисел нули справа могут быть в одних случаях значащей цифрой, в других — незначащей. Если число 835 000 задано с точностью до единиц, то все три нуля справа—значащие цифры. Если же это число задано с точностью до сотен, то последние два нуля — незначащие цифры, а нуль в разряде сотен—значащая цифра,

Пример 2. Число 399 837 округлили до тысяч, получили 400 000. Нуль в разряде тысяч является значащей цифрой, так как стоит в разряде точности. Все остальные цифры стоящие левее нуля, находящегося в разряде точности, являются также значащими. Последние три нуля — незначащие цифры.

Для того чтобы по записи числа можно было бы определить, являются ли крайние правые нули значащими или нет, рекомендуется числа представлять в виде произведения двух сомножителей, например: $400 \cdot 10^3$, или $40{,}0 \cdot 10^4$, или $4{,}00 \cdot 10^s$. Последняя форма записи, когда запятая поставлена после первой слева значащей цифры, называется *нормальной* и является предпочтительной. В таком представлении количество значащих цифр числа равно количеству значащих цифр первого сомножителя.

Однако точность приближенного числа зависит не от того, сколько в этом числе значащих цифр, а от того, сколько значащих цифр заслуживают доверия, т. е. от количества верных значащих цифр.

Приближенное число

$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + ...$ содержит *n верных значащих цифр в узком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т. е. если выполняется неравенство

$\Delta_a < 0{,}5.10^{m-n+1}$ (2)

Если это неравенство не выполняется, то цифру a_n называют *сомнительной.* Очевидно, что если цифра a_n — верная, то и все предшествующие ей цифры тоже верные. Таким образом, среди верных цифр всегда можно указать последнюю.

Пример 3 Для точного числа *A* = 17,976 число *a* = 17,98 является приближением с четырьмя верными знаками в узком смысле, так как $\Delta_a = |A - a| = 0{,}004 < 0{,}5 \cdot 0{,}01$.

В математических таблицах все помещенные значащие цифры — верные. Так, в известных таблицах В, М. Брадиса значения синуса даны с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,5 • 10~4, т. е. с четырьмя верными значащими цифрами в узком смысле. В последнее время стали использоваться таблицы (таблицы различных физических величин, экспериментально составленные таблицы), в которых абсолютные погрешности чисел не превосходят единицы последнего разряда.

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + .. + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + ...$.

содержит *n верных значащих цифр в широком смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы десятичного разряда, выражаемого n-й значащей цифрой, считая слева направо, т, е, если выполняется неравенство

$\Delta_a < 1 \cdot 10^{m-n+1}$ (3)

Пример 4. Для точного числа *A* = 17,976 число *a* = 17,97 является приближенным **g** четырьмя верными цифрами в широком смысле, так как

$$\Delta_a = |A - a| = 0{,}006 < 1 \cdot 0{,}01..$$

Неравенства (2) и (3) можно записать в виде $\Delta_a < \omega \cdot 10^{m-n+1}$, где параметр ω, принимающий значения 0,5 < ω < 1, указывает на характер проводимых вычислений. Если приближенные числа появляются в результате вычислений по формулам с точными значениями исходных данных (например, при составлении таблиц трансцендентных функций), иными словами, когда можно практически достигнуть любой заданной точности, то выгоднее брать меньшее значение параметра ω, т. е. $\omega = 0,5$.

Если же приближенные числа получаются в результате вычислений с недостаточно точными исходными данными, то параметр ω принимается равным единице. В этом случае малые значения параметра ω связаны с необходимостью производить округления, которые снижают точность результатов и поэтому являются невыгодными. Если указано, что цифры приближенного числа верные и $\omega = 0,5$, то это означает, что цифры числа верны в узком смысле; если же $\omega = 1$, то в широком смысле.

Пример 5. Сколько верных значащих цифр содержит приближенное число а = 85,267 ± 0,0084: 1) в узком смысле; 2) в широком смысле?

Решение. 1) Из условия видно, что погрешность $\Delta_a = 0,0084 < 0,05$. Следовательно, верными в узком смысле будут цифры 8, 5, 2.

2) Поскольку $\Delta_a = 0,0084 < 0,01$, верными в широком смысле будут цифры 8, 5, 2, 6

Пример 6. Определить предельные абсолютные погрешности приближенных чисел a = 96,387 и b = 9,32, если они содержат только верные цифры в узком и широком смысле соответственно.

Р е ш **е** н и **е.** 1) Так как для числа a = 96,387 последняя цифра 7, стоящая в разряде тысячных долей, является верной значащей цифрой в узком смысле, то $\Delta_a < 0,5 \ \ 0,001$, т. е. $\Delta_a < 0,0005$, или $\Delta^*_a = 0,0005$. Тогда число a можно записать так: 96,387 ± 0,0005.

2) Последняя цифра приближенного числа b = 9,32 стоит в разряде сотых долей. Так как это число содержит верные цифры в широком смысле, то, следовательно, $\Delta_b < 1 \cdot 0,01$, т. **е.** $\Delta_b < 0,01$, или $\Delta^*_b| = 0,01$. Число b можно записать так: 9,32 ± 0,01.

Округление чисел

В приближенных вычислениях часто приходится округлять числа как приближенные, так и точные, т. е. отбрасывать одну или несколько последних цифр и при необходимости заменять их нулями. При округлении числа мы заменяем его приближенным числом с меньшим количеством значащих цифр, в результате чего возникает погрешность округления. Чтобы эта погрешность была минимальной, нужно придерживаться некоторых правил округления (по дополнению). Правило I. *Если первая слева из отбрасываемых цифр больше* 5, *то последняя из сохраняемых цифр усиливается, т.е. увеличивается на единицу. Усиление производится и* *тогда, когда первая слева из отбрасываемых цифр равна* 5, *а за ней следуют отличные от нуля цифры.*

Пример 1. Округляя до десятых долей число 73,473, получим 73,6. Последняя из оставшихся цифр усилена, так как 7 > 5.

Правило II. *Если первая из отброшенных цифр меньше 5, то последняя из оставшихся цифр не усиливается, т. е. остается без изменения.*

Пример 2. Округляя до сотых долей число 73,473, получим 73,47,

Правило III. *Если первая слева из отброшенных цифр равна* 5 *и за ней не следуют отличные от нуля цифры, то последняя оставшаяся цифра усиливается, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная* (правило четной цифры).

Пример 3. Округляя число 5,785 до сотых долей, получаем 5,78. Усиления не делаем, так как последняя сохраняемая цифра 8 — четная. Округляя число 5,775 до второго десятичного знака, имеем 5,78. Последняя сохраняемая цифра 7 увеличивается на единицу, поскольку она нечетная.

При применении правила III к округлению одного числа мы фактически не увеличиваем точность вычислений, однако при многочисленных округлениях избыточные числа встречаются примерно так же часто, как и недостаточные. Происходит взаимная компенсация погрешностей, результат оказывается более точным.

Таким образом, при применении выше рассмотренных правил округления *абсолютная погрешность округления не превосходит половины единицы разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.*

Если точное число *A* округляется до *n* значащих цифр по правилу дополнения, то получаемое приближенное число *a* имеет абсолютную погрешность, равную погрешности округления. В этом случае приближенное число *a* имеет *n* верных значащих цифр в узком смысле.

Пример 4. Округляя число A = 26,837 до трех значащих цифр, получим a = 26,8, откуда

Δ_a = | A—a | = 1 26,837—26,81 = 0,037 < 0,05,

т. е. число *a* имеет три верные значащие цифры в узком смысле.

При округлении приближенного числа a^1 получаем новое приближенное число a_2, абсолютная погрешность которого складывается из абсолютной погрешности первоначального числа a_1 и погрешности округления, т. е.

$$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр} \qquad (1)$$

Пример 5. Округлить сомнительные цифры числа a^1 = 34 124 (± 0,021). Определить абсолютную погрешность результата.

Решение. Приближенное число a^1 имеет три верные цифры в узком смысле. 3, 4**,** 1, так как Δ_{a_1} = 0,021 < 0,05 Применяя правила округления, найдем приближенное значение a_2, сохранив десятые доли: a_2 = 34,1. Теперь получаем $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ кр = 0,021 + 0,024 = 0,045 < 0,05.

Таким образом, все значащие цифры числа верные (в узком смысле), т. е. a_2= 34,1.

Однако при округлении приближенного числа a^1 имеющего n верных значащих цифр (в узком смысле), до n значащих цифр может оказаться, что округленное число $а_2$ будет иметь n верных значащих цифр в широком смысле.

Пример 6. Приближенное число a^1= 15,3654 ± 0,0018 имеет четыре верные значащие цифры в узком смысле (1, 5, 3, 6), так как Δ_{a_1} 0,0018 < 0,005. При округлении до четырех значащих цифр получим a_2= 15,37 и $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ = 0,0018+0,0046 = 0,0064. Очевидно, что 0,005 < 0,0064 < 0,01. Следовательно, число 15,37 ± 0,0064 имеет четыре верные цифры в широком смысле.

Пример 7. Округлить сомнительные цифры числа a^1= 26,7245 ± 0,0026, оставив верные знаки в узком смысле, Определить абсолютную погрешность результата.

Решение. По условию Δ_{a_1} = 0,0026 < 0,005, следовательно, в числе 26,7245 верными в узком смысле являются цифры 2, 6, 7, 2. Используя правила округления, найдем приближенное значение $а_2$, сохранив сотые доли: a_2 = 26,72. Далее, имеем

$\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ =0,0026 + 0,0045 = 0,0071.

Полученная погрешность больше 0,005 (0,005 < 0,0071), поэтому уменьшим число цифр в приближенном числе до трех: a_3 = 26.7. Находим

$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ = 0,0026+0,0245 = 0,0271,

т. е. Δ_{a_3} < 0,05. Следовательно, оставшиеся три цифры верны в узком смысле.

Пример 8. Округлить сомнительные цифры числа a^1 = 22,7314, оставив верные знаки в узком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если δ_{a_1} =0,2%.

Решение. Запишем δ_{a_1} в виде десятичной дроби δ_{a_1} = 0,002 и определим Δ_{a_1} по формуле (6')

$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 |$=22,7314 • 0,002 = 0,0455. Так как Δ_{a_1} = 0,0455 < 0,05, то верными в этом числе* будут три цифры: 2, 2, 7. Округлим число 22,7314, сохранив в нем десятые доли: a_2 = 22,7. Тогда $\Delta_{a_2} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$ = 0,0455+0,0314 = 0,0769.

Поскольку полученная погрешность больше 0,05, уменьшаем число цифр в приближенном числе до двух: a_3 = 23; тогда

$\Delta_{a_3} = \Delta_{a_1} + \Delta_{окр}$== 0,0455+0,2686 = 0,3141,

т. е. Δ_{a_3} < 0,5. Таким образом, в полученном округленном числе 23 обе цифры являются верными в узком смысле.

Пример 9. Округлить сомнительные цифры числа a^1 = 5,273, оставив верные знаки в широком смысле. Определить абсолютную погрешность числа, если δ_{a_1} = 0,1%.

Решение. Находим

$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 |$=5,273-0,001 =0,0053.

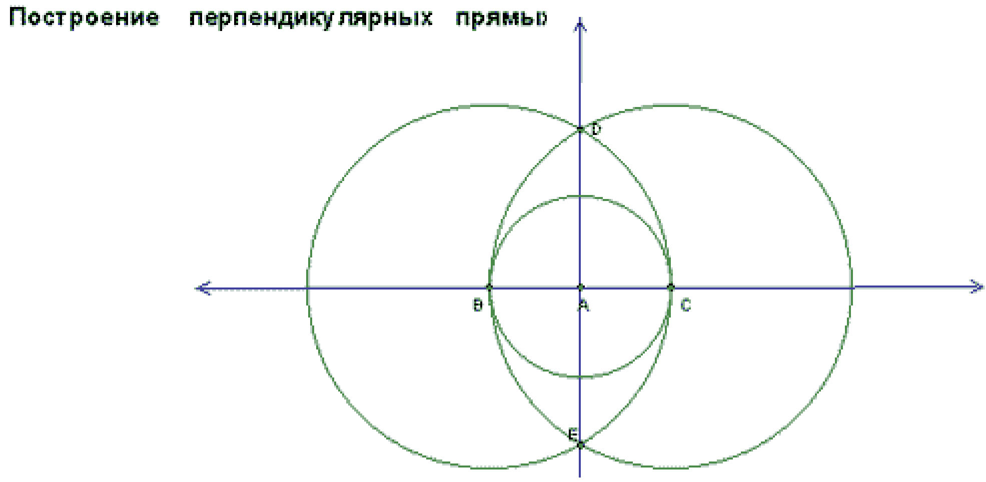
В числе ***a-i*** верными в широком смысле являются три цифры (5, 2, 7), поэтому округляем его до трех значащих цифр: o_2 = 5,27; отсюда

$\Delta_{a_1} = \delta_{a_1} | a^1 |$= 0,0053 + 0,003 = 0,0083 < 0,01.

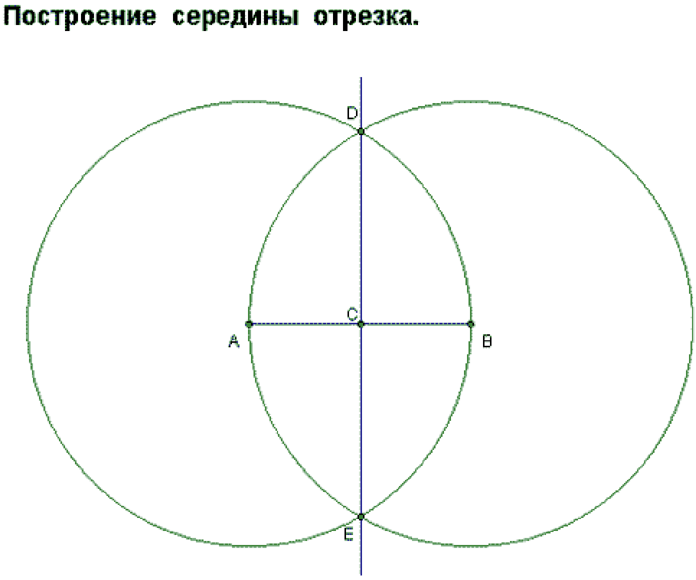
Следовательно, округленное число 5,27 имеет три верные цифры в широком смысле.

Практическая работа № 8. Задачи на построение.

-Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к прямой, на которой лежит данная точка.



-Построение середины отрезка



-Построить прямую, проходящую через точку, не лежащую на заданной прямой, перпендикулярную этой прямой.

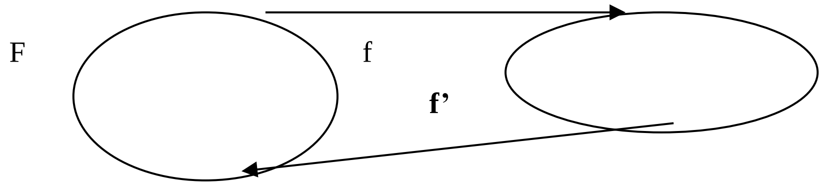
1 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ.

Пусть дано некоторое правило, по которому для каждой точки A плоскости можно указать некоторую точку A'.

Рассмотрим на плоскости некоторую фигуру F, например, отрезок, кривую линию, треугольник, окружность и т. д. При заданном преобразовании каждая точка A фигуры F перейдет в новую точку A'. Геометрическое место всех преобразованных точек, получившихся из точек фигуры F в результате данного преобразования, образует некоторую фигуру F' . В этом случае говорят, что фигура F' получена преобразованием фигуры F .

