ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по учебной дисциплине
«Математика»
для обучающихся по специальности
31.02.01 «Лечебное дело»

Ставрополь,2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 31.02.01 Лечебное дело и программой дисциплины «Математика».

Составитель: Ерёмина Е.Р.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26» мая 2022 г.

Введение

В методических указаниях представлен краткий теоретический и практический материал для проведения практических занятий по дисциплине «Математика» с обучающимися по специальности 31.02.01 Лечебное дело.

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Математика» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины ориентирована на достижение следующих целей:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь обучающимся осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

В результате изучения дисциплины предполагается формирование следующих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их выполнение и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 12. Организовывать рабочее место с соблюдением требований охраны труда, производственной санитарии, инфекционной и противопожарной безопасности.

ПК 1.2. Проводить диагностические исследования.

ПК 1.3. Проводить диагностику острых и хронических заболеваний.

ПК 1.4. Проводить диагностику беременности.

ПК 1.5. Проводить диагностику комплексного состояния здоровья ребенка.

ПК 1.7. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 2.1. Определять программу лечения пациентов различных возрастных групп.

ПК 2.2. Определять тактику ведения пациента.

ПК 2.3. Выполнять лечебные вмешательства.

ПК 2.4. Проводить контроль эффективности лечения.

ПК 2.5. Осуществлять контроль состояния пациента.

ПК 2.8. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 3.1. Проводить диагностику неотложных состояний.

ПК 3.2. Определять тактику ведения пациента.

ПК 3.3. Выполнять лечебные вмешательства по оказанию медицинской помощи на догоспитальном этапе.

ПК 3.4. Проводить контроль эффективности проводимых мероприятий.

ПК 3.5. Осуществлять контроль состояния пациента.

ПК 3.7. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 4.1. Организовывать диспансеризацию населения и участвовать в ее проведении.

ПК 4.2. Проводить санитарно-противоэпидемические мероприятия на закрепленном участке.

ПК 4.3. Проводить санитарно-гигиеническое просвещение населения.

ПК 4.4. Проводить диагностику групп здоровья.

ПК 4.5. Проводить иммунопрофилактику.

ПК 4.6. Проводить мероприятия по сохранению и укреплению здоровья различных возрастных групп населения.

ПК 4.9. Оформлять медицинскую документацию.

ПК 6.1. Рационально организовывать деятельность персонала с соблюдением психологических и этических аспектов работы в команде.

ПК 6.2. Планировать свою деятельность на фельдшерско-акушерском пункте, в здравпункте промышленных предприятий, детских дошкольных учреждениях, центрах общей врачебной (семейной) практики и анализировать ее эффективность.

ПК 6.3. Вести медицинскую документацию.

ПК 6.4. Организовывать и контролировать выполнение требований противопожарной безопасности, техники безопасности и охраны труда на ФАПе, в здравпункте промышленных предприятий, детских дошкольных учреждениях, центрах, офисе общей врачебной (семейной) практики.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР13. Демонстрирующий готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения в профессиональной деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1

Предел числовой последовательности

Теоретическая часть

Определение 1. Число *a* называется *пределом* последовательности *(x_n)*, если в любом открытом промежутке, содержащем число *a*, содержатся все члены последовательности *(x_n)*, начиная с некоторого.

Теорема 1 (о единственности предела). Если *a* - предел последовательности *(x_n)* и *b* - предел последовательности *(x_n)*, то *a=b*.

Определение 2. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Определение 3. Последовательность называется *строго возрастающей* (*возрастающей)*, если каждый ее член, начиная со второго, больше (не меньше) предыдущего члена.

Определение 4. Последовательность называется *строго убывающей (убывающей*), если каждый ее член, начиная со второго, меньше (не больше) предыдущего члена.

Последовательности (строго) возрастающая и (строго) убывающая называются (*строго*) *монотонными*.

Определение 5. Последовательность *(x_n)* называется *ограниченной*, если существует такое число *M*, что для любого n,принадлежащего множеству натуральных чисел, выполняется условие

$$\forall n \in N |x_n| \le M .$$

Теорема 2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Определение 7. Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если

$$\forall E > 0 \; \exists N : \quad |x_n| > E, \; if \; n > N;$$

Последовательность (x_n) при этом называется *бесконечно большой*.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \; \exists N : x_n > E, \; if \; n > N;$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \; \exists N : x_n < -E, \; if \; n > N.$

Определение 8. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Задания к практическому занятию

1) Выясните, являются ли последовательности монотонными

1. $a_n = n^2 + 1.$

2. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} - 1, a_1 = 1, a_2 = 2.$

2) Выясните, являются ли последовательности ограниченными

1. $a_n = n + 1.$

2. $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n + 2} + 1, a_1 = 1.$

3) Последовательность (a_n) ограничена, а последовательность (b_n) неограничена. Выясните, какие из следующих последовательностей обязательно неограниченные, а какие могут быть неограниченными:

1. $x + n = a_n + b_n.$

2. $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}.$

3. $x_n = \sqrt[3]{a_n} + \sqrt[5]{b_n}.$

4) Докажите, что следующие последовательности стремятся к нулю:

1. $a_n = \dfrac{1}{n-1}.$

2. $a_n = \dfrac{1}{n+3}.$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие числовой последовательности.
2. Дать определение предела числовой последовательности, записать в математическом виде.
3. Понятие монотонной последовательности.
4. Дать понятия ограниченной и неограниченной последовательностей.
5. Сформулировать основные теоремы о пределах последовательности.

Практическое занятие № 2

Предел и непрерывность функций

Теоретическая часть

Величина x, принимающая в условиях данного процесса различные числовые значения, называется *переменной величиной*. Обозначаются переменные величины строчными буквами латинского или греческого алфавита x, y, z, u, v …

Постоянная величина – частный случай переменной величины, все значения которой равны между собой. Обозначаются постоянные величины буквами a, b, c, d …

Например, в процессе математического моделирования действий правовых норм такие характеристики этого процесса, как время действия той или иной нормы права и скорость (быстрота) ее применения к конкретным общественным отношениям, являются переменными величинами, а количество рассматриваемых в данный момент норм – величина постоянная.

Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому из тех значений, которые может принимать x, соответствует единственное вполне определенное значение y. При этом переменная величина x называется *аргументом*. Говорят также: величина y *зависит* от величины x, поэтому аргумент называют *независимой* переменной, а функцию – *зависимой*. Обозначается функция: $y = f(x), y = \varphi(x), F(x, y) = 0$ и т.д.

Если функция задана выражением $F(x, y) = 0$, то она называется неявной функцией от x, т.е. функция задана неявно, если уравнение $F(x, y) = 0$ неразрешимо относительно y. Например, $x^2 y^3 - \cos x + e^y = 0$.

Совокупность всех значений, которые может принимать аргумент x функции y, называется *областью определения* этой функции. Совокупность значений, которые принимает функция, называют *областью значений* функции. Например, область определения функции $y = x^2$ есть множество $X = (-\infty, +\infty)$, а область ее значений - $Y = [0, +\infty)$.

Свойства функции:

- четность, нечетность или функция общего вида;
- монотонность;
- ограниченность;
- периодичность.

Способы задания функции:

- аналитический;
- графический;
- табличный;
- описательный;
- алгоритмический.

Предел функции

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, исключая, может быть саму эту точку, и как бы ни было мало число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$ следует выполнимость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В практике вычисления пределов важную роль играют так называемые 1-й и 2-й замечательные пределы: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (здесь x – радианная мера угла) и $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, где $e = 2{,}71828\ldots$.

Основные теоремы о пределах:

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ функции, у которых существуют пределы при $x \to x_0\ (x \to \infty)$: $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A;\ \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$.

1. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[f(x) + \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = A + B$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) = A \cdot B$.

3. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x)} = \dfrac{A}{B}\ \left(\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \neq 0 \right)$.

4. $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} \left[c \cdot f(x) \right] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = c \cdot A,$ где c - некоторое число.

1) Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x+4}{x^2+3}$.

Используя теоремы о пределах, находим

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x+4}{x^2+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3}(2x+4)}{\lim\limits_{x \to 3}(x^2+3)} = \frac{2\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 4}{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 3} = \frac{2 \cdot 3 + 4}{(\lim\limits_{x \to 3} x)^2 + 3} = \frac{10}{3^2+3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

2) Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+4}{x^2-1}$.

Если предел знаменателя равен нулю, а предел числителя не равен нулю, то предел дроби равен бесконечности: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+4}{x^2-1} = \left(\dfrac{1+4}{1-1} \right) = \infty$.

3) Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-x-2}$.

Находим $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-x-2} = \dfrac{12-4-8}{4-2-4} = \left(\dfrac{0}{0} \right)$. Предел не вычислен, а получена неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Выполним тождественные преобразования:

$$3x^2-2x-8 = 3(x+4/3)(x-2);\ x^2-x-2 = (x+1)(x-2).$$

Тогда $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3(x+4/3)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x+4}{x+1} = \dfrac{10}{3}$.

4) Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3-3x+5}{5x^3-10}$.

Находим $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3-3x+5}{5x^3-10} = \left(\dfrac{\infty}{\infty} \right)$. Получена неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия такой неопределенности необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени, в данном случае – на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+5}{5x^3-10}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{5-\frac{10}{x^3}}=\frac{2-0+0}{5-0}=\frac{2}{5}.$$

Задания к практической подготовке

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\frac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\frac{2\tilde{o}^2-7x-4}{2\tilde{o}^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-2}\frac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\left(\frac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{1-\cos\tilde{o}}{\tilde{o}\sin x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{1-\cos\tilde{o}}{1-\cos3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется переменной и постоянной величиной?
2. Привести определение функции.
3. Что называется областью определения функции?
4. Свойства функции и способы задания функции.
5. Привести определение предела функции.
6. Основные теоремы о пределах.

Практическое занятие № 3

Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенности

Теоретическая часть

Некоторые замечательные пределы:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}}$$

<u>Первый замечательный предел.</u> $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

<u>Второй замечательный предел</u>**.** $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.}$$

<u>Пример.</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgmx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x_0}=\dfrac{1}{\cos^2 x_0}$

3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{1}{2}$

5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 8x + 12 = 0;$

$D = 36 - 32 = 4;$ $\quad$ $D = 64 - 48 = 16;$

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$ $\quad$ $x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$

$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$ $\quad$ $x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})} =$$

$$= \frac{2}{-1\cdot(1+1)} = -1\,.$$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \left\{x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)\right\} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{3-2}{3+3} = \dfrac{1}{6}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$, т.к.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x^2 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{1-1}
\quad -5x^2 + 11x & \\
\quad -5x^2 + 5x & \\ \cline{1-1}
\qquad 6x - 6 & \\
\qquad 6x - 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

10. Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{2a+2h}{2}\cos\dfrac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы -∞ и +∞.

Задания к практической подготовке

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tg 3x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_4\left(\dfrac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\cos 3\tilde{o}-1}{\tilde{o}tg 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}{\tilde{o}\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

4. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\dfrac{4+5\tilde{o}^2-3x^5}{8-6\tilde{o}-\tilde{o}^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\cos\tilde{o}-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

5. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{\tilde{o}-2\tilde{o}^3-5x^4}{2+3\tilde{o}^2+\tilde{o}^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\tilde{o}^2+4x-21}{2\tilde{o}^2-7x+3}$;
г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\tilde{o}tg3x}{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

6. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{3\tilde{o}+14\tilde{o}^2}{1+2\tilde{o}+7\tilde{o}^2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\frac{\tilde{o}-\tilde{o}^2}{1-2\tilde{o}^2}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\frac{\tilde{o}^2-25}{\tilde{o}^2+8x+15}$;
г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\tilde{o}\sin 2x}{tg^2 3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$;
ж) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение предела функции точке.
2. Дайте определение предела функции на бесконечности.
3. Что такое односторонние пределы функции?
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
5. Что такое первый, второй и третий замечательные пределы?
6. Дайте определение бесконечно малой функции.
7. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых функций.
8. Сформулируйте принцип эквивалентности бесконечно малых функций.
9. В чем заключается связь бесконечно больших и бесконечно малых функций?