Может случиться, что при рассматриваемом преобразовании некоторые точки и целые фигуры переходят сами в себя, т. е. остаются неизменными. Точки и фигуры, не меняющиеся при данном преобразовании, т. е. преобразующиеся сами в себя, называются неподвижными относительно данного преобразования.

Если при данном преобразовании разным точкам фигуры соответствует разные образы, то преобразование называют *взаимно однозначным*. В этом случае можно задать преобразование, *обратное преобразование f'*. Оно определяется так: если при данном преобразовании f точке X сопоставляется точка X’, то при обратном преобразовании точке X’ сопоставляется точка X.



2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Самыми важными являются такие преобразования фигур, при которых сохраняются все их геометрические свойства: расстояния между точками, углы, площади, параллельность отрезков и т. д. Оказывается, для этого достаточно потребовать сохранения лишь расстояний между точками данной фигуры. Тогда у полученной фигуры сохраняются и все остальные геометрические свойства, поскольку они зависят только от расстояний.

Определение.

Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется движением этой фигуры.

Подробнее: фигура N получена движением фигуры M, если любым точкам X, Y фигуры M сопоставляются такие точки X’, Y’ фигуры N, что X’Y’=XY.

3 СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ.

<u>Свойство 1.</u> Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, и три точки, не лежащие на одной прямой, - в три точки, не лежащие на одной прямой.

<u>Свойство 2.</u> Отрезок движением переводится в отрезок.

<u>Свойство 3.</u> При движении луч переходит в луч, прямая – в прямую.

<u>Свойство 4.</u> Треугольник движением переводится в треугольник.

<u>Свойство 5.</u> Движение сохраняет величины углов.

<u>Свойство 6.</u> При движении сохраняются площади многоугольных фигур.

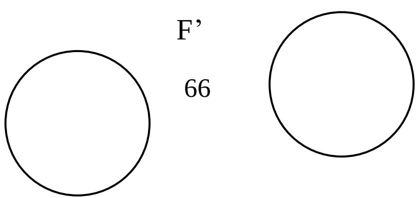
<u>Свойство 7.</u> Движение обратимо. Преобразование, обратное движению, является движением.

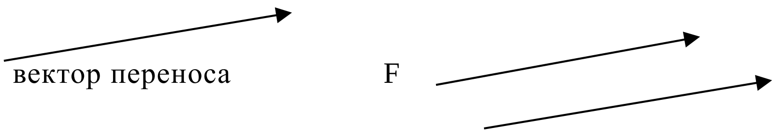
ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ

1 Параллельный перенос.

Преобразованием плоскости, при котором каждая точка перемещается в одном и том же направлении на одно и тоже расстояние, называется *параллельным переносом*.

Чтобы задать преобразование параллельного переноса, достаточно задать вектор переноса.





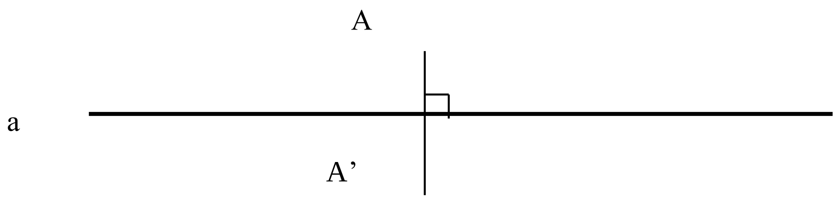
<u>Особые свойства переноса:</u>

параллельный перенос сохраняет направление;

у параллельного переноса нет неподвижных точек.

2 Осевая симметрия.

Возьмем на плоскости ось а. Для каждой точки А плоскости построим точку А’ так, чтобы отрезок АА’ был перпендикулярен к оси а и делился ею пополам . Такая точка А’ называется симметричной точке А относительно оси а. Ясно, что если точка А’ симметрична А, то А симметрична А’ относительно той же оси а.



Преобразование плоскости, при котором каждая точка А преобразуется в симметричную ей относительно оси а точку А’, называется преобразованием осевой симметрии или просто осевой симметрией.

Геометрическое место точек, симметричных точкам фигуры F относительно оси а, образует фигуру F’, которая называется симметричной фигуре F относительно оси а.

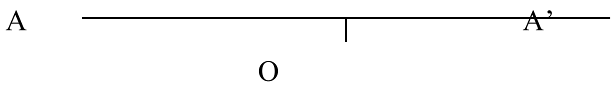
<u>Особые свойства осевой симметрии</u>:

-прямые х и х’, симметричные относительно оси а, либо пересекаются в точке, лежащей на оси а, образуя при этом равные угла с а, либо параллельны и равноудалены от оси а

-Множество неподвижных точек при осевой симметрии – прямая(ось симметрии).

3 Центральная симметрия.

Возьмем на плоскости точку О, называемую центром. Для каждой точки А плоскости построим точкуА’ – такую, что отрезок АА’ проходит через центр О и делится им пополам. Такая точка А’ называется симметричной точке А относительно центра симметрии О.



Очевидно, что если точка А’ симметрична точке А, то и наоборот, точка А симметрична точке А’ относительно центра О.

Преобразование, переводящее каждую точку А плоскости в точку А’, симметричную ей относительно центра О, называется преобразованием центральной симметрии или просто центральной симметрией.

Геометрическое место точек, симметричных точкам фигуры F относительно центра O, образует фигуру F’, которая называется симметричной фигуре F относительно центра O.

<u>Особые свойства центральной симметрии</u>:

-отрезки AB и A’B’, симметричные относительно центра O, либо параллельны, либо лежат на одной прямой;

-прямые a и a’, симметричные относительно центра O, либо параллельны, либо совпадают;

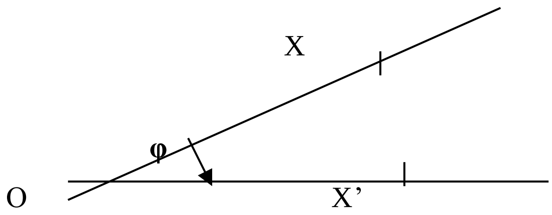
-центральная симметрия изменяет направление на противоположное.

4 Поворот.

Пусть дана точка O. На окружности с центром O можно указать два направления обхода – по часовой стрелке и против нее. Этим задаются также два направления отсчета углов от идущих из точки O лучей – по часовой стрелке и против нее.

Поворот фигуры F вокруг центра O на данный угол φ ($0° \le \varphi \le 180°$) в данном направлении определяется так: каждой точке X фигуры F сопоставляется такая точка X’, что, во-первых, OX’=OX, во-вторых, $\angle X'OX=\varphi$ и, в-третьих, луч OX’ откладывается от луча OX в заданном направлении.

Точка O называется центром поворота, а угол φ - углом поворота**.**



<u>Особые свойства поворота:</u>

-поворот преобразует прямую a в прямую a’, образующую с данной прямой a угол, равный углу вращения;

-неподвижная точка поворота – его центр.

Задание для практического решения:

1. Дана окружность с проведенным диаметром. Найти центр окружности.
2. Построить равносторонний треугольник, вписанный в заданную окружность.
3. Построить прямоугольник, вписанный в заданную окружность.
4. Построить вписаный угол в 45 градусов в заданной окружности.

Практическая работа № 9. Решение задач на построение.

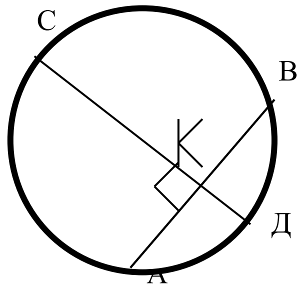
Применение движений для решения задач.

Метод геометрических преобразований применяется при решении задач на доказательство, построение фигур с помощью циркуля и линейки, вычисление длин и углов. В ряде случаев он дает наиболее простые и изящные решения.

1 ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим задачу на доказательство из курса геометрии 8 класса.

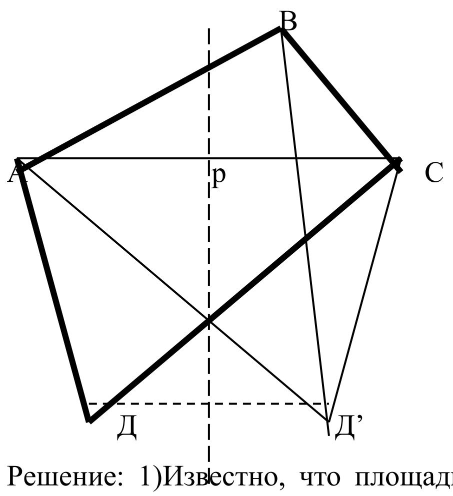
ЗАДАЧА 1. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.



Решение. Рассмотрим симметрию с осью СД. При этой симметрии окружность и прямая АВ переходят сами в себя, значит точки их пересечения переходят друг в друга, и отрезок АК переходит в отрезок КВ, следовательно, эти отрезки равны.

Предложенное решение нагляднее решения через равенство треугольников, не требует дополнительного построения.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.



Решение: 1)Известно, что площадь треугольника не превосходит половины произведения двух смежных сторон. Чтобы использовать этот факт, необходимо в данном четырехугольнике из противоположных сторон сделать смежные.

2)Отобразим сторону АД относительно серединного перпендикуляра р к диагонали АС. Точка Д перейдет в Д', АД→СД', ДС→АД'.

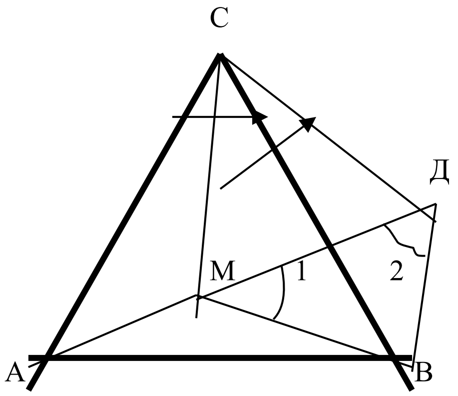
3)S(АВСД)=S(АВСД')=S(ВАД')+S(ВСД')≤½АВ·АД'+½ВС·СД'=½(АВ·СД+ВС·АД).

С помощью симметрии дается определение равных фигур и доказываются признаки равенства треугольников(хотя в 7 классе не рассматривается строгое определение движений). Используя движения и их свойства, легко доказать свойства и признаки равнобедренного треугольника, свойство серединного перпендикуляра, признаки параллелограмма.

2 ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ.

В задачах на вычисление и построение удобно использовать движение для создания новых фигур, элементы которых равны заданным или искомым величинам. В следующей задаче, например, поворот «собирает» из отрезков треугольник.

ЗАДАЧА 3 В равностороннем треугольнике АВС внутри взята точка М так, что АМ=1, ВМ=$\sqrt{3}$, СМ=2. Найти сторону треугольника и углы АМВ, ВМС.



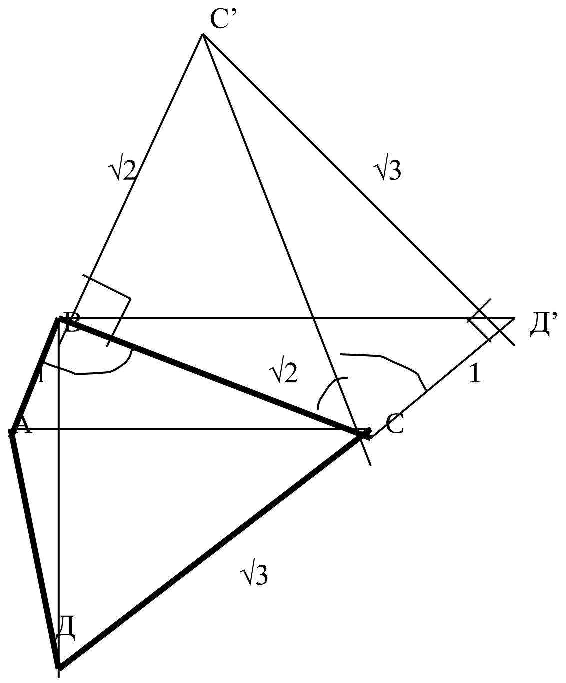
Решение. 1)Повернем ΔАСМ вокруг точки С на 60° так, чтобы точка а перешла в точку В, тогда С→С, А→В, М→Д, то есть ΔАСМ переходит в ΔСДВ.

2) По определению поворота СМ=СД и угол МСД равен 60°, значит ΔСМД – равносторонний (СМ=СД=ДМ).
3) ΔВДМ по обратной теореме Пифагора прямоугольный ($\sqrt{3}^2+1^2=2^2$), тогда ∟МВД=90°, ∟1=30°(ВД=½МД), ∟2=60°.
4) Найдем нужные углы: ∟СМД=∟1+60°, ∟АМВ=180°-30°=150°.
5) ΔВМС – прямоугольный(∟СМВ=90°), тогда по теореме Пифагора найдем ВС:

$BC^2=CM^2+BM^2=4+3=7$, то есть ВС=$\sqrt{7}$.

Эту задачу можно решить без помощи поворота, используя, например, теорему косинусов. При этом решение не будет длиннее, но будет алгебраически значительно сложнее приведенного решения.

ЗАДАЧА 4. Диагонали четырехугольника АВСД перпендикулярны и равны. Найдите угол АВС, если АВ=1, ВС=$\sqrt{2}$, СД = $\sqrt{3}$.



Решение:1) Повернем отрезок СД на 90° вокруг точки В.

2) Получим: С→С', Д→Д', отрезок СД→С'Д', тогда ВД=ВД'(опред. поворота)=АС(усл), ВД'||АС(как перпендикуляры к прямой ВД). Значит, АВД'С – параллелограмм и СД'=1.

3) Из ΔВС'С найдем угол ВСС'(45°), так как треугольник прямоугольный и равнобедренный, и СС'=2. Из ΔС'Д'С(прямоугольного по обратной теореме Пифагора) найдем угол С'СД'(60°).

4) ∟АВС=∟ВСД'=45°+60°=105°.

3. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ.

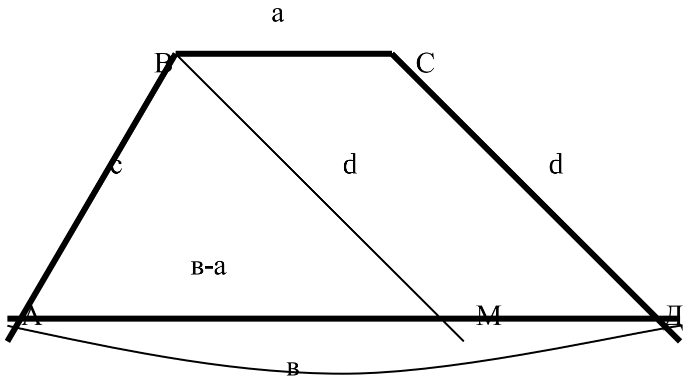
Воспользуемся методом создания новой фигуры при решении задач на построение.

Я не буду приводить полное решение, а только анализ, так как моя цель - продемонстрировать применение движений.

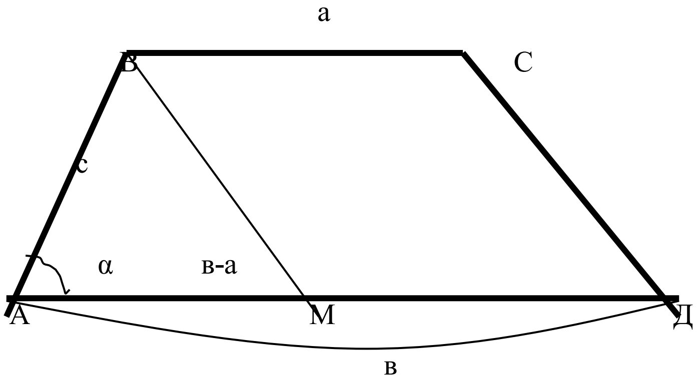
ЗАДАЧА 5. Построить трапецию по четырем сторонам.

Анализ. Предположим, что заданная трапеция построена. Перенесем сторону СД на вектор СВ, тогда СД→ВМ. Теперь видно, что надо построить ΔАВМ по трем сторонам:

АВ=с, ВМ=d, АМ= в-а, потом полученный треугольник достроить до нужной трапеции.



ЗАДАЧА 6. Построить трапецию по основаниям, одной боковой стороне и углу, который она составляет с основанием.



Анализ. 1) Предположим, что искомая трапеция построена.

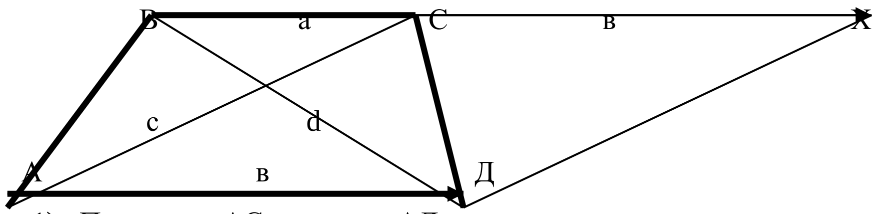
2) Перенесем сторону СД на вектор СВ.

3) Построим ΔАВМ по двум сторонам и углу между ними.

4) Достроим треугольник до искомой трапеции.

ЗАДАЧА 7. Построить трапецию по двум основаниям и двум диагоналям.

Анализ. Предположим. что искомая трапеция построена.

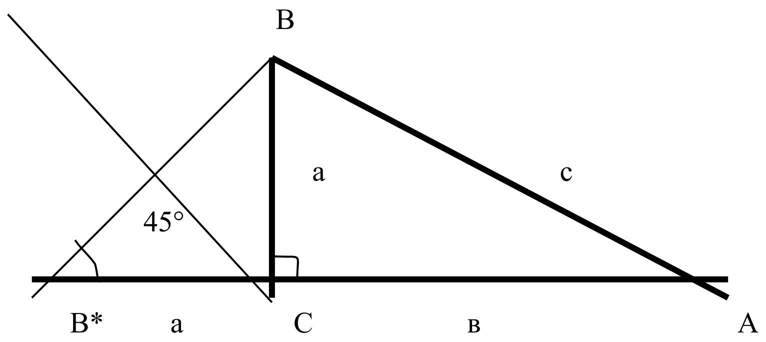


1) Перенесем АС на вектор АД
2) Построим треугольник СДХ по трем сторонам: d, c, a+в.
3) Достроим треугольник до искомой трапеции.

В следующей задаче используем такое свойство: в треугольнике при симметрии относительно биссектрисы его угла получается отрезок, равный разности сторон, образующих этот угол, а при симметрии относительно биссектрисы внешнего угла образуется отрезок, равный сумме этих сторон.

ЗАДАЧА 8. Построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов и гипотенузе.

Анализ. 1)Предположим, что треугольник построен.



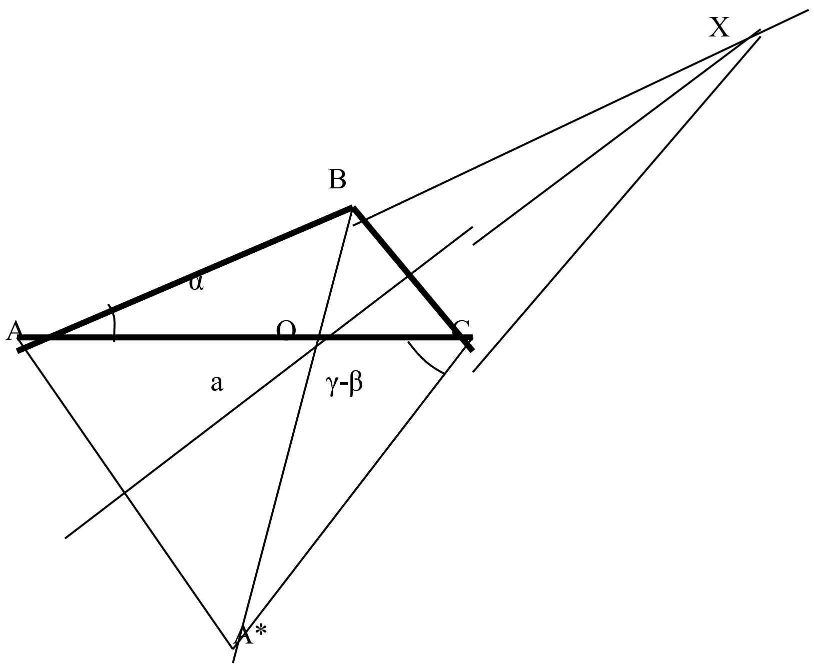
2) При симметрии относительно биссектрисы внешнего угла образуется отрезок B*A=a+в

3) ΔB*CB – прямоугольный и равнобедренный, значит угол BB*C равен 45°

4)Тогда положение точки B можно определить пересечением луча B*B, который составляет с отрезком a+в угол в 45°, и окружности с центром A и радиусом равным c.

ЗАДАЧА 9.Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других углов.

Анализ.1) Пусть искомый треугольник построен.



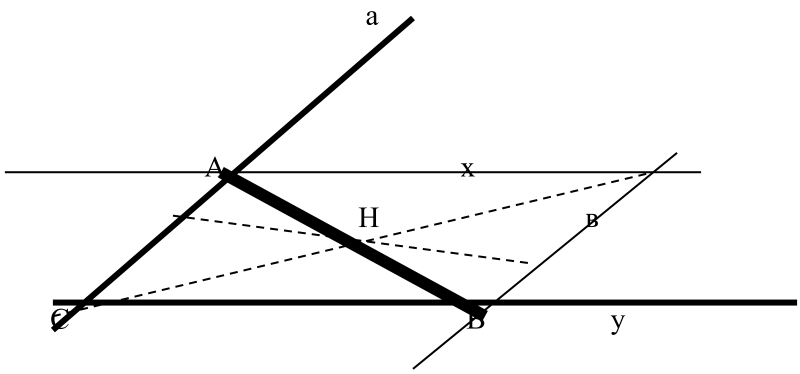
2)При симметрии относительно серединного перпендикуляра к стороне BC получается угол ACA*, равный разности углов B и C. Прямая AB переходит в прямую A*C, по свойству симметрии эти прямые образуют с осью симметрии равные углы, то есть прямая XO является биссектрисой угла AXA*.

3)Тогда план построения такой: от отрезка AC отложить в одну полуплоскость угол, равный α, а в другую полуплоскость угол, равный γ-β. Если сторона одного угла пересечется с продолжением стороны другого в точке X, то дальше надо построить биссектрису угла AXC. Если пересечения нет, то треугольника с такими данными не существует. Точку B получаем как симметричную к точке C относительно построенной биссектрисы.

Рассмотрим две задачи, где требуется найти на двух фигурах точки , равноудаленные от данной точки. Такие задачи легко решаются, если использовать центральную симметрию. Очевидно, что такие задачи могут иметь практическое применение.

ЗАДАЧА 10. Даны угол С и точка Н внутри него. Требуется построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находится в точке Н.

Анализ. 1)Предположим, искомый отрезок АВ построен.



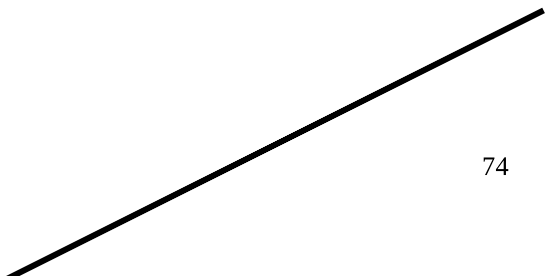
2)Рассмотрим осевую симметрию относительно точки Н

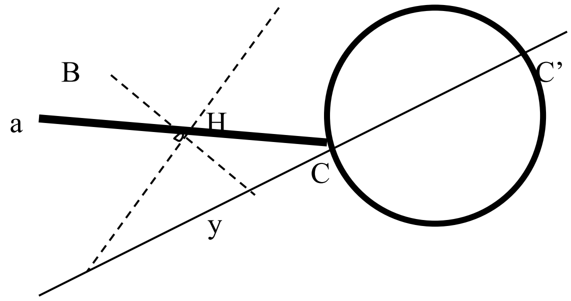
3) Прямая Са перейдет в прямую Bb параллельную ей ,точка А перейдет в точку В . Это означает, что В - точка пересечения прямой Су и образа прямой Са при симметрии относительно точки Н.

5)Искомый отрезок получается, при продолжении ВН за точку Н до прямой Са.

ЗАДАЧА 11. Через данную точку Н требуется провести прямую, так чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения её с данной прямой и данной окружностью, делится точкой Н пополам.

Анализ. 1)Предположим, что отрезок ВС построен.





2) Рассмотрим осевую симметрию относительно точки Н. Точка В перейдет в точку С, прямая а перейдет в прямую у, параллельную ей.

3)Возможны три случая: а) если прямая у не пересекается с окружностью, это означает, что невозможно построить такой отрезок.

б) Если прямая у является касательной к окружности, это означает, что у этой задачи одно решение.

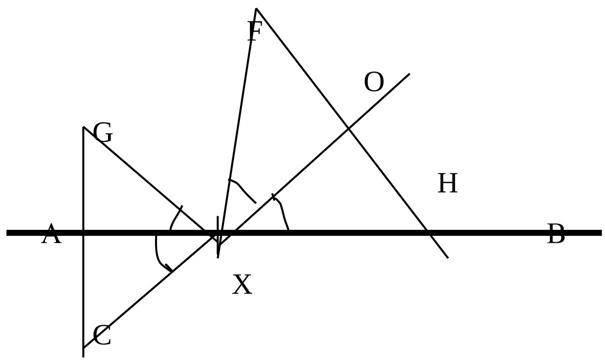
в) Если прямая у пересекает окружность в двух точках, это означает, что у этой задачи два решения.

4)Положение точки С определяется пересечением данной окружности с образом прямой а при симметрии с центром в точке Н.

Можно продолжить ряд задач, подобных №10 и 11, выбирая произвольно объекты.

<u>ЗАДАЧА 12</u>. Даны прямая АВ и две точки F и G по одну сторону от нее. Требуется построить на прямой АВ точку Х так, чтобы ∠ FXA=2∠BXG.

Анализ. 1) Предположим, что искомая точка Х найдена.



2) Точка С симметрична точке точке G относительно данной прямой. По свойству симметрии уголGXA равен углу AXC. Угол АХС равен углу OXH(вертикальные). Таким образом прямая СХ будет биссектрисой угла FXB.

3)Точки F и H, симметричны относительно биссектрисы угла, значит они равноудалены от точки C, принадлежащей биссектрисе.

3) Положение точки H определяется пересечением прямой AB и окружности с центром C и радиусом CF. А точка X – это точка пересечения прямой AB и серединного перпендикуляра к отрезку FH.

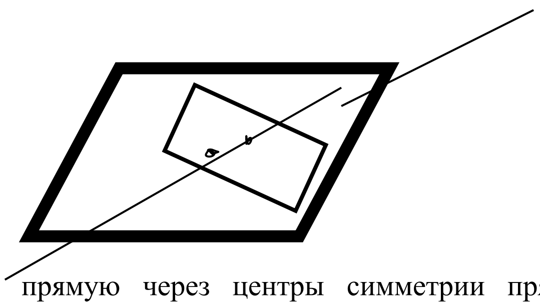
1. ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ.

При изучении литературы встречаются задачи практического содержания, которые наглядно демонстрируют, что метод движения может применяться в нашей жизни в строительстве, разметке участка, геодезии, картографии.

Самым важным при решении практических задач является переход от текста к математической модели. В геометрии это обычно сводится к правильному построению чертежа. Решив геометрическую задачу, нужно вернуться к практической стороне.

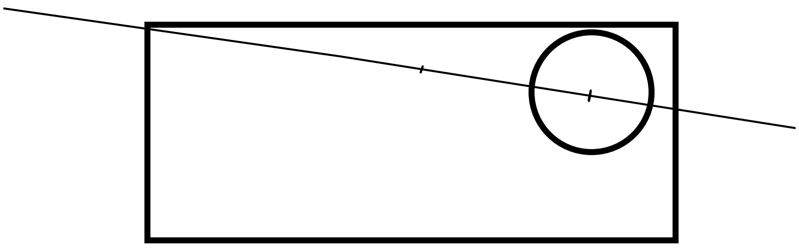
ЗАДАЧА 13. На площадке, имеющей форму параллелограмма, размещен участок прямоугольной формы. Как провести прямую, которая разобьет одновременно и площадку и участок на две равные части?

Решение.



Проведем прямую через центры симметрии прямоугольника и параллелограмма. Прямая, проходящая через центр симметрии, разбивает фигуру на две равные.

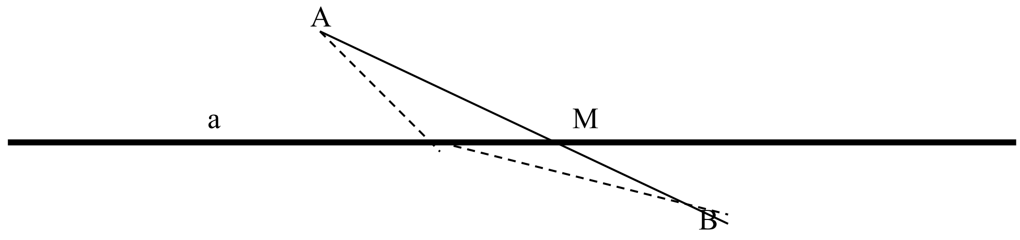
ЗАДАЧА 14. На земельном участке прямоугольной формы разбит сад, имеющий форму круга. Как провести прямую, которая разобьет одновременно участок и сад на две равные части?

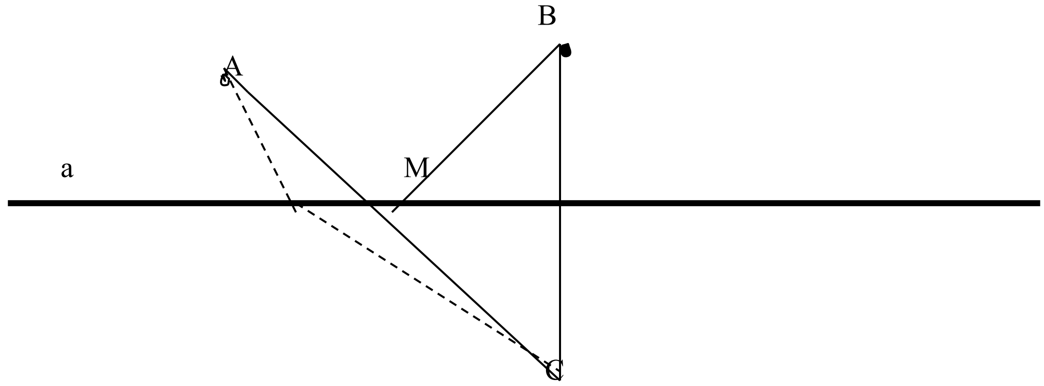


ЗАДАЧА 15. Для снабжения водой двух поселков, расположенных по одну сторону от реки, требуется построить на ее берегу водонапорную башню. Где нужно построить башню, чтобы общая длина труб от башни до обоих поселков была наименьшей?