Практическое занятие № 4

Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

Теоретическая часть

<u>Определение.</u> Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x)$

<u>Определение.</u> Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел $\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

Если односторонний предел $\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

Задания к практической подготовке

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2,} x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, x>1.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}-\dfrac{2|x|}{x}, x<0\\ \sqrt{4-x^2}, 0\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{9-x^2}, 0\le x\le 3,\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, x>2.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases} -\frac{1}{x+3,}x<-3, \\ -\sqrt{9-x^2},-3\le x\le 3, \\ \frac{|x-3|}{x-3},x>3. \end{cases}$

8. $y=\begin{cases} -\frac{1}{x+1},x<-1, \\ \sqrt{1-x^2},-1\le x\le 0, \\ \frac{|x|}{x},x>0. \end{cases}$

9. $y=\begin{cases} -\frac{1}{x+2,}x<-2, \\ \sqrt{4-x^2},-2\le x\le 2, \\ \frac{2|x|}{x},x>2. \end{cases}$

10. $y=\begin{cases} -\frac{1}{x+3},x<-3, \\ \sqrt{9-x^2},-3\le x\le 0, \\ \frac{3|x|}{x},x>0. \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Приведите примеры функций непрерывных в точке.
3. Дайте определение непрерывности функции на интервале.
4. Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.
5. Приведите примеры точек разрыва первого и второго рода.
6. Сформулируйте основные свойства непрерывных функций.
7. Приведите примеры непрерывности элементарных функций.

Практическое занятие № 5

Правила дифференцирования. Таблица производных

Теоретическая часть

Определение. *Производной* функции $y=f(x)$ в точке x по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении последнего к нулю, т.е.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Основные правила дифференцирования

$(c)' = 0$, *здесь* $c - const$; $\quad (u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$;

$(cu)' = c \cdot u'$; $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; $\quad \begin{cases} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{cases} \quad y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x).$

Таблица основных производных

$$(x^n)' = nx^{n-1};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a;$$
$$(e^x)' = e^x;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$
$$(\sin x)' = \cos x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x;$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(ctg)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

1) Найти y' если $y = 5x^3 - 2x + 8$.

Решение. $y' = (5x^3)' - (2x)' + (8)' = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 + 0 = 15x^2 - 2$.

2) Найти y' если $y = \dfrac{15x^2 - 4}{1 - x}$.

Решение.

$$y' = \frac{(15x^2 - 4)'(1-x) - (1-x)'(15x^2 - 4)}{(1-x)^2} = \frac{(15 \cdot 2x - 0)(1-x) - (0-1)(15x^2 - 4)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{30x - 30x^2 + 15x^2 - 4}{(1-x)^2} = \frac{30x - 15x^2 - 4}{(1-x)^2}.$$

3) Найти y' если $y = \sin x \cdot (4^x + 2x)$.

Решение. $y' = (\sin x)'(4^x + 2x) + \sin x (4^x + 2x)' = \cos x (4^x + 2x) + \sin x (4^x \ln 4 + 2)$.

Прежде чем приступать к решению следующего примера дадим физическую интерпретацию производной. Если вдоль некоторой прямой движется материальная точка по закону $s = s(t)$, где s - пройденный путь, t - время, то средняя скорость движения точки за промежуток времени длительностью Δt известна $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Тогда мгновенная скорость движения материальной точки - это предел средней скорости при $\Delta t \to 0$: $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. С точки зрения математики мгновенная скорость представляет собой производную от пути по времени.

Производная от скорости называется *ускорением*, она характеризует «скорость изменения скорости».

4) Точка движется по закону $s(t) = 3t^4 - 4t^3$. Найти скорость и ускорение точки через *2 с* после начала движения.

Решение: $s'(t) = v(t)$, $s''(t) = v'(t) = a$, $t = 2$.

Тогда $v(t)= (3t^4-4t^3)'=3\cdot 4t^3-4\cdot 3t^2=12t^3-12t^2$, $v(2)=12\cdot 2^3-12\cdot 2^2 = 48$,

$a(t)= (12t^3-12t^2)'=12\cdot 3t^2-12\cdot 2t=36t^2-24t$, $a(2)=36\cdot 2^2-24\cdot 2=96$.

Задания к практической подготовке

1. Найти производные заданных функций

a) $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$,

b) $y = e^x tgx$,

c) $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$,

d) $y = tg\frac{x+1}{2}$,

e) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$,

f) $y = \ln(1 - 2x)$

2. Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 8t - 5t^2$. Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей.

3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 60t - 5t^3$. Через какое время после начала движения точка остановится? Найти путь, пройденный точкой до остановки.

4. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента $t = 0$, дается формулой $Q = 2t^3+3t+1$(кул). Найти силу тока в конце 5-ой секунды.

Вопросы к практическому занятию

1. Привести определение производной.
2. Что называется операцией дифференцирования.
3. Основные правила дифференцирования.
4. Таблица основных производных.
5. Привести физическую интерпретацию производной.

Практическое занятие № 6

Вычисление производных сложных функций

Теоретическая часть

Теорема. Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Пример:

1. $y = \sin\left(x^2 + 3\right)$

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$y' = (\sin u)_u' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x$.

2. $y=\left(x^2+e^x\right)^{10}$

Решение:

Используем формулу $\left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.

$y=u^{10}$, где $u=x^2+e^x$;

$y'=10u^9\cdot\left(x^2+e^x\right)'=10\left(x^2+e^x\right)^9\cdot\left(2x+e^x\right)$.