Переведем задачу на язык математики: на данной прямой найдите такую точку, чтобы сумма расстояний от этой точки до двух данных точек была наименьшей.

Решение. Если точки A и B лежат по разные стороны от прямой a, очевидно, что искомая точка – это точка пересечения прямой a и отрезка AB, так как наименьшее расстояние между точками – длина отрезка, их соединяющего.





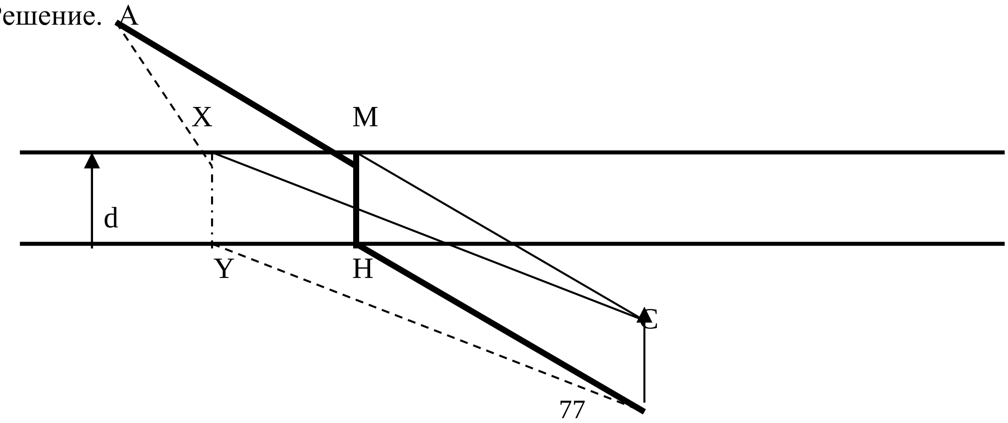
Если точки A и B лежат по разные стороны от прямой a, очевидно, что искомая точка – это точка пересечения прямой a и отрезка AB, так как наименьшее расстояние между точками – длина отрезка, их соединяющего.

Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой a, то сначала надо отобразить, например, точку B относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямой a и отрезка AC искомая, потому что по свойству симметрии BM=CM.

<u>ЗАДАЧА 16.</u> Между пунктами A и B протекает река (берега ее считаем параллельными).

В каком месте реки следует построить мост, чтобы путь от A до B был кратчайшим?

Решение.



В

Будем считать, что мост перпендикулярен берегам.

Перенесем точку В на вектор d. Найдем точку пересечения отрезка АС и прямой а. Тогда АМ+МН+НВ – наименьшее расстояние. При рассмотрении другого варианта видно, что ширину реки можно не учитывать(она постоянна), а АМ+НВ=АМ+МС<АХ+ХС=АХ+УВ.

Оказалось, что существует огромное количество задач, решаемых с применением движений. Метод преобразований является общим методом, или точнее вспомогательным приемом, который можно использовать при решении задач различного содержания. Все рассмотренные задачи могут быть решены без применения движений с помощью проведения дополнительного построения. Но знание движений и их свойств помогает лучше представить, как изменить фигуру в соответствии с поставленной целью или для упрощения решения, помогает глубже понять свойства фигур. В дальнейшем было бы интересно узнать какие движения существуют в пространстве и рассмотреть применение данного метода для пространственных фигур.

Практическая работа № 10. Основы теории вероятностей. Случайные события.

Теория.

Теория вероятностей – раздел математики, где изучаются закономерности случайных событий.

Теория вероятностей дает количественное измерение вероятностей случайных явлений и построение на этой основе математической модели наблюдаемых случайных эмпирических соотношений.

Испытание и событие

В природе и повседневной жизни часто приходится сталкиваться со случайными явлениями, т. е. с ситуациями, исход которых нельзя точно предвидеть. Процесс познания действительности в этом случае осуществляется в результате наблюдений или испытаний (экспериментов).

Определение. Под испытанием (наблюдением) понимается любой доступный частому повторению процесс, протекающий при реализации заданного комплекса условий.

Определение. Результат, или исход испытания называется событием.

Виды событий

Различают три вида событий: *случайные, достоверные и невозможные.*

Определение. Событие, которое при реализации заданного комплекса условий может произойти, а может и не произойти, называется случайным.

Определение. Событие, которое неизбежно происходит при каждой реализации заданного комплекса условий, называется достоверным.

Определение. Событие, которое заведомо не может произойти при реализации заданного комплекса условий, называется невозможным.

Виды случайных событий

Случайные события подразделяются на следующие виды: равновозможные, несовместные и совместные, зависимые и независимые.

Определение. Два или несколько случайных событий называются равновозможными, если условия их появления одинаковы и нет основания утверждать, что какое-либо из них в результате испытания имеет больше шансов осуществиться, чем другие.

Определение. События называются несовместными, если в результате испытания осуществление одного из них исключает осуществление остальных.

Определение. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Определение. Два события называются независимыми, если появление одного из них не влияет на шансы появления другого.

Определение. Два события называются зависимыми, если появление одного из них влияет на шансы появления другого.

Полная группа событий

Определение. Если в результате испытания обязательно осуществится одно и только одно из несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, то эти события называются полной группой событий.

Определение. Два несовместных события, образующие полную группу событий, называются противоположными.

Исходы испытания

Определение. Несовместные события, имеющие одинаковую возможность осуществиться, называются исходами испытания.

Определение. Исходы $l_1, l_2, ..., l_m$ называются благоприятными для события A, если осуществление любого из исходов $l_1, l_2, ..., l_m$ является вместе с тем осуществлением события A.

Операции над событиями

Определение. Если при каждом осуществлении заданного комплекса условий, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечёт за собой B, и обозначают символом $A \subset B$ или $B \supset A$.

Определение. Если A влечет за собой B и в то же время B влечёт за собой A, т.е. события A и B оба наступают или оба не наступают, то говорят, что события A и B равносильны, и обозначают символом $A = B$.

Определение. Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, называется произведением (или пересечением) событий A и B, и обозначается символом $A \cdot B$ или $A \bigcap B$.

Определение. Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, (возможно, двух сразу), называется суммой (или объединением) событий A и B, и обозначается символом $A + B$ или $A \bigcup B$.

Событие, противоположное событию A, обозначают с помощью символа $\overline{A}$.

Определение суммы и произведения двух событий обобщается на любое число событий.

Понятие вероятности

Классическое определение вероятности

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа m равновозможных элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных и единственно возможных элементарных исходов.

При классическом определении вероятность события A вычисляется по формуле: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превышающее 1.

2. Вероятность достоверного события ($A = E$) равна 1.

3. Вероятность невозможного события ($A = \varnothing$) равна 0.

Статистическое определение вероятности

Среди естествоиспытателей весьма широко распространена концепция вероятности, вытекающая из сущности понятия относительной частоты.

Определение. Относительной частотой события A называется отношение числа случаев m, в которых событие осуществлялось (наблюдалось), к общему числу проведённых испытаний n.

Относительная частота вычисляется по формуле: $P^*(A) = \dfrac{m}{n}$.

Определение. Вероятностью события A в статистическом смысле называется предел относительной частоты события (т.е. отношения частоты события m к числу всех проведённых испытаний n) при неограниченном увеличении последних, т.е. $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m}{n}$.

Примеры решения задач:

Задача 1. Из ящика, где было 4 лопнувших и 12 целых пробирок, вынуто наугад 3 пробирки. Какова вероятность того, что две из них целые?

Решение: Число способов, которыми можно извлечь $n=3$ пробирки из их общего числа $N = 4+12 = 16$, равно $C_N^n = C_{16}^3$ – числу сочетаний из N элементов по n и равно числу всех возможных элементарных исходов испытания.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: среди $n=3$ пробирок ровно $k=2$ целые. $k=2$ целые пробирки можно взять из $m=12$ целых $C_m^k = C_{12}^2$ различными способами; при этом $n-k=1$ пробирок должны быть лопнувшими, взять же $n-k=1$ лопнувших пробирок из $N-m=16-12=4$ имеющихся можно $C_{N-m}^{n-k} = C_4^1$ различными способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно

$$m = C_m^k C_{N-m}^{n-k} = C_{12}^2 C_4^1.$$

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов $n = C_{16}^3$:

$$p = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_{12}^2 C_4^1}{C_{16}^3}.$$

Вычисления:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 13!} = 560,$$

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10!}{2\cdot 1\cdot 10!} = 66,$$

$$C_4^1 = 4,$$

$$p = \frac{66\cdot 4}{560} = 0{,}4714.$$

Ответ: вероятность того, что из 3 наудачу взятых пробирок 2 целые равна $p \approx 0{,}47$.

Задачи для практического занятия:

1. Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу 3 карты. Найти вероятность того, что этими картами будут тройка, семерка, туз.

2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынут 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара.
3. В лотерее выпущено 20 билетов, 10 из которых выигрывают. Куплено 5 билетов. Какова вероятность того, что, по крайней мере, один из купленных билетов выигрышный?
4. Владелец одной карточки лотереи "Спортлото" (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже?
5. Из партии, в которой 30 деталей без дефекта и 5 с дефектом, берут наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна деталь без дефекта.
6. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные.
7. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу вынули 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?
8. В бригаде, состоящей из 4 женщин и 3 мужчин, разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчин?
9. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.
10. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найти вероятность тоге, что среди них окажутся 2 белых и 1 черный

.

Практическая работа № 11. Основные теоремы теории вероятностей.

Теория.

Вычисление вероятностей

Теорема умножения вероятностей

Определение. Вероятность события A при условии, что осуществилось событие B, называется условной вероятностью события A и обозначается следующим образом: $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

Теорема. Вероятность совместного осуществления ***двух зависимых событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое произошло: $P(AиB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Теорема. Вероятность совместного осуществления ***двух независимых событий*** A и B равна произведению вероятностей этих событий: $P(AиB) = P(A) \cdot P(B)$.

Теорема. Вероятность совместного осуществления конечного числа независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Пусть события A и B несовместны ($AB = \varnothing$) и заданы вероятности их осуществления: $P(A), P(B)$. Требуется определить вероятность осуществления одного из двух (безразлично какого) этих событий.

Теорема. Вероятность осуществления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(AилиB) = P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Вероятность осуществления одного из нескольких попарно несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий: $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Следствие. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ полная группа событий, то $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1$.

Следствие. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ полная группа событий, то $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$.

Если событие, противоположное событию A, обозначить через $\overline{A}$, то $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, откуда $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Пусть события A и B совместны и заданы вероятности этих событий $P(A), P(B)$ и вероятность их совместного появления $P(AB)$.

Требуется определить вероятность события $A+B$, состоящего в том, что осуществится хотя бы одно из совместных событий A и B.

Теорема. Вероятность осуществления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность осуществления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности и вероятности их осуществления известны: $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ..., P(A_n) = p_n$.

Пусть в результате испытания могут осуществиться все n событий, либо часть из них (в частности, только одно или ни одного). Требуется найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий.

Теорема. Вероятность осуществления события A, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2,..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2,..., \overline{A}_n$: $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$,

где $q_1 = P(\overline{A}_1) = 1 - p_1, q_2 = P(\overline{A}_2) = 1 - p_2,..., q_n = P(\overline{A}_n) = 1 - p_n$

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии осуществления одного и только одного события $H_i (i = 1,2,..., n)$ из полной группы несовместных событий $H_1, H_2,..., H_n$. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами.

Пусть известны вероятности $P(H_1), P(H_2),..., P(H_n)$ этих гипотез и условные вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2),..., P(A/H_n)$ события А. Требуется найти вероятность события A.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии осуществления одного из несовместных событий $H_1, H_2,..., H_n$, образующих полную группу событий $\left(\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\right)$, равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Данную формулу называют формулой полной вероятности.

Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии осуществления одного из несовместных событий (гипотез H) $H_1, H_2,..., H_n$, образующих полную группу событий. Пусть вероятности $P(H_1), P(H_2),..., P(H_n)$ известны до опыта. Производится опыт, в результате которого осуществляется событие A. Требуется переоценить вероятности гипотез при условии, что событие A уже произошло. Переоценка вероятностей гипотез может быть осуществлена по формуле проверки гипотез (формуле Бейеса):

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

Таким образом, вероятность гипотезы после опыта равна дроби, числителем которой является произведение вероятности этой гипотезы до опыта на вероятность события по этой гипотезе, а знаменателем – сумма таких же произведений для всех возможных в данном случае гипотез (или полная вероятность события A).

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых повторных испытаний, в каждом из которых событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, не зависящую от номера испытания (вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию A, также постоянна и равна $P(\overline{A}) = q = 1 - p$).

Требуется найти вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A произойдёт ровно m раз.

Данная задача решается с помощью формулы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}$$

Эту формулу называют также ***формулой биномиального распределения***, так как её правая часть представляет собой общий член разложения бинома Ньютона.

При большом числе испытаний n вычисление по формуле Бернулли сопряжено с громоздкостью вычислений. Чтобы избежать этих затруднений, целесообразно использовать формулы, позволяющие приближённо определять вероятности $P_n(m)$, $P_n(k_1 \le m \le k_2)$, $P_n(0 \le m < k)$, $P_n(k \le m < \infty)$, с которыми происходит событие A.

Локальная теорема Лапласа

Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность осуществления события A постоянна и равна $\mathrm{p}(0 < p < 1)$, событие A наступит ровно m раз, приближённо равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица для положительных значений функции Гаусса $\varphi(x)$ приведена в Приложение 1 данного пособия. Поскольку функция $\varphi(x)$ – чётная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то для отрицательных значений аргумента пользуются этой же таблицей.

Интегральная теорема Лапласа

Довольно часто требуется найти вероятность $P_n(k_1 \le m \le k_2)$ того, что в условиях схемы Бернулли событие A, имеющее постоянную вероятность, при n испытаниях появляется не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

Данная вероятность может быть найдена с помощью интегральной теоремы Лапласа.

Теорема. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность осуществления события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, событие A наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз приближённо равна:

$$P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dz$ – стандартный интеграл вероятностей (функция Лапласа),

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица для неотрицательных значений функции Лапласа $x \in [0;5]$ приведена в Приложении 5 данного пособия. Полагают, что для значений $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$.

Если $x < 0$, то используют таблицу *Приложение 2* с учётом того, что функция Лапласа есть функция нечётная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Закон Пуассона – закон редких событий

Пусть требуется найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность осуществления события A очень мала, событие A наступит ровно m раз.

В этом случае ни формула Бернулли, ни асимптотическая формула Лапласа не могут быть практически использованы для решения поставленной задачи.

При больших n, малых p $(p < 0{,}1)$ и если выполняется условие $npq \le 9$, то для вычисления искомой вероятности применяют формулу Пуассона (закон Пуассона):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{где } \lambda = np.$$

Формула Пуассона широко используется в теории массового обслуживания.

Простейший поток событий

Определение. Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (в предельном случае, если события следуют через определенные интервалы).

Вероятность появления m событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона:

$$P_n(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\cdot e^{-\lambda t}$$, где

λ – интенсивность простейшего потока, или среднее число событий, появляющихся в единицу времени.

Примеры решения задач:

Задача 1. Центральная городская аптека закреплена за тремя больницами. Вероятность того, что в течение рабочего дня придется отпустить медикаменты первой больнице, равна 0,6, второй больнице – 0,2, третьей – 0,4. Какова вероятность того, что в течение рабочего дня придется отпустить медикаменты: 1) одной больнице? 2) по крайней мере, двум больницам?

Решение: Пусть событие A состоит в том, что аптеке придется отпустить медикаменты первой больнице; вероятность этого события по условию равна

$$p(A)=0{,}6,$$

вероятность противоположного события $\overline{A}$ – медикаменты отпускаться не будут – будет равна

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}6=0{,}4;$$

событие B состоит в том, что аптеке придется отпустить медикаменты второй больнице; вероятность этого события по условию равна

$$p(B)=0{,}2,$$

вероятность противоположного события $\overline{B}$ – медикаменты отпускаться не будут – будет равна

$$p(\overline{B})=1-p(B)=1-0{,}2=0{,}8;$$

событие C состоит в том, что аптеке придется отпустить медикаменты третьей больнице; вероятность этого события по условию равна

$$p(C)=0{,}4,$$

вероятность противоположного события $\overline{C}$ – медикаменты отпускаться не будут – будет равна

$$p(\overline{C})=1-p(C)=1-0{,}4=0{,}6.$$

Событие D – аптеке придется отпустить медикаменты одной аптеке – реализуется следующим образом:

$$D=\left(A и \overline{B} и \overline{C}\right) или \left(\overline{A} и B и \overline{C}\right) или \left(\overline{A} и \overline{B} и C\right).$$

Для нахождения вероятности этого события используем теоремы умножения и сложения вероятностей событий: $p(D)=p(A)p(\overline{B})p(\overline{C})+p(\overline{A})p(B)p(\overline{C})+p(\overline{A})p(\overline{B})p(C)$

$$p(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}464$$

Событие E – аптеке придется отпустить лекарство, по крайней мере, двум (т.е. двум или трем) больницам – включает в себя следующие события:

$$E = \left(A и и B\overline{C}\right) или \left(\overline{A} и B и C\right) или \left(A и \overline{B} и C\right) или \left(A и и B и \ \right).$$

Для нахождения вероятности этого события используем теоремы умножения и сложения вероятностей событий:

$$p(E) = p(A)p(B)p(\overline{C}) + p(\overline{A})p(B)p(C) + p(A)p(\overline{B})p(C) + p(A)p(B)p(C), \text{ или}$$

$$p(E) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}344.$$

Ответ: 1) вероятность того, что центральной городской аптеке в течение рабочего дня придется отпустить медикаменты одной больнице, равна $p(D) = 0{,}464$; 2) вероятность того, что центральной городской аптеке в течение рабочего дня придется отпустить медикаменты, по крайней мере, двум больницам, равна $p(E) = 0{,}344$.

Задача 2. В цехе установлено 5 датчиков предельно допустимой концентрации пыли в воздухе, каждый из которых может включать систему сигнализации. Вероятность срабатывания первого датчика равна 0,8, второго – 0,9, третьего – 0,85, четвертого – 0,7, пятого – 0,75. 1) Найти вероятность того, что по достижении предельно допустимой концентрации пыли сигнализация сработает? 2) Сигнализация сработала. Какова вероятность того, что сигнализацию включил третий датчик?

Решение: Пусть событие A состоит в том, что сигнализация сработала. Это событие может произойти только в случае появления одного из несовместных событий H_i – включение $i-м$ датчиком сигнализации. Вероятности событий H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 по условию одинаковы и равны $\frac{1}{5}$. События H_i образуют полную группу, т.к. $\sum_{i=1}^{5} p(H_i) = 1$.

Известны условные вероятности события A $p(A/H_i)$ – вероятности срабатывания $i-ого$ датчика:

$$p(A/H_1) = 0{,}8,\ p(A/H_2) = 0{,}9,\ p(A/H_3) = 0{,}85,\ p(A/H_4) = 0{,}7,\ p(A/H_5) = 0{,}75.$$

1) Вероятность события A вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

или $$p(A) = \frac{1}{5}(0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}85 + 0{,}7 + 0{,}75) = 0{,}8.$$

Событие A произошло. Условную вероятность того, что при этом сработал третий датчик, (событие H_3/A) найдем по формуле Байеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \text{ или}$$

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_{3i})}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}85}{0{,}8} = 0{,}2125 .$$

Ответ: 1) вероятность того, что по достижении предельно допустимой концентрации пыли сигнализация сработает, равна $p(A) = 0{,}8$; 2) вероятность того, что сигнализацию при этом включил третий датчик, равна $p(H_3/A) = 0{,}2125$.

Задача 3. Вероятность заражения желудочно-кишечными заболеваниями при однократном приеме внутрь 250 мл не кипяченой речной воды составляет 0,1. Какова вероятность того, что из группы туристов, насчитывающей 6 человек, заболеет хотя бы один, если все они выпили по 250 мл не кипяченой речной воды?

Решение: События – заражение желудочно-кишечными заболеваниями относятся к повторным независимым испытаниям. Вероятность того, что некоторое событие A произойдет ровно m раз в n испытаниях, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} p^m \cdot q^{n-m} .$$

По условию: $n = 6$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, $m \geq 1$ (событие – «хотя бы один» – означает «один и более»), т.е. $\{m\} = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6$.

Известно, что сумма вероятностей событий, составляющих полную систему, равна 1, т.е. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Для данного случая имеем: $p_6(0) + p_6(1) + p_6(2) + ... + p_6(6) = 1$ или $p_6(0) + p_6(1 \leq m \leq 6) = 1$,

тогда получаем, что $p_6(1 \leq m \leq 6) = 1 - p_6(0)$.

Вычислим $p_6(1 \leq m \leq 6)$:

$$p_6(1 \leq m \leq 6) = 1 - p_6(0) = 1 - q^6 = 1 - 0{,}9^6 = 0{,}468559 .$$

Ответ: вероятность того, что из группы туристов, насчитывающей 6 человек, заболеет хотя бы один, равна $p_6(1 \leq m \leq 6) = 0{,}468559$.

Задача 4. Какова вероятность того, что в партии таблеток, насчитывающей 10000 штук, 1) не более 20 окажутся нестандартными, если вероятность того, что отдельная таблетка окажется нестандартной, составляет 0,0012? 2) ровно 12 штук окажутся нестандартными?

Решение: События – нестандартная таблетка – относятся к повторным независимым испытаниям.

Число испытаний ($n = 10000$) в данном случае велико, поэтому использование формулы Бернулли для нахождения вероятности $P_n(m)$ приводит к вычислительным трудностям.

1) Для ответа на первый вопрос используем формулу, позволяющую приближённо определять вероятность $P_n(0 \le m < k)$, с которой происходит событие A.

По условию: $n = 10000$, $p = 0{,}0012$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}0012 = 0{,}9988$, $np = 10000 \cdot 0{,}0012 = 12$, $npq = 12 \cdot 0{,}9988 = 11{,}9856 > 9$.

Анализ условия показывает, что $npq > 9$, значит, для вычисления вероятности $P_{10000}(0 \le m \le 20)$ используем интегральную теорему Лапласа:

$P_n(m) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dz$ – стандартный интеграл вероятностей (функция Лапласа), $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таким образом, получаем:

$$P_{10000}(0 \le m \le 20) \approx \Phi(\frac{20-12}{\sqrt{11{,}9856}}) - \Phi(\frac{0-12}{\sqrt{11{,}9856}}) = \Phi(2{,}31) - \Phi(-3{,}47) = \Phi(2{,}31) + \Phi(3{,}47).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим (*Приложение 2)*, что $\Phi(2{,}31) = 0{,}48955, \Phi(3{,}47) = 0{,}49966$, тогда вероятность

$$P_{10000}(0 \le m \le 20) \approx 0{,}48955 + 0{,}49966 = 0{,}98921.$$

2) Для ответа на второй вопрос используем формулу, позволяющую приближённо определять вероятность $P_n(m)$, с которой происходит событие $A: P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ (локальная теорема Лапласа).

По условию: $n = 10000$, $p = 0{,}0012$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}0012 = 0{,}9988$, $np = 10000 \cdot 0{,}0012 = 12$, $npq = 12 \cdot 0{,}9988 = 11{,}9856$, $m = 12$.

Вычисляем $P_{10000}(12)$:

$$P_{10000}(12) \approx \frac{1}{\sqrt{11{,}9856}} \varphi(\frac{12-12}{\sqrt{11{,}9856}}) = \frac{1}{3{,}462} \varphi(0).$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ находим *(Приложение 1)*, что $\varphi(0) = 0{,}3989$.

Тогда $P_{10000}(12) \approx \frac{1}{3{,}462} \cdot 0{,}3989 = 0{,}1152$.

Ответ: 1) вероятность того, что в партии таблеток из 10000 штук, не более 20 окажутся нестандартными, равна $P_{10000}(m \le 20) \approx 0{,}9892$; 2) вероятность того, что в партии таблеток из 10000 штук, ровно 12 окажутся нестандартными, равна $P_{10000}(12) \approx 0{,}1152$.

Задача 5. Среднее число самолетов, прибывших в аэропорт за 1 минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты прибудут: а) не менее 3-х самолетов; б) не более 2; в) 4 самолета.

Решение: События – прибытия самолетов в аэропорт – представляют собой простейший *поток событий***.**

Вероятность появления m событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона: $P_n(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}$, где

λ – интенсивность простейшего потока, или среднее число событий, появляющихся в единицу времени.

По условию: $\lambda = 3\ {}^{1}\!/_{мин}$, $t = 2мин$:

а) $m \ge 3$, т.е. $m \in [3;+\infty)$. Для полной системы событий имеем: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Или в данном случае: $p_2(0) + p_2(1) + p_2(2) + p_2(3 \le m < \infty) = 1$. Тогда интересующая нас вероятность $p_2(3 \le m < \infty) = 1 - (p_2(0) + p_2(1) + p_2(2))$.

Вычисляем: $P_2(0) = \frac{(3 \cdot 2)^0}{0!} \cdot e^{-3 \cdot 2} = e^{-6}$, $P_2(1) = \frac{(3 \cdot 2)^1}{1!} \cdot e^{-6} = 6 \cdot e^{-6}$,

$P_2(1) = \frac{(3 \cdot 2)^2}{2!} \cdot e^{-6} = 18 \cdot e^{-6}$, $p_2(0) + p_2(1) + p_2(2) = (1 + 6 + 18) \cdot e^{-6} = 25 \cdot e^{-6} \approx 0{,}06197$

$p_2(3 \le m < \infty) = 1 - 0{,}06197 = 0{,}93803;$

б) $m \le 2$, т.е. $m \in [0;2]$. Согласно теореме сложения вероятностей получаем, что $p_2(0 \le m \le 2) = p_2(0) + p_2(1) + p_2(2)$. Воспользуемся вычислениями, сделанными в предыдущем пункте, и получим, что $p_2(m \le 2) \approx 0{,}06197$;

в) $m = 4$. В данном случае искомая вероятность $P_2(4)$ вычисляется по формуле Пуассона: $P_n(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda t}$ и будет равна $P_2(4) = \frac{(6)^4}{4!} \cdot e^{-6} = \frac{1296}{24} \cdot e^{-6} = 54 \cdot e^{-6} \approx 0{,}1339$.

Ответ: вероятность того, что за 2 минуты прибудут: а) не менее 3-х самолетов, равна $p_2(m \ge 3) \approx 0{,}9380$; б) не более 2, равна $p_2(m \le 2) \approx 0{,}0620$; в) 4 самолета, равна $P_2(4) \approx 0{,}1339$

Задачи для практического занятия:

1. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка - 0,8, а для второго - 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет только один из стрелков? По крайней мере, один стрелок?
2. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он: а) промахнется вес 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза.
3. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка 9/13.Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.
4. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятность попадания в цель каждым из охотников одинакова и равна 0,8. Найти вероятность того, что будет произведено: а) один; б) два; в) три; г) четыре выстрела.
5. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора-автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый автомат, равна 0,95; второй - 0,9. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал: а) хотя бы от одного сигнализатора; б) только от одного сигнализатора.
6. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0,9; на третий - 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.
7. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7, второй - 0,75, третий - 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего а) потребуют какие-либо два станка; б) хотя бы один станок.
8. Два стрелка производят в цель по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго - 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба; б) только один; в) ни один; г) хотя бы один.
9. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй - 0,4, третий - 0,7,

четвертый - 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

10. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй - 0,3, третий - 0,4. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.
11. Завод выпускает для магнитофонов три типа предохранителей. Доля каждого из них в общем объеме продукции составляет 30% , 50% , 20%, соответственно. При перегрузке сети предохранитель первого типа срабатывает с вероятностью 0,8, второго – 0,9 и третьего– 0,85. Определить вероятность того, что: а) выбранный наудачу предохранитель не сработает при перегрузке сети; б) предохранитель, который не сработал при перегрузке сети, принадлежит к первому типу?
12. В продукции кондитерской фабрики шоколадные конфеты составляют 40% ассортимента. В среднем 10 из 1000 шоколадных конфет оказываются с браком. Для остальной продукции этот показатель равен 5 из 200, Найти вероятность того, что; а) выбранное наугад изделие окажется без брака; б) выбранное наугад изделие без брака оказалось шоколадной конфетой.
13. В машбюро 5 пишущих машинок. Вероятность того, что каждая из них в течение года потребует ремонта, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года не придется ремонтировать хотя бы две машинки.
14. В магазин вошли 5 покупателей. Найти вероятность того, что не менее трех из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,3.
15. Рабочий обслуживает 5 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна 1/3. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать 4 станка?
16. В партии товаров имеется 400 изделий, Вероятность того, что изделие будет высшего сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что а) в партии товаров окажется ровно 320 изделий высшего сорта; б) число изделий высшего сорта в партии товаров будет от 310 до 330?
17. В результате проверки качества приготовленного посева зерна установлено, что 90% зёрен всхожи. Для посадки отобрано и высажено 900 зёрен. Найти вероятность того, что: а) из взятых зёрен прорастёт 820 штук; б) прорастёт от 600 до 640 посаженных зёрен.

Практическая работа № 12. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины.

Теория.

Определение. Величина, принимающая свои значения в зависимости от исходов некоторого испытания, причем для каждого элементарного исхода имеющая одно единственное значение, называется случайной.

Дискретная случайная величина

Определение. Величина, принимающая отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями называется дискретной случайной величиной.

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных ее значений на соответствующие им вероятности: $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$.

Свойства математического ожидания

Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C)=C$, где $C = const$.

Математическое ожидание алгебраической суммы нескольких случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий этих величин: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

Следствие. Если $C = const$, то $M(X \pm C) = M(X) \pm C$.

3. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C \cdot X) = M(C) \cdot M(X) = C \cdot M(X)$, где $C = const$.

4. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях (математическое ожидание биноминального распределения) равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: $M(X) = np$.

Дисперсия

Определение. Дисперсией $D(X)$ дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2.$$

Для вычисления дисперсии также можно использовать следующую формулу:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

т.е. дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом её математического ожидания.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$, $C = const.$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$, $C = const.$
3. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y).$
4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

5. Если $C = const$, то $D(X+C) = D(X)$.

Замечание 2. Для вычисления дисперсии биноминального распределения можно воспользоваться следующей формулой: $D(X) = npq$, где n – число испытаний; p – вероятность осуществления события A в одном испытании; q – вероятность осуществления события $\overline{A}$ (противоположного событию A) в одном испытании.

Среднеквадратическое отклонение

Определение. Среднеквадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D}.$$

Замечание 3. На основании данного определения для обозначения дисперсии часто используется символ $\sigma^2(X)$.