3. $y=x^2\cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$y'=\left(x^2\right)'e^{\sin x}+x^2\left(e^{\sin x}\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\left(\sin x\right)'=2xe^{\sin x}+x^2e^{\sin x}\cos x.$

Задание к практической подготовке

$y=e^{-x}$

$y=\sqrt{e^x}$

$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$y=16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$

$y=e^{(3x+5)^2}$

$y=a^{3x}$

$y=a^xe^x$

$y=\lg(2x)$

$y=\ln 3x$

$y=\log_3(4x-2)$

$y=\ln(x^3)$

$y=(\ln x)^3$

$y=5(2x^2-3x+4)^8$

$y=4\sqrt{1+3x^3-2x^5}$

$y=\sqrt[3]{(2-x)(5-2x)}$

$y=\sqrt[3]{x^3-2}$

$y=\sqrt{\dfrac{4}{2x^2+5}}$

$y=3\sin(3x-1)$

$y = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg3x}$

$y = \ln \sin x$

$y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

Вопросы к практическому занятию

1. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Производная как скорость изменения функции.
3. Определите геометрический и физический смысл производной.
4. Как с помощью производной описать уравнение касательной и нормали к кривой.
5. Назовите необходимое условие существования производной.

Практическое занятие № 7

Производные и дифференциалы высших порядков

Теоретическая часть

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′ или $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u\cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$

$\ldots + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n-го порядка.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Определение. **Дифференциалом** функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. y - сложная функция.

Тогда $$\boxed{dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.}$$

Пример.

1. Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

2. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

3. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

4. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$
$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

5. Найти производную функции $y = x^2e^{x^2}\ln x$

$$y' = \left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x + x^2e^{x^2}\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$
$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x)$$

Задание к практической подготовке

Найти производные от указанных функций:

1. а) $y = x^5 + \ln\left(x^2 + 8x - 1\right)$; б) $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}x+3}$

2. а) $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$; б) $y = \frac{\mathrm{tg}x}{\sin x - \cos x}$

3. а) $y = \ln(1 + \sqrt{x^2-1})$; б) $y = \frac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$

4. а) $y = x^2 + \arcsin\sqrt{1-x^2}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

5. а) $y=(2x+e^{-x^2})^2$; б) $y=\ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$

6. а) $y=\mathrm{tg}^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\frac{x+1}{x^2-\ln x}$

7. а) $y=(e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$; б) $y=\mathrm{ctg}\frac{\ln x+1}{2-\ln x}$

8. а) $y=x^2\cdot 10^{-x+2}$; б) $y=\frac{e^x+1}{\cos x}$

9. а) $y=\sin^2 2x\cdot\cos\frac{x}{2}$; б) $y=\ln\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

10. а) $y=\mathrm{arctg}x^2-\ln\sin x$; б) $y=\frac{10^x+10^{-x}}{2x}$

11. а) $y=x^4+e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y=\frac{\cos x+2x}{\sqrt{x}}$

12. а) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x$; б) $y=\mathrm{tg}\frac{e^x}{\sqrt{x^4-1}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Какую информацию о функции мы можем получить, проанализировав вторую производную функции.
2. Дайте определение Дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости в точке.
3. Что такое Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.
4. Дифференциалы высших порядков.

Практическое занятие № 8

Правило Лопиталя

Теоретическая часть

Правило Лопиталя помогает в раскрытии неопределённостей вида 0/0 или ∞/∞ и некоторых других неопределённостей, возникающих при вычислении предела отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций. Вычисление значительно упрощается с помощью этого правила (на самом деле двух правил и замечаний к ним): $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Как показывает формула выше, при вычислении предела отношений двух бесконечно малых или бесконечно больших функций предел отношения двух функций можно заменить пределом отношения их *производных* и, таким образом, получить определённый результат.

Правило Лопиталя для случая предела двух бесконечно малых (больших) величин. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные (то есть дифференцируемы) в некоторой окрестности точки a. А в самой точке a они могут и не иметь производных. При этом в окрестности точки a производная функции $g(x)$ не равна нулю ($g'(x)\neq 0$) и пределы этих функций при стремлении икса к значению функции в точке a равны между собой и равны нулю: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Тогда предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечания.

1. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x = a$.
2. Если при вычисления предела отношения производных функций $f(x)$ и $g(x)$ снова приходим к неопределённости вида 0/0 или ∞/∞, то правила Лопиталя следует применять многократно (минимум дважды).
3. Правила Лопиталя применимы и тогда, когда аргумент функций (икс) стремится не к конечному числу a, а к бесконечности ($x\to\infty$).

К неопределённостям видов 0/0 и ∞/∞ могут быть сведены и неопределённости других видов.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\ln(x^2-3)}$.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения x=2 приводит к неопределённости вида 0/0. Поэтому производную каждой функции и получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\ln\left(x^2-3\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3x+2\right)'}{\left[\ln\left(x^2-3\right)\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{2x/\left(x^2-3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-3)\left(x^2-3\right)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения x=0 приводит к неопределённости вида 0/0. Поэтому вычисляем производные функций в числителе и знаменателе и получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\sin 2x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x}$.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения x=0 приводит к неопределённости вида 0/0. Поэтому вычисляем производные функций в числителе и знаменателе и получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(\sin 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3\cos 3x}=\frac{1}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Подстановка в заданную функцию значения икса, равного плюс бесконечности, приводит к неопределённости вида ∞/∞. Поэтому применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\bullet 1}=0$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды, поскольку и предел отношения функций, и предел отношения производных дают неопределённость вида ∞/∞.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+12x^2}{7x^3+x^2}$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+12x^2}{7x^3+x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2+24x}{21x^2+2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{18x+24}{42x+2}=12.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1\bullet\sin^2 x}{x\bullet(-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\bullet\cos x}{-1}=0.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}$.

Решение. Находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{2}=+\infty.$$

Пример 9. Вычислить $\lim_{x\to 0}(x^2\ln x).$.

Решение. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)=\left(0\bullet\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0.$$

(здесь неопределённость вида 0·∞ мы преобразовали к виду ∞/∞, так как $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to 0}(1/x^2)=\infty,$ а затем применили правила Лопиталя).

Пример 10. Вычислить $\lim_{x\to\pi}\left(\pi-x\right)\bullet\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Получаем

$$\lim_{x\to\pi}\left(\pi-x\right)\bullet\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\left(0\bullet\infty\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\bullet\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\pi}2\sin^2\frac{x}{2}=2.$$

Неопределённости вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ обычно приводятся к виду 0/0 или ∞/∞ с помощью логарифмирования функции вида $\left[f(x)\right]^{g(x)}$.