Задание к практическому занятию:

1. Для двух независимых случайных величин **x** и **y** с законами распределения, заданными соответствующими таблицами, выполните следующее:

заполните пустые места в таблицах;

постройте закон распределения случайной величины $\mathbf{z}$, являющейся линейной комбинацией случайных величин $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$;

постройте график функции распределения $F(\mathbf{z})$

найдите $M[\mathbf{z}]$ и $D[\mathbf{z}]$ (двумя способами: а) используя таблицу закона распределения случайной величины $\mathbf{z}$; б) используя свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины).

Вариант 1.

$\boldsymbol{y}$	0	1	2	3
q_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	

$\boldsymbol{x}$	1	2	3
p_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	

$\mathbf{z} = 2\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Вариант 2.

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{y}$	1	2	3
q_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	

$\mathbf{z} = 2\,\boldsymbol{x} - 2\,\boldsymbol{y}$.

2. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель равна 0,6. Составить закон распределения и найти числовые характеристики СВ X – числа произведенных выстрелов.

3. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу выбирают трех студентов. Найти закон распределения и числовые характеристики ДСВ X – числа девушек среди отобранных.

Практическая работа № 13. Плотность распределения и числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Интегральная функция распределения

Для количественной характеристики распределения непрерывной случайной величины X вводится понятие интегральной функции распределения $F(X)$ случайной величины.

Определение. Интегральной функцией распределения называют функцию $F(X)$, определяющую для каждого значения X вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x, т. е.

$F(X) = p(X < x)$.

Свойства функции распределения

1. Значения интегральной функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2, moF(x_1) < F(x_2)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X попадёт в интервал $(a;b)$, равна приращению её интегральной функции распределения на интервале $(a;b)$: $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определённое, заранее заданное значение равна нулю: $p(X = x) = 0$.

3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(X) = 0$ при $x \leq a$, $F(X) = 1$ при $x \geq b$.

Следствие 3. Если возможные значения случайной величины X расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Для дискретной случайной величины функция распределения определяется по формуле: $F(X) = \sum\limits_{x_i < x} p(X = x_i)$, где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все значения x_i, меньшие x.

Дифференциальная функция распределения (плотность распределения непрерывной случайной величины).

Непрерывную случайную величину можно задавать не только с помощью интегральной функции, но и с использованием дифференциальной функции распределения вероятностей.

Определение. Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ называется производная от интегральной функции:

$f(x) = F'(x)$.

Часто вместо термина «дифференциальная функция» пользуются термином «дифференциальный закон распределения» или термином «плотность вероятности».

Так как интегральная функция является первообразной дифференциальной функции, то вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством: $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Если известна дифференциальная функция, можно найти интегральную функцию распределения: $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Свойства дифференциальной функции распределения

Дифференциальная функция распределения есть функция неотрицательная: $f(x) \geq 0$.

Несобственный интеграл от дифференциальной функции распределения равен 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Последнее равенство называется условием нормировки плотности вероятностей.

Непрерывная случайная величина

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если все её возможные значения полностью заполняют какой-либо конечный или бесконечный интервал числовой оси.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

1. Математическое ожидание

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;b]$, называется определённый интеграл:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X.

Если возможные значения X принадлежат всей числовой оси OX, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Все свойства математического ожидания дискретной случайной величины имеют силу и для непрерывной случайной величины.

2. Дисперсия

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

Отсюда следует, что если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a;b]$, то дисперсия

$$D(X)=\int_a^b \left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx.$$

С учётом того, что для вычисления дисперсии справедлива формула

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, то

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

Если возможные значения X принадлежат всей оси OX, то

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx \text{ или}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X).$$

3. Среднеквадратическое отклонение

Среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется точно так же, как и для дискретной случайной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D}.$$

Нормальное распределение непрерывной случайной величины (закон Гаусса)

Определение 1. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется нормальным, если плотность вероятности описывается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание нормально распределенной случайной величины,

σ – среднеквадратическое отклонение нормального распределения.

Закон Гаусса имеет большое значение для практического применения по следующим причинам:

На практике многие случайные величины оказываются либо нормально распределёнными, либо с распределениями, близкими к нормальному.

Случайную величину, не распределённую нормально, часто можно преобразовать таким образом, чтобы она имела распределение, близкое к нормальному.

Нормальное распределение может служить аппроксимацией для других распределений, например, для биноминального распределения.

При проверке статистических гипотез часто возникают распределения, которые оказываются нормальными.

Вычисление вероятности при нормальном распределении случайной величины X

1. Вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ определяется формулой:

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma});$$

2. Вероятность попадания в интервал $(-\infty;\beta)$ находим по формуле:

$$p(-\infty < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(-\infty), \text{ или } p(-\infty < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) + 0{,}5;$$

3. Вероятность попадания в интервал $(\beta;+\infty)$ находим по формуле:

$$p(\beta < X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) \text{ или } p(\beta < X < +\infty) = 0{,}5 - \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma});$$

4. Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от математического ожидания a по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ равна $p(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$,

где $\Phi(X)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ – функция Лапласа *(Приложение 2)*, $a-$ математическое ожидание, $\sigma-$ среднеквадратическое отклонение.

Примеры решения задач:

Задача 1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	10	30	50	70	90
p	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Найти:

а) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

б) составить функцию распределения случайной величины $F(X)$ и построить ее график;

в) вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x_2 < X < x_4)$, пользуясь составленной функцией распределения $F(X)$;

г) составить закон распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$;

д) вычислить математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y двумя способами: пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, а также непосредственно по закону распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$.

Решение:

1. Для вычисления числовых характеристик случайной величины X составим расчетную таблицу:

X	10	30	50	70	90	$\sum$
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	1
XP	1	6	5	14	36	$M(X) = 62$
X^2P	10	180	250	980	3240	$M(X^2) = 4660$

Таким образом:

математическое ожидание по определению равно $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$, или $M(X)=62$;

дисперсию $D(X)$ определим по формуле $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$, или $D(X)=4660-62^2=816$;

среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ по определению равно $\sigma(X)=\sqrt{D}$, или $\sigma(X)=\sqrt{816}=28{,}57$;

2. Для составления функции распределения $F(X)$ воспользуемся ее определением $F(X)=\sum_{x_i<x} p(X=x_i)$ и свойствами: если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(X)=0$,если $x \le a$, $F(X)=1$, если $x \ge b$. Таким образом, интегральная функция имеет вид:

$$F(X)=\begin{cases} 0;\, x \le 10 \\ 0{;}1{,}10 < x \le 30 \\ 0{,}3;30 < x \le 50 \\ 0{,}4;50 < x \le 70 \\ 0{,}6;70 < x \le 90 \\ 1;\, x > 90 \end{cases}$$

3. График интегральной функции дискретной случайной величины X рис1.

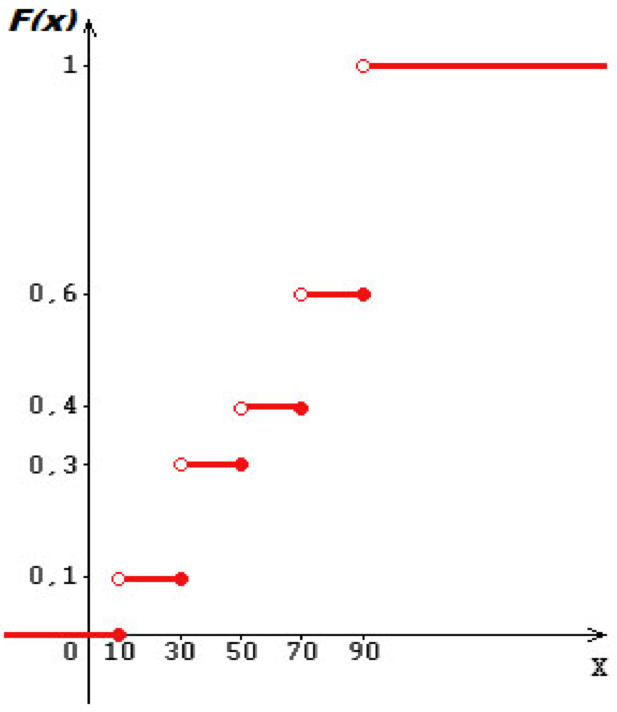


Рис 1. График интегральной функции $F(x)$ дискретной случайной величины X

4. Вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x_2 < X < x_4)$ вычислим по формуле $p(a < X < b) = F(b) - F(a)$. В данном случае $x_2 = 30, x_4 = 70$, следовательно $p(30 < X < 70) = F(70) - F(30) = 0,4 - 0,3 = 0,1$;
5. Составим закон распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$. Для этого найдем все возможные значения случайной величины Y :

$$y_1 = 100 - 2 \cdot x_1 = 100 - 2 \cdot 10 = 80;$$
$$y_2 = 100 - 2 \cdot x_2 = 100 - 2 \cdot 30 = 40;$$
$$y_3 = 100 - 2 \cdot x_3 = 100 - 2 \cdot 50 = 0;$$
$$y_4 = 100 - 2 \cdot x_4 = 100 - 2 \cdot 70 = -40;$$
$$y_5 = 100 - 2 \cdot x_5 = 100 - 2 \cdot 90 = -80.$$

Вероятности $p(y_i)$, с которыми Y принимает свои возможные значения, равны вероятностям $p(x_i)$, т.е. $p(x_1 = 10) = p(y_1 = 80) = 0,1$ и т.д.

Таким образом, учитывая, что в законе распределения должно соблюдаться условие ранжирования случайной величины от меньшей к большей, для случайной величины $Y = 100 - 2X$ имеем:

Y	-80	-40	0	40	80
p	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1

6. Вычислим математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y:

– пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, найдем $M(Y)$, $D(Y)$ для величины $Y = 100 - 2X$:

$$M(Y) = M(100 - 2 \cdot X) = M(100) - M(2 \cdot X) = 100 - 2 \cdot M(X) = 100 - 2 \cdot 62 = -24;$$

$$D(Y) = D(100 - 2 \cdot X) = D(100) + D(2 \cdot X) = 0 + 4 \cdot D(X) = 4 \cdot 816 = 3264.$$

– непосредственно по закону распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$. Составим таблицу для вычислений $M(Y)$ и $D(Y)$:

Y	-80	-40	0	40	80	$\sum$
P	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1	1
YP	-32	-8	0	8	8	$M(Y)=-24$
Y^2P	2560	320	0	320	640	$M(Y^2)=3840$

Таким образом:

математическое ожидание равно $M(Y)=-24$;

дисперсию $D(Y)$ определим по формуле $D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)$, или $D(Y)=3840-(-24^2)=3264$.

Задача 2. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(X)$. Требуется:

убедиться, что заданная функция $F(X)$ является функцией распределения некоторой случайной величины, проверив свойства $F(X)$.

В случае положительного ответа найдите:

дифференциальную функцию $f(x)$;

математическое ожидание случайной величины X; дисперсию случайной величины X (двумя способами) и среднеквадратическое отклонение; постройте графики интегральной $F(X)$ и дифференциальной $f(x)$ функций;

вероятность попадания величины X в интервал $(\alpha;\beta)$ двумя способами (используя интегральную и дифференциальную функции), а затем проиллюстрируйте этот результат на графиках $F(X)$ и $f(x)$.

$$F(X)=\begin{cases}0; x\le 0\\ 0{,}5x; 0<x\le 2\\ 1; x>2\end{cases} \qquad \alpha=-1; \beta=1$$

Решение:

1) Если функция $F(X)$ является функцией распределения и если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(X)=0$, если $x\le a$, $F(X)=1$, если $x\ge b$. Проверим это. По условию $X\in(0;2)$, тогда $F(0)=0{,}5\cdot 0=0, F(2)=0{,}5\cdot 2=1$. Таким образом, заданная функция $F(X)$ является функцией распределения.

2) Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ называется производная от интегральной функции: $f(x) = F'(x)$.

Следовательно, получаем:

$$F(X) = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ 0{,}5x; 0 < x \le 2 \\ 1; x > 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ 0{,}5; 0 < x \le 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

3) Для вычисления числовых характеристик случайной величины X воспользуемся формулами:

– $M(X) = \int_a^b x f(x) dx$, где $f(x)$ – плотность вероятности случайной величины X и если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a;b]$;

$-D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(X)$, если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a;b]$;

$-\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Вычисляем:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot 0{,}5 \cdot dx = 0{,}25 \cdot \left[x^2\right]_0^2 = 0{,}25(2^2 - 0) = 0{,}25 \cdot 4 = 1;$$

$$D(X) = \int_0^2 0{,}5 \cdot x^2 dx - 1^2 = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^2 - 1 = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5774 .$$

График интегральной функции непрерывной случайной величины X рис 2.

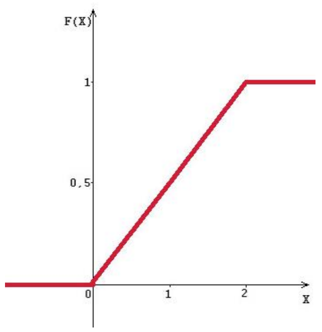


Рис 2. График интегральной функции $F(x)$ непрерывной случайной величины X

График дифференциальной функции непрерывной случайной величины X рис 3.

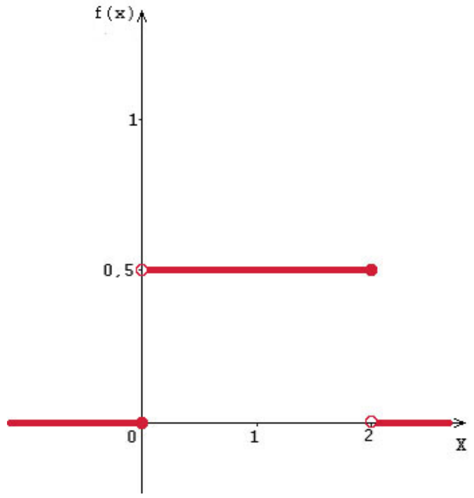


Рис 3. График дифференциальной функции $f(x)$ непрерывной случайной величины X

4) Вычислим вероятность попадания величины X в интервал $(\alpha;\beta)$, используя интегральную функцию $F(X)$: вероятности попадания случайной величины X в интервал $(\alpha < X < \beta)$ вычислим по формуле $p(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. В данном случае $\alpha = -1,\ \beta = 1$, следовательно $p(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = 0{,}5 \cdot 1 - 0 = 0{,}5$. Вычислим вероятность попадания величины X в интервал $(\alpha;\beta)$, используя дифференциальную функцию $f(x)$: $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$. В данном случае $p(-1 < X < 1) = \int_0^1 0{,}5dx = 0{,}5 \cdot [x]_0^1 = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$, т.к. $f(x) = 0$, если $x \le 0$.

Задача 3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (15;35) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35;40)?

Решение

1) По известной вероятности попадания X в заданный интервал найдем среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$. Для этого воспользуемся формулой $p(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$. Согласно условию $a = 25$, $\alpha = 10, \beta = 15, p = 0{,}2$, т.е.

$$p(10 < X < 15) = \Phi(\frac{35 - 25}{\sigma}) - \Phi(\frac{15 - 25}{\sigma}) = 0{,}2$$

или $\Phi(\frac{35-25}{\sigma})-\Phi(\frac{15-25}{\sigma})=0{,}2$,

или

$\Phi(\frac{10}{\sigma})-\Phi(\frac{-10}{\sigma})=0{,}2$,

или $2\Phi(\frac{10}{\sigma})=0{,}2$.

$\Rightarrow \Phi(\frac{10}{\sigma})=0{,}1$

По таблице значений функции $\Phi(X)$ находим *(Приложение 2)*, что $\Phi(X)=0{,}1$, если $X=0{,}25$,

следовательно, $X=\frac{10}{\sigma}=0{,}25 \Rightarrow \sigma=\frac{10}{0{,}25}=40$.

2) Вероятность попадания X в интервал (35;40) найдем, используя ту же формулу, тогда

$$p(35<X<40)=\Phi(\frac{40-25}{40})-\Phi(\frac{35-25}{40})=\Phi(0{,}375)-\Phi(0{,}25)$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ находим, что $\Phi(0{,}375)=0{,}14615$, $\Phi(0{,}25)=0{,}0987$, а вероятность $P\ (35<X<45)\approx 0{,}14615-0{,}0987=0{,}04745$.

Задания к практическому занятию:

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X ***. Найти:***

а) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

б) составить функцию распределения случайной величины $F(X)$ и построить ее график;

в) вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x_2<X<x_4)$, пользуясь составленной функцией распределения $F(X)$;

г) составить закон распределения случайной величины $Y=100-2X$;

д) вычислить математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y двумя способами: пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, а также непосредственно по закону распределения случайной величины $Y=100-2X$

X	10	12	20	25	30
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

X	10	12	14	16	18
P	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

X	4	6	8	10	12
P	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

X	30	40	50	60	70
P	0,2	0,2	0,2	0,3	0,1

X	2	4	6	8	10
P	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

2. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(X)$. Требуется убедиться, что заданная функция $F(X)$ является функцией распределения некоторой случайной величины, проверив свойства $F(X)$. В случае положительного ответа найдите: а) дифференциальную функцию $f(x)$; в) математическое ожидание случайной величины X; c) дисперсию случайной величины X (двумя способами) и среднеквадратическое отклонение; d) построить графики интегральной $F(X)$ и дифференциальной f(x) функций; e) определить вероятность попадания величины X в интервал ($\alpha;\beta$) двумя способами (используя интегральную и дифференциальную функции), а затем проиллюстрировать этот результат на графиках $F(X)$ и $f(x)$.

1. $F(X)=\begin{cases}0, x\le -4\\ 0{,}2(x+4), -4<x\le 1\\ 1, x>1\end{cases}$ $\alpha=-2;\beta=0$

2. $F(X)=\begin{cases}0, x\le -3\\ \frac{x+3}{5}, -3<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$ $\alpha=-2;\beta=0$

3. $F(X)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 3x^2+2x, 0<x\le \frac{1}{3}\\ 1, x>\frac{1}{3}\end{cases}$ $\alpha=-2;\beta=1/6$

4. $F(X)=\begin{cases}0, x\le 1\\ 0{,}5(x^2-x), 1<x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$ $\alpha=0;\beta=1{,}5$

5. $F(X)=\begin{cases}0, x\le -1\\ 0{,}5(x+1), -1<x\le 1\\ 1, x>1\end{cases}$ $\alpha=-3;\beta=0$

Практическая работа № 14. Элементы математической статистики.

Теория.

Статистический анализ результатов исследований

Статистика – это наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений, обладающих закономерностью, с целью выявления этой закономерности.

При решении многих практических задач, связанных со статистическими моделями, необходимые вероятностные характеристики случайных величин неизвестны и должны определяться по экспериментальным данным.

Такое статистическое описание результатов экспериментов, построение и проверка различных математических моделей, использующих понятие вероятности, составляют основное содержание математической статистики.

Методы математической статистики расширяют возможности научного предсказания и целесообразного принятия решений в условиях неопределенности, когда принципиально не может быть известен полный комплекс условий проведения эксперимента.

Основополагающими понятиями статистической теории являются понятия *генеральной совокупности и выборки*.

Определение. Совокупность, состоящая из всех объектов, которые могут быть к ней отнесены, называется генеральной.

Определение. Число всех объектов, составляющих генеральную совокупность, называется ее объёмом и обозначается N.

Определение. Конечный набор объектов, случайным образом отобранный из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью, или выборкой.

Определение. Число объектов выборки называется ее объёмом и обозначается n.

Для того, чтобы по выборке можно было сделать правильные выводы обо всей генеральной совокупности, она должна быть репрезентативной. Это значит, что все пропорции генеральной совокупности должны быть представлены в выборке. Репрезентативность выборки обеспечивается случайностью отбора. Это означает, что любой объект выборки отобран случайно, при этом все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Иными словами выборка должна давать обоснованное представление о генеральной совокупности. Для обеспечения репрезентативности выборка должна быть достаточно объемной с тем, чтобы охватывать всю генеральную совокупность, и производится беспристрастно по отношению к отдельным ее частям.

Статистическое распределение выборки

При систематизации данных выборочных обследований используются статистические дискретные и интервальные ряды распределения.

Полученные результаты исследований представляют собой множество беспорядочных данных. Для изучения их подвергают обработке. Изучение структуры совокупности достигается построением рядов распределения, характеризующих распределение единиц совокупности по одному признаку. Распределение единиц совокупности по количественному признаку называют вариационным рядом. Ряд может быть построен как по дискретному, так и по непрерывному признаку.

Определение. Дискретным называется признак, который может принимать определенные значения из конечного набора таких значений, выражаемых, как правило, целыми числами, например, число детей в детском саду.

Определение. Непрерывный признак может принимать любые промежуточные значения. Как правило, при построении вариационных рядов по непрерывному признаку последний указывается в виде интервалов «от и до», и ряд называется интервальным.

Выделяют статистические дискретные и интервальные ряды распределения.

Статистический дискретный ряд распределения

Для того чтобы построить ряд распределения необходимо иметь выборку объема n. В данной выборке наименьшее значение x_1, признака встречается n_1 раз, следующее по величине x_2 встречается n_2 раз, $x_k - n_k$ раз.

Каждый элемент выборки обозначается x_i и называется вариантой. Число наблюдений варианты n_i в выборке называется частотой встречаемости данной варианты. Последовательность вариант, записанных в определенном порядке, называется вариационным рядом.

Определение. Статистическое распределение – это совокупность вариант x_i и соответствующих им частот n_i. Сумма всех частот равна объему выборки: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Определение. Относительными частотами называются отношения вида: $p_1^* = \frac{n_1}{n}$, $p_2^* = \frac{n_2}{n}$, …, $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, …, $p_k^* = \frac{n_k}{n}$, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$.

Дискретное распределение частот записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит все варианты x_i, перечисленные по возрастанию, а вторая строка содержит соответствующие вариантам частоты встречаемости n_i.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Замечание. Вторая строка в таблице может содержать соответствующие вариантам относительные частоты $p_i^* = \frac{n_i}{n}$.

Для графического изображения такого ряда на координатной плоскости откладывают точки $(x_i; n_i)$ и соединяют их отрезками прямых. Получают наглядное представление статистического распределения – ломаную линию, называемую полигоном частот рис 4.

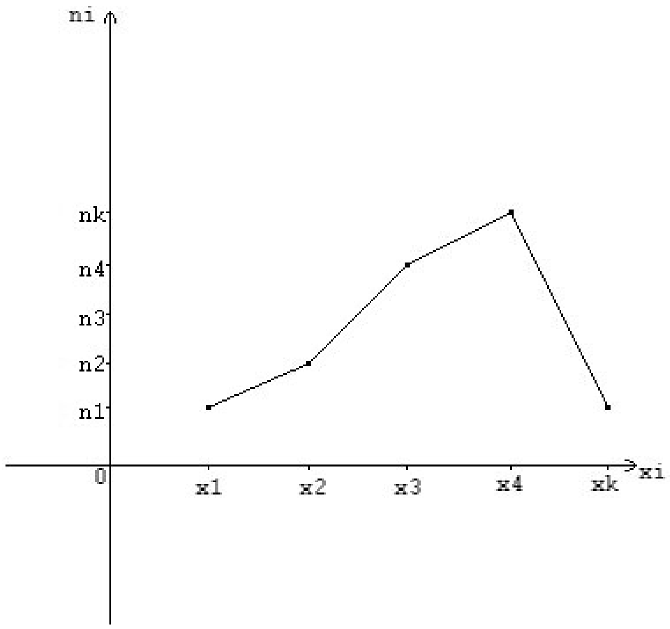


Рис 4. Полигон частот

Статистический интервальный ряд распределения

Определение. Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами (или долями) попаданий в каждый из них значений величины.

Число интервалов k находится по формуле Стерджеса (если объем большой выборки не более 100):

$$k = 1 + 3{,}32 \lg n.$$

Ширина интервала находится по формуле:

$$h = \frac{R}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

где k –число интервалов, $x_{\max}$ – максимальное значение варианты и $x_{\min}$ – минимальное значение варианты.

Для наглядного представления статистического интервального ряда распределения строится гистограмма.

На оси Ох откладывают частичные интервалы длиной h. На каждом частичном интервале строят прямоугольник с основанием h, равным длине частичного интервала, и высотой $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{p_i^*}{h}$), равной частному от деления частоты интервала (относительной частоты) на длину интервала. Частоту (относительную частоту), приходящуюся на единицу интервала, называют плотностью частоты (относительной частоты). Площадь i – го частичного прямоугольника равна $\frac{n_i}{h}h = m_i\left(\frac{p_i^*}{h}h = p_i^*\right)$. Полученную таким образом ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, называют гистограммой. Площадь гистограммы равна сумме всех частот (относительных частот), т.е. объему выборки n (единице).

Интервалы, x	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	…	$[x_{k-1}, x_k)$
Плотность частоты, $\frac{n_i}{h}$	$\frac{n_1}{h}$	$\frac{n_2}{h}$	…	$\frac{n_k}{h}$

Аналогичную таблицу можно образовать, заменяя в нижней строке плотность частоты $\frac{n_i}{h}$ на плотность относительной частоты $\frac{p_i^*}{h}$.

Гистограмма плотности частот состоит из прямоугольников с основаниями (x_{i-1}, x_i), высота которых равна $\frac{n_i}{h}$ рис 5.

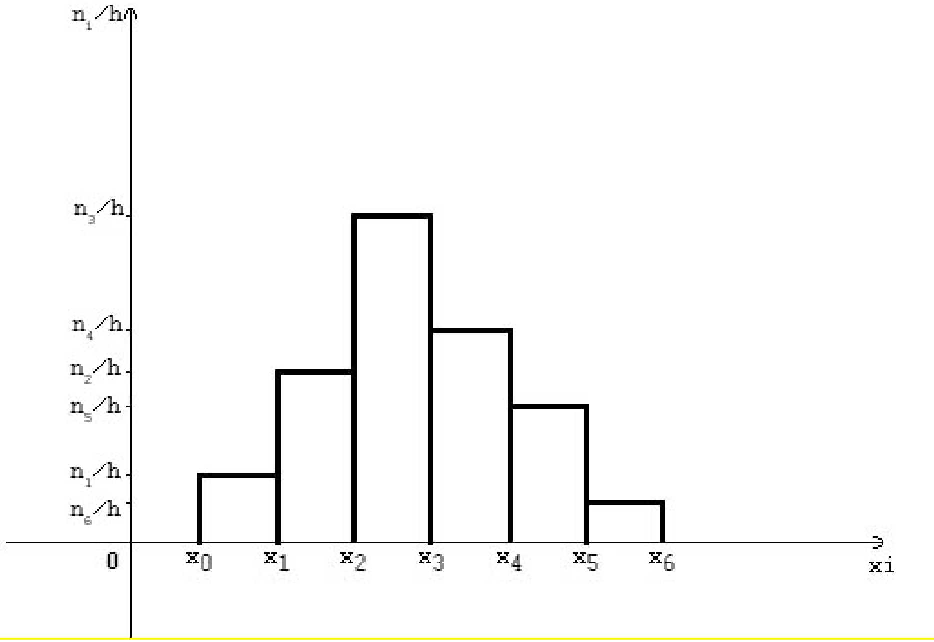


Рис 5. Гистограмма плотности частот

Выборочные характеристики

Характеристики положения

Определение. Выборочной средней называется среднее арифметическое значение вариант статистического ряда. Вычисляется по формуле:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \ .$$

<u>Определение. Модой (Mo)</u> называется наиболее часто встречающая в ряду распределения варианта. Она дает представление о центре распределения вариационного ряда.

В дискретном вариационном ряду мода – варианта, встречающая с наибольшей частотой.

В интервальном ряду мода вычисляется по формуле:

$$Mo = x_0 + h \cdot \frac{n_2 - n_1}{2n_2 - n_1 - n_3} \ ,$$

где x_0 – нижняя граница модального интервала, т.е. интервала с наибольшей частотой встречаемости n_2; n_2 – частота модального интервала; n_1 – частота интервала, предшествующего модальному; n_3 – частота интервала, следующего за модальным; h – ширина модального интервала.

__**Определение. Медианой**__ $\underline{(Me)}$ называется серединная варианта, центральный член ранжированного ряда. Если вариант в ряду четное количество, то медиана равна полусумме двух вариант, находящихся в середине ранжированного ряда.

В интервальном ряду медиана вычисляется по формуле:

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{0{,}5n - n_1}{n_2}$$

где x_0 – нижняя граница медианного интервала, n_2 – частота медианного интервала; n_1 – частота интервала, предшествующего медианному; n – сумма частот ряда, h – ширина медианного интервала.

Показатели рассеяния вариант

Выборочная дисперсия – среднее арифметическое квадратов отклонений вариант от их среднего значения.

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i$$

Существующий недостаток дисперсии, которая является именованной величиной, – несоответствие ее размерности и размерности отдельных единиц числового ряда. Если варианты выражены в метрах, то дисперсия дает квадратные метры; если варианты в килограммах, то дисперсия дает квадрат этой меры, и т.д. Указанного недостатка лишено среднеквадратическое отклонение.

Выборочное среднеквадратическое отклонение представляет собой корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{\sigma_в^2}\,.$$

Коэффициент вариации представляет собой процентное отношение среднеквадратического отклонения к среднему арифметическому:

$$\boxed{CV = \frac{\sigma_в}{\overline{x}_в} \cdot 100\%.}$$

Коэффициент вариации позволяет оценивать вариабельность (разброс) признака в нормированных границах. Если его значение не превышает 10%, то можно говорить о слабом разбросе. Если коэффициент вариации находится в пределах 10-20%, разброс средний, если превышает 20%, то разброс вариант считают большим.

Точечная оценка параметров генеральной совокупности

Определение. Любая выборочная характеристика, используемая в качестве приближенного значения генеральной характеристики и получаемая вычислением одного числа (точки), называется точечной статистической оценкой.

При избрании способа получения точечных оценок учитывается, что они должны обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Определение. Состоятельной оценкой называется точечная оценка, которая при неограниченном увеличении объема выборки приближается (сходится) к истинному значению оцениваемой генеральной характеристики. Выборочную среднюю можно считать состоятельной точечной оценкой генерального среднего.

Определение. Несмещенной оценкой называется точечная оценка, лишенная систематической ошибки.

Выборочная средняя $\overline{x_в}$ – несмещенная оценка генеральной средней.

Выборочная оценка дисперсии – смещенная оценка. Для определения генеральной дисперсии по выборочным данным используют формулу:

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i$$

и получают смещенную точечную оценку генеральной дисперсии.

Для получения несмещенной точечной оценки генеральной дисперсии из выборочных данных используют формулу расчета исправленной дисперсии:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i.$$

При больших объемах выборки смещенная и несмещенная (исправленная) дисперсия отличаются незначительно. На практике пользуются исправленной дисперсией, если число наблюдений не превышает 30 вариант $(n < 30)$, поскольку при большем числе наблюдений влияние становится несущественным.

Определение. Эффективной оценкой называют такую точечную оценку, которая гарантирует наименьшее отклонение выборочной оценки от такой же оценки генеральной совокупности.