Чтобы вычислить предел выражения $\left[f(x)\right]^{g(x)}$, следует использовать логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$, частным случаем которого является $a^{\ln b}=b$ и свойство логарифма $\log_a b^k=k\bullet\log_a b$.

Используя логарифмическое тождество и свойство непрерывности функции (для перехода за знак предела), предел следует вычислять следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln f(x)^{g(x)}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0}\left(g(x) \cdot \ln f(x)\right)}.$$

Отдельно следует находить предел выражения в показателе степени и возводить e в найденную степень.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Получаем

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Вычисляем предел выражения в показателе степени

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

Итак, $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1} = e$.

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$.

Решение. Получаем

$$\lim_{x \to 0} x^{\sin x} = \left(0^{0}\right) = \lim_{x \to 0} e^{\ln x^{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} e^{\sin x \cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\sin x \cdot \ln x}.$$

Вычисляем предел выражения в показателе степени

$$\lim_{x \to 0}\sin x \bullet \ln x = \left(0 \bullet \infty\right) = \lim_{x \to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0}\frac{\sin^2 x}{x \bullet \cos x} =$$

$$= -\lim_{x \to 0}\frac{\sin^2 x}{x} \bullet \lim_{x \to 0}\frac{1}{\cos x} = -\lim_{x \to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= -\lim_{x \to 0}\frac{2\sin x \bullet \cos x}{1} = 0.$$

Итак, $\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

Пример 13. Вычислить $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Получаем

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = (\infty^0) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}}.$$

Вычисляем предел выражения в показателе степени

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\bullet\frac{1}{x}}{1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\bullet\ln x} = 0.$$

Итак, $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

Раскрытие неопределённостей вида "бесконечность минус бесконечность" : $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = (\infty - \infty)$.

Вычисление такого предела по правилу Лопиталя в общем виде выглядит следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = (\infty - \infty) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\bullet\frac{1}{g(x)}} \right) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\bullet\frac{1}{g(x)}\right)'}.$$

Пример 14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2}\right)$.

Решение. Пользуясь вышеперечисленными рекомендациями, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos 3x}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример 15. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.

Решение. Пользуясь вышеперечисленными рекомендациями, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4x}\right)\bullet\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2-4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4x}}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Задание к практической подготовке

Вычислить следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(\pi x/2)}{\ln(1-x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{\sin x}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте правило Лопиталя.
2. Как раскрываются неопределенности $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, 0^0, 1^∞, ∞^0?

Практическое занятие № 9

Общее исследование функций (часть 1)

Теоретическая часть

Направление вогнутости кривой. Перегиб.

Определение 1. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым на (a,b), если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение 2. График дифференцируемой функции называется вогнутым на (a,b), если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

График в одних интервалах может быть вогнутым, а в других выпуклым. Рассмотрим достаточный признак, позволяющий установить, является ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости или вогнутости).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала (a,b). Если во всех точках этого $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале – выпуклый, если же $f''(x) > 0$ - вогнутый.

Определение 3. Точка $(x_0;\ f(x_0))$ графика функции, отделяющая его выпуклую часть от выгнутой или наоборот, называется точкой перегиба.

Теорема 2 (необходимое условие наличия точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале (a,b) непрерывную $f''(x)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a,b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

Определение 4. Точка в которой $f''(x_0) = 0$ или не существует называется подозрительной на перегибе.

Теорема 3 (достаточное условие существования перегиба).

Если вторая производная непрерывной функции меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой x_0 - является точкой перегиба функции.

Правило исследования на перегиб.

1) Найти $D(y)$.
2) Найти y''.
3) Найти точку, подозрительную на перегиб $(y'' = 0)$.
4) Этими точками разобьем $D(y)$ на интервалы, на каждом из которых $f''(x)$ существует и сохраняет постоянный знак.
5) Определить наличие точки перегиба согласно достаточному условию.

   Точки при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак – точки перегиба, если же $f''(x)$ знак не меняет, то перегиба нет.

Пример. Найти точки перегиба кривой

1. $y = e^{-x^2}$.

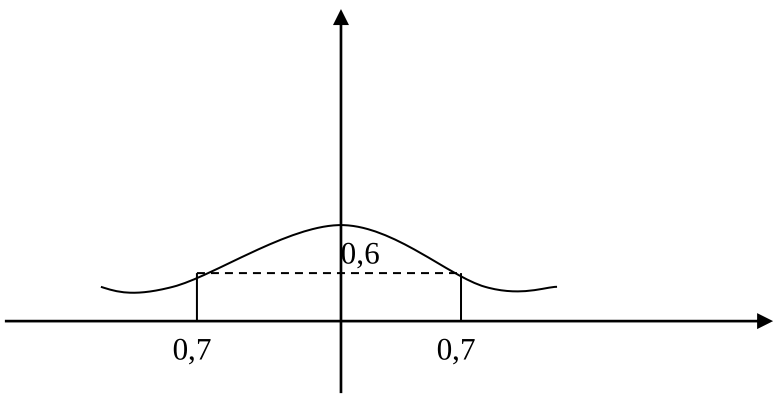
Решение:

1) $D(y) = R$

2) $y' = -2xe^{-x^2}$; $\quad y'' = -2\left(e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x)\right) = e^{-x^2}\left(-2 + 4x^2\right)$

3) $y'' = 0$; $\quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$

x	$-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}};\quad \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}};\quad +\infty$
y''	+	0	-	0	+
y		т. пер. $\approx 0{,}6$		т. пер. $= 0{,}6$	



Задачи к практическому занятию

Найти точки перегиба кривой

1. $y = (x-5)^{5/3} + 2$.
2. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется экстремумом функции?

2. Как подразделяются экстремумы?
3. Условия выпуклости и вогнутости функций.
4. Что называется точкой перегиба функции?

Практическое занятие № 10

Общее исследование функций (часть 2)

Теоретическая часть

Асимптоты

При исследовании функции важно установить форму ее графика от начала координат.

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что при неограниченном удалении по графику функции расстояние между кривой и прямой $\to 0$.

Асимптоты могут быть:

- вертикальные, для нахождения которых нужно найти точки (те значения $x = x_0$), при которых функция обращается в бесконечность, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, тогда уравнение $x = x_0$ является уравнением вертикальной асимптоты.

- наклонные. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту не параллельную оси $0y$, т.е. невертикальную (наклонную). Тогда уравнение этой прямой имеет вид $y = kx + b$, где

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0 \quad \Rightarrow \; k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует при $x \to \infty$ то график функции $y = f(x)$ асимптот не имеет.

В частном случае коэффициент k может быть равен нулю, тогда асимптота параллельна оси $0x$ и называется горизонтальной.

Аналогично находят асимптоты при $x \to -\infty$. Причем пределы могут быть различными при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

Общее исследование функции

Полное исследование функций выполняется по следующей схеме:

1) Найти область определения функции $D(y)$.
2) Исследовать на непрерывность определенный вид точки разрыва, если они есть.
3) Определить четность, нечетность, периодичность.
4) Найти точки пересечения с осями координат.
5) Найти асимптоты графика функции. Если асимптот нет, то полезно изучить поведение функции в граничных точках области существования, т.е. найти пределы при приближении к этим точкам.
6) Определить интервалы возрастания и убывания, точки экстремума графика функции.
7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
8) Найти дополнительные точки.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y″ < 0, кривая выпуклая

-$\sqrt{3}$ < x < -1, y″ < 0, кривая выпуклая

-1 < x < 0, y″ > 0, кривая вогнутая

0 < x < 1, y″ < 0, кривая выпуклая

1 < x < $\sqrt{3}$, y″ > 0, кривая вогнутая

$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

-∞ < x < -$\sqrt{3}$, y′ > 0, функция возрастает

-$\sqrt{3}$ < x < -1, y′ < 0, функция убывает

-1 < x < 0, y′ < 0, функция убывает

0 < x < 1, y′ < 0, функция убывает

1 < x < $\sqrt{3}$, y′ < 0, функция убывает

$\sqrt{3}$ < x < ∞, y″ > 0, функция возрастает

Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно -3$\sqrt{3}$/2 и 3$\sqrt{3}$/2.

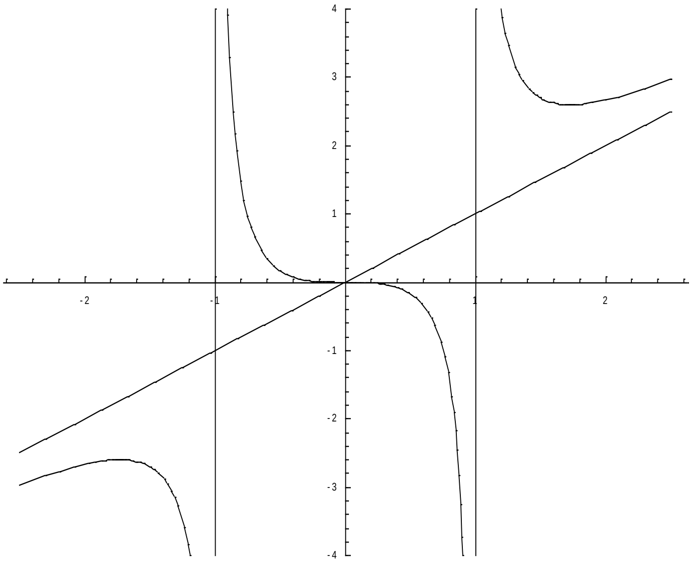
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Построим *график* функции:



Задания к практической подготовке

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y = \frac{x^3+16}{x}$ 3. $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 7. $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$ 8. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ 10. $y=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ 12. $y=\dfrac{x^2+16}{2x}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать определение асимптоты.
2. Как классифицируются асимптоты?
3. Полная схема исследования функций.

Практическое занятие № 11

Метод непосредственного интегрирования

Теоретическая часть

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если для всех *x* из области определения функции $f(x)$ $F'(x)=f(x)$.

Основная задача интегрального исчисления заключается в нахождении первообразной заданной функции.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается следующим образом: $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция, $\int$ – знак интеграла, x - переменная интегрирования. Операция нахождения первообразной называется *интегрированием* функции.

Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Таблица основных интегралов

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C;$

$\int e^x dx = e^x + C;$

$\int cos\,xdx = sin\,x + C;$

$\int sin\,xdx = -cos\,x + C;$

$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C;$

$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C.$

Интегрирование – действие, обратное дифференцированию, поэтому результат интегрирования можно проверить дифференцированием.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int (x)dx\right)' = f(x)$.

2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Методы интегрирования

Выделяют три основных метода интегрирования:

1. Метод непосредственного интегрирования: подынтегральная функция с помощью тождественных преобразований приводится к такому виду, чтобы, воспользовавшись свойствами неопределенного интеграла, исходный интеграл можно было свести к алгебраической сумме табличных интегралов.

2. Метод подстановки (замены переменной): $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

3. Метод интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU$, где $U(x), V(x)$ непрерывно дифференцируемые функции.

Пример:

1. $\int (x^2 + 7x - 5)dx.$

Решение. Метод непосредственного интегрирования:

$$\int (x^2 + 7x - 5)dx = \int x^2 dx + \int 7xdx - \int 5dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-5x+C\right)'=\frac{3x^2}{3}+\frac{14x}{2}-5=x^2+7x-5.$

2. $\int (5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1})dx$

3. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

Решение: $\int \frac{dx}{4x^2+9}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\,arctg\,\frac{2x}{3}+C=\frac{1}{6}\,arctg\,\frac{2x}{3}+C$

4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx$

Решение: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{(x^4)^2+5}}=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8+5}\right|+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}=\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}=\ln\left|\arcsin x\right|+C$

Задания к практической подготовке

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$;

5. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^5}$; 6. $\int \sqrt{1-5x}dx$;

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$;

9. $\int \sqrt{1-2x}dx$; 10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Что называют первообразной функции.
2. Что называют неопределенным интегралом.
3. Привести свойства неопределенного интеграла.

4. Таблица основных интегралов.
5. Записать формулу Ньютона-Лейбница.
6. В чем заключается метод непосредственного интегрирования.

Практическое занятие № 12

Метод замены переменной

Теоретическая часть

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

где $x = \varphi(t)$ - функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

1. Найдем производные по переменной t от левой и правой частей формулы:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x x'_t = f(x)\varphi'(t)$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

2. Т.к. $x = \varphi(t)$, то эти производные равны, поэтому по следствию из теоремы Лагранжа левая и правая части отличаются на некоторою постоянную. Поскольку сами неопределенные интегралы определены с точностью до неопределенного постоянного слагаемого, то указанную постоянную в окончательной записи можно опустить.

3. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Пример. Вычислить интеграл:

1. $\int (4x-3)^2 dx$.

Решение. Пусть $u = 4x - 3,$ $du = (4x-3)'dx = 4dx$, $dx = \dfrac{du}{4}$. Подставим эти выражения в интеграл $\int(4x-3)^2 dx=\int u^2\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int u^2 du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}+C$. Сделаем обратную замену (вернемся к первоначальной переменной) $\int(4x-3)^2 dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}+C=\frac{(4x-3)^3}{12}+C.$

Проверка: $\left(\frac{(4x-3)^3}{12}+C\right)'=\frac{3(4x-3)^2 4}{12}=(4x-3)^2.$

Принято все приведенные выше рассуждения записывать следующим образом:

$$\int(4x-3)^2 dx=\left|\begin{array}{l} \quad u=4x-3 \\ du=(4x-3)'dx=4dx \\ dx=\frac{1}{4}dx \end{array}\right|=\int u^2\frac{du}{4}=\frac{1}{4}u^2 du=\frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+C=\frac{(4x-3)^3}{12}+C.$$

2. $\int\cos 3xdx$

Решение: $\int\cos 3xdx=\left|\begin{array}{l} t=3x \\ dt=(3x)'dx=3dx \\ dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\cos tdt=\frac{1}{3}\sin t+C$

Тогда $\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin x+C$

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение: $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l} t=1-x^2 \\ x^2=1-t \\ x=\sqrt{1-t} \\ dx=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}dt \end{array}\right|=\int(-\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}})dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}dt+C$

Тогда $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C$

Задания к практической подготовке

Найдите неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{x+2}{5x^2+3}dx.$
2. $\int\frac{5-2x}{7-3x^2}dx.$

3. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.

4. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.

5. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.

6. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.

7. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3}dx$.

8. $\int \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие неопределённого интеграла.
2. Что называется подынтегральной функцией?
3. Основные методы интегрирования.
4. Основные табличные интегралы (записать).
5. В чём заключается суть метода замены переменной?

Практическое занятие № 13

Метод интегрирования по частям

Теоретическая часть

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu \text{ или } \int udv=uv-\int vdu$$

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким – либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv, затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,\quad \int P(x)\cdot\sin kxdx,\quad \int P(x)\cdot\cos kxdx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx,\quad \int P(x)\arccos xdx,\quad \int P(x)\ln xdx,\quad \int P(x)arctgxdx,\quad \int P(x)arcctgxdx.$

Удобно положить $P(x)dx = dv,$ за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx,\quad \int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, где a,b - числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример. Вычислить интеграл:

1. $\int xe^{x}dx$.

Решение. Интегрирование по частям: пусть $U = x,\quad dV = e^{x}dx$. Тогда $dU = dx,\quad V = e^{x},\ dU = dx,\quad V = e^{x},$

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C.$$

Проверка: $(xe^{x} - e^{x} + C)' = xe^{x} + e^{x} - e^{x} = xe^{x}$.

Принято приведенные выше рассуждения записывать следующим образом:

$$\int xe^{x}dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^{x}dx & V = \int e^{x}dx = e^{x} \end{vmatrix} = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C.$$

2. $\int arctgxdx$

Решение:

$$\int arctgx dx = \begin{vmatrix} u = arctgx \\ dv = dx \\ du = (arctgx)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int dx = x \end{vmatrix} = xarctgx - \int x \frac{dx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

3. $\int e^x \cos x dx$

Решение:

$$\int e^x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ dv = \cos dx \\ du = (e^x)'dx = e^x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ dv = \sin x dx \\ du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Тогда $2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$, $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

Задания к практической подготовке

1. $\int xe^{-2x}dx$ 2. $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. $\int xe^{x}dx$ 4. $\int xe^{-3x}dx$

5. $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. $\int xarctgx dx$ 8. $\int xe^{-2x}dx$

9. $\int (1-x)\sin 3x dx$ 10. $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие неопределённого интеграла.
2. Основные табличные интегралы (записать).
3. В чём заключается суть метода интегрирования по частям?

Практическое занятие № 14

Определенный интеграл (часть 1)

Теоретическая часть

Решение многих геометрических и других задач тесно связано с еще одним понятием интегрального исчисления – определенным интегралом.

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b)-F(a)$ - формула *Ньютона-Лейбница*.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Числа a и b называются *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно.

С геометрической точки зрения определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x=a,\ x=b$ и отрезком $[a,b]$ (рис.5), $S=\int_a^b f(x)dx$.

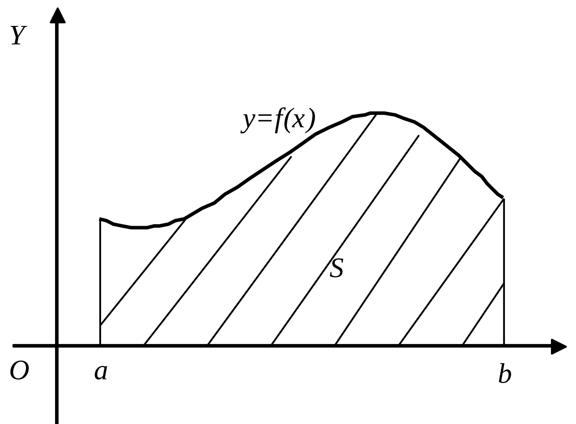


Рис.5

С помощью понятия определенного интеграла решается целый ряд задач: определенный интеграл как площадь фигуры ограниченной кривыми, длина плоской кривой, объем тела вращения, площадь поверхности вращения; работа переменной силы; интеграл в задачах экономики и т.д.

Задания к практической подготовке

Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

1. $\int_a^b e^x dx$.
2. $\int_a^b x^m dx$.
3. $\int_a^b \sin(x)dx$.
4. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$.
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
6. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2(x)}dx$.
7. $\int_a^b C^x dx$.
8. $\int_a^b \frac{1}{x}dx$.
9. $\int_a^b \cos(x)dx$.
10. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что называют определенным интегралом?
2. Привести свойства определенного интеграла.
3. Записать формулу Ньютона-Лейбница.

Практическое занятие № 15

Определенный интеграл (часть 2)

Теоретическая часть

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b

2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x=\sin t; \\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задания к практической подготовке

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1.$\int_0^1 (5x-2)^4\,dx.$ 2.$\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3.$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx.$ 4.$\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}\,dx.$ 5.$\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1.$\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ 2.$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3.$\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4.$\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5.$\int_0^{\pi} \left(x^2+2\right)\cos x dx.$

1.$\int_0^{\pi/4} \sin 2t\cdot dt.$ 2.$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 3.$\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4.$\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx.$ 5.$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

1.$\int_0^1 e^{3x}dx.$ 2.$\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ 3.$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 4.$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ 5.$\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

Вопросы к практическому занятию

1. В чем заключается метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле.
2. В чем заключается метод подстановки (замены переменной) в определенном интеграле.

3. В чем заключается метод интегрирования по частям в определенном интеграле.

Практическое занятие № 16

Вычисление определителей

Теоретическая часть

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое **определителем (детерминантом)**, следующим образом:

1) при $n=1$ $A=(a_{11})$, $\det A = a_{11}$;

2) при $n=2$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$;

3) при $n=3$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель меньшего на единицу порядка, получающегося из данного определителя в результате вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком плюс, если сумма номеров его строки и столбца $(i+j)$ есть число четное, и со знаком минус, если эта сумма есть число нечетное, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример 1. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ найти M_{12}, A_{32}, A_{33}.

Решение.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 7 - 0 \cdot 6 = 28,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - 2 \cdot 4) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4) = 7.$$

Теорема разложения. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример 2. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим данный определитель по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Основные свойства определителей

1. Важным свойством определителей является следующее соотношение: $det\ A = det\ A^T$;

2. $det\ (AB) = detA \cdot detB$

3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

4. При умножении столбца (строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение. Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

5. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

6. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю.

7. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить (вычесть) элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

8. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, найти $det\ (AB)$.

Решение.

1-й способ: $det\ A = 4 - 6 = -2$; $det\ B = 15 - 2 = 13$; $det\ (AB) = det\ A \cdot det\ B = -26$.

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

$det\ (AB) = 7\cdot18 - 8\cdot19 = 126 - \ - 152 \ = -26$.

Задания к практической подготовке

Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix};\ б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix};\ в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix};\ г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\ д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\ е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};\ ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\ к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};\ л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};\ м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};\ н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие определителя (детерминанта).
2. Привести определение минора.
3. Привести определение алгебраического дополнения. Записать формулу вычисления.
4. Привести теорему разложения.
5. Привести основные свойства определителей.

Практическое занятие № 17

Матрицы. Действия с матрицами (часть 1)

Теоретическая часть

Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца, матрица может состоять из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m = n$), то матрица называется **квадратной**. Квадратную матрицу *размера* $n \times n$ называют матрицей n**-го порядка**.

Определение. Матрица вида: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

называется **единичной матрицей**.

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1.

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Определение. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается A^T.

Пример 1. Так, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера.

Определение. **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ C = A + B = B + A.$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

Решение. $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Задания к практической подготовке

1. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

   Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$;

Вопросы к практическому занятию

1. Привести определение матрицы. Записать общий вид.
2. Привести определение квадратной, единичной, диагональной, нулевой и транспонированной матрицы.

3. Привести определение операции суммы (разности) матриц. Записать формулу для их вычисления.

Практическое занятие № 18

Матрицы. Действия с матрицами (часть 2)

Теоретическая часть

Определение. **Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A{\cdot}B = C; \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\,,\ (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, p).$$

Операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Пример 1. $\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, найти AB.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, найти AB, BA.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2{\cdot}1 + 4{\cdot}4 + 1{\cdot}3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, найти AB.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матриц

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако если для каких-либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.** Для любых матриц выполняются следующее свойство: $A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство: $(AB)C = A(BC)$.

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

где индексом T обозначается транспонированная матрица.

В качестве следствия свойства 5 можно записать, что: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, при условии, что определено произведение матриц ABC.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому виду.

Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ $r \leq k$.

Условие $r \leq k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Задания к практической подготовке

1. $\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, найти AB.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, найти AB, BA.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C - BA$; е) $3C - 2E$; ж) CE

Вопросы к практическому занятию

1. Привести определение операции произведением матриц. Записать формулу для их вычисления.
2. Привести свойства операции умножения матриц.
3. Перечислите элементарные преобразования матриц.

Практическое занятие № 19

Обратная матрица. Ранг матрицы

Теоретическая часть

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$X \cdot A = A \cdot X = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы:

1) Вычисляется $\det A$ и проверяется неравенство $\det A \neq 0$. Если оно не выполняется, то матрица A не имеет обратной.

2) Записывается матрица A^T.

3) Строится вспомогательная матрица A^*, элементы которой являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы A^T.

4) Вычисляется обратная матрица по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

Пример. **Задача 1**. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

Решение.

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3(5+4) - 2(0-24) = 75 \neq 0$.

2) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -30$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9$, $A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 24$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3$,

$A^* = \begin{pmatrix} 15 & -30 & 15 \\ 8 & 9 & -2 \\ -12 & 24 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $A^{-1} = \frac{1}{75}A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{75} & \frac{3}{25} & -\frac{2}{75} \\ -\frac{4}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Базисный минор матрицы. Ранг