В расчетах используются исправленное среднеквадратическое отклонение (стандартное отклонение):

$$S_x = \sqrt{S_x^2}$$

и ошибка выборочной средней (стандартная ошибка среднего или ошибка репрезентативности)

$$m_x = S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Определение. Интервальной оценкой называется числовой интервал, который определяется двумя числами – границами интервала, содержащего неизвестный параметр генеральной совокупности.

Определение. Доверительным интервалом называется интервал, в котором с той или иной заранее заданной вероятностью находится неизвестный параметр генеральной совокупности.

Доверительная вероятность γ – вероятность, что событие вероятности $1-\gamma$ можно считать невозможным, $\alpha = 1-\gamma$ – уровень значимости. В качестве доверительных вероятностей используют вероятности, близкие к 1 (например, 0,95; 0,99; 0,999).

Для малых выборок $(n < 30)$ нормально распределенного количественного признака X доверительный интервал имеет вид:

$$\overline{x_в} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma(f) < \mu < \overline{x_в} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma(f),$$

где $t_\gamma(f)$ – коэффициент Стьюдента, значение которого определяется величиной доверительной вероятности γ и числом степеней свободы $f = n-1$ (Приложение 4).

Для больших выборок $(n > 30)$ нормально распределенного количественного признака X доверительный интервал имеет вид:

$$\overline{x_в} - \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma(f) < \mu < \overline{x_в} + \frac{\sigma_в}{\sqrt{n}} \cdot t_\gamma(f),$$

где $t_\gamma(f)$ – коэффициент Стьюдента, значение которого определяется величиной доверительной вероятности γ и числом степеней свободы $f = n-1$

Пример решения задач:

Задача. Пусть дана последовательность значений некоторого признака: 63, 77, 68, 77, 77, 71, 104, 102, 93, 83, 81, 72, 74, 74, 79, 79, 82, 82, 84, 84, 85, 85, 84, 85, 85, 87, 87, 86, 95, 95, 86, 86, 88, 88, 88, 91,91, 91, 96, 96. Выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1. выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения, выбрав $n = 40$ его значений (согласно своему варианту);
2. составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов;
3. построить гистограмму распределения;
4. найти числовые характеристики выборочной совокупности (моду, медиану, выборочную среднюю, выборочную дисперсию, коэффициент вариации);
5. по результатам обработки выборочных данных выдвинуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, например, по виду гистограммы, и выполнить ее проверку, используя правило «$3 - x\sigma$»;
6. построить кривую нормального распределения по опытным данным, приняв в формуле Гаусса математическое ожидание $a = \bar{x}_в$ и $\sigma = \sigma_в$;
7. найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{X}_г$. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение:

1. Выполним ранжирование выборочных данных:

$63^1, 68^1, 71^1, 72^1, 74^2, 77^3, 79^2, 81^1, 82^2, 83^1, 84^3, 85^4, 86^3, 87^2, 88^3, 91^3, 93^1, 95^2, 96^2, 102^1, 104^1$

Таким образом, имеем: $n = 40, x_{\min} = 63, x_{\max} = 104, R = x_{\max} - x_{\min} = 104 - 63 = 41$.

2. Для построения равноинтервального вариационного ряда:

– найдем по формуле Стерджеса число интервалов (обратите внимание, что число интервалов – целое число) k: $k = 1 + 3{,}32 \lg n = 1 + 3{,}32 \lg 40 \approx 6$;

– вычислим ширину интервала $h = \dfrac{R}{k} = \dfrac{41}{6} \approx 6{,}83$;

– вычисления границ интервалов и пр. выполним в таблице:

Границы интервалов	[63;69,83)	[69,83;76,66)	[76,66;83,49)	[83,49;90,32	90,32;97,15)	[97,15;104]	$\sum$
Число попаданий в интервал, n_i	2	4	9	15	8	2	40
Относительная частота $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$	0,05	0,1	0,225	0,375	0,2	0,05	1 1
Плотность относительной частоты $f_i^* = \dfrac{p_i^*}{h}$	0,007	0,015	0,033	0,055	0,029	0,007	– –
Середина интервала, X_i	66,415	73,245	80,085	86,905	93,735	100,575	– –

3. Гистограмма распределения рис 6.

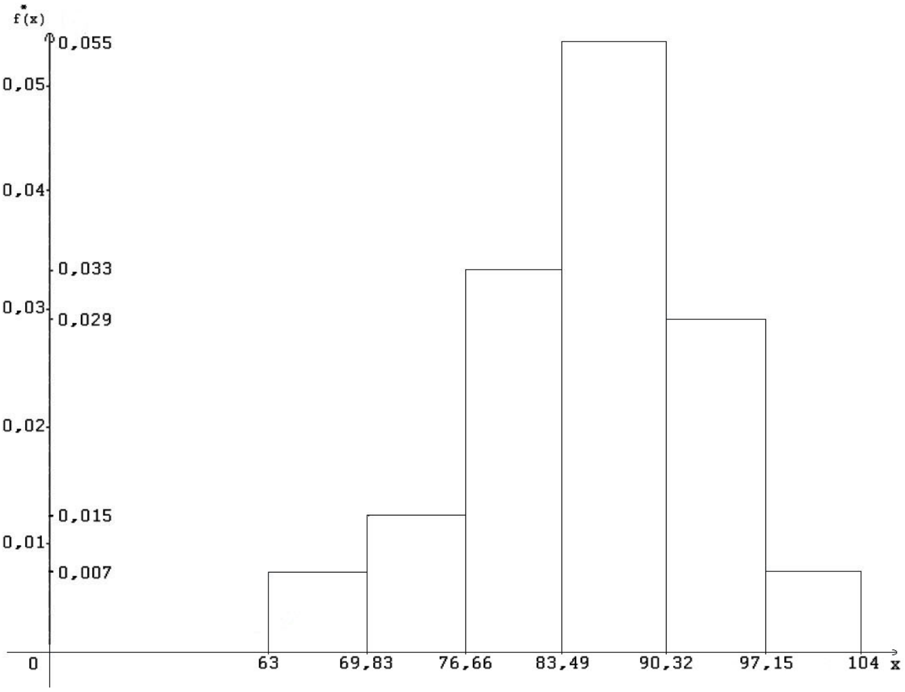


Рис 6. Гистограмма распределения величины Х

4. вычислим основные числовые характеристики выборки:

моду: $Mo = 83{,}49 + 6{,}83 \cdot \dfrac{15-9}{30-9-8} \approx 86$;

медиану: $Me = 84$;

выборочную среднюю:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{40}(66{,}415 \cdot 2 + 73{,}245 \cdot 4 + 80{,}085 \cdot 9 + 86{,}905 \cdot 15 + 93{,}735 \cdot 8 + 100{,}575 \cdot 2) =$$

$$= \frac{3401{,}18}{40} \approx 85{,}03;$$

выборочную дисперсию:

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{40}(66{,}415^2 \cdot 2 + 73{,}245^2 \cdot 4 + 80{,}085^2 \cdot 9 + 86{,}905^2 \cdot 15 + 93{,}735^2 \cdot 8 + 100{,}575^2 \cdot 2) -$$

$$-85{,}03^2 \approx 65{,}188;$$

выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{65{,}188} \approx 8{,}074;$$

коэффициент вариации: $CV = \dfrac{8{,}074}{85{,}03} \cdot 100\% = 9{,}5\%$,

значение коэффициента вариации означает, что разброс значений признака слабый.

5. Вид гистограммы позволяет выдвинуть гипотезу, о том, что данная выборка принадлежит нормально распределенной генеральной совокупности.

   Для проверки выдвинутой гипотезы воспользуемся правилом «трех сигм», согласно которому при нормальном распределении признака все его значения принадлежат интервалу $(\bar{x}_в - 3\sigma_в; \bar{x}_в + 3\sigma_в)$, а значит $x_{\min} > \bar{x}_в - 3\sigma_в, x_{\max} < \bar{x}_в + 3\sigma_в$.

Проверим это:

$\bar{x}_в - 3\sigma_в = 85{,}03 - 3 \cdot 8{,}074 = 60{,}808 < 63$;

$\bar{x}_в + 3\sigma_в = 85{,}03 + 3 \cdot 8{,}074 = 109{,}252 > 104$.

Таким образом, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ принимаем выдвинутую гипотезу, т.е. выборка принадлежит нормально распределенной генеральной совокупности.

6. Для построения кривой нормального распределения по опытным данным примем в формуле Гаусса математическое ожидание $a = \bar{x}_в$ и $\sigma = \sigma_в$.

Кривая распределения представляет собой график функции плотности вероятности.

Плотность вероятности нормального распределения вычисляется по формуле Гаусса:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_в\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x}_в)^2}{2\sigma_в^2}},$$

где x – значение варианты, $\bar{x}_в$ – значение выборочной средней, $\sigma_в^2$ – значение выборочной дисперсии, $\sigma_в$ – выборочное среднеквадратическое отклонение.

Для построения кривой Гаусса достаточно вычислить координаты 7 точек:

$$f_{\max}(x=85{,}03)=\frac{1}{8{,}074\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}05;$$

$$f\ (x=85{,}03\pm 8{,}074)=\frac{1}{8{,}074\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}\approx 0{,}03;$$

$$f\ (x=85{,}03\pm 16{,}148)=\frac{1}{8{,}074\sqrt{2\pi}}e^{-2}\approx 0{,}007;$$

$$f\ (x=85{,}03\pm 24{,}222)=\frac{1}{8{,}074\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{9}{2}}\approx 0{,}001.$$

Построим график кривой Гаусса на фоне гистограммы (рис 7).

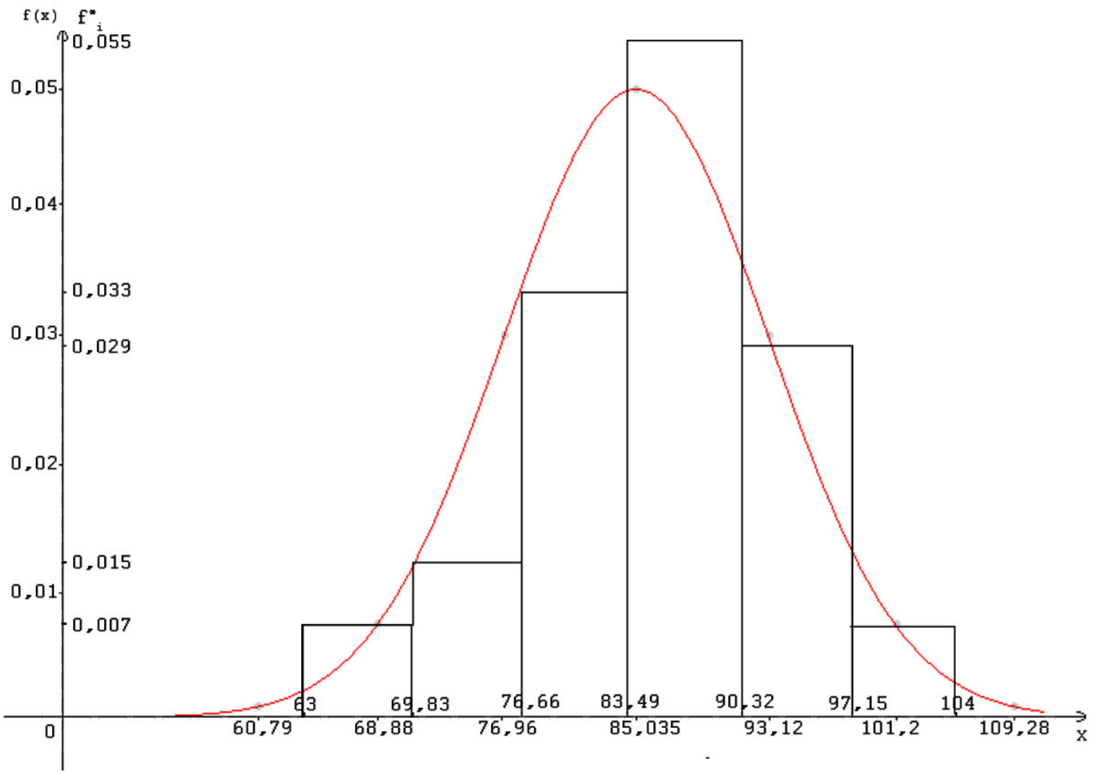


Рис 7. Кривая Гаусса на фоне гистограммы, построенные по исходным данным

7. найдем доверительный интервал для генеральной средней. Для этого вычислим:

$S_в = \sqrt{\frac{40}{39} \cdot 65{,}188} \approx 8{,}177$;

$m_x = \frac{8{,}177}{\sqrt{40}} \approx 1{,}293$;

$\Delta x = 2{,}023 \cdot 1{,}293 \approx 2{,}616$,

здесь $2{,}023 = t_\gamma(f)$ найдено по заданным значениям $n = 40$ и $\gamma = 0{,}95$ (или $p = 0{,}95$) по таблице *Приложения 6.* Таким образом, получаем, что

$\overline{X}_г \in (85{,}03 - 2{,}616; 85{,}03 + 2{,}616)$ или

$\overline{X}_г \in (82{,}414; 87{,}646)$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Т.к. измерения величины X проводились с точностью до целых, то окончательный результат записываем с точностью до 0.1

$\overline{X}_г \in (82{,}4; 87{,}6)$

Задания к практическому занятию:

Из таблицы значений некоторого признака сделайте выборку и выполните статистическую обработку данных по следующей схеме:

1. выполнить ранжирование признака и составить безинтервальный вариационный ряд распределения, выбрав $n = 40$ его значений (согласно своему варианту);
2. составить равноинтервальный вариационный ряд, разбив всю вариацию на k интервалов;
3. построить гистограмму распределения;
4. найти числовые характеристики выборочной совокупности:

– характеристики положения (выборочную среднюю, моду, медиану);

– характеристики рассеяния (выборочную дисперсию, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации, показатели асимметрии и эксцесса)

5. по результатам обработки выборочных данных (на основании выполнения свойств нормального распределения и вида гистограммы) выдвинуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности и проверить ее:

– используя правило «$3 - x\sigma$»;

– с помощью коэффициентов асимметрии As и эксцесса Ex на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

6. построить полигон распределения и кривую нормального распределения по опытным данным, приняв в формуле Гаусса математическое ожидание $a = \bar{x}_в$ и $\sigma = \sigma_в$;
7. найти доверительный интервал для генеральной средней $\overline{X}_г$. Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица значений признака

№	Значения признака, полученные в результате эксперимента									
1–10	84	91	87	83	90	69	100	96	79	94
11–20	93	86	81	83	84	92	93	85	84	88
21–30	63	87	87	81	95	90	69	95	96	84
31–40	82	79	88	90	92	80	81	85	81	83
41–50	84	96	86	94	85	92	79	75	94	66
51–60	88	79	89	75	92	79	78	95	84	91
61–70	91	74	73	73	85	85	76	83	76	86
71–80	71	85	92	84	90	82	90	73	89	87
81–90	72	96	85	95	91	76	94	95	84	96
91–100	77	85	103	96	97	84	78	93	92	89
101–110	83	86	96	89	87	83	79	79	95	90
111–120	77	91	87	88	89	78	86	85	78	79
121–130	82	68	71	87	89	89	81	81	70	79
131–140	88	104	91	97	77	88	86	79	86	72
141–150	77	85	93	85	87	83	76	79	90	91
151–160	84	74	76	75	93	103	80	96	100	95

Список используемой литературы

Список основной литературы

1. Погорелов, А.В. Геометрия. 10 – 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профил. уровни М.: Просвещение, 2018

2. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1235904

3.Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 томах. Том 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1817031

Список дополнительной литературы

1. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2017. (Среднее профессиональное образование).

Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/760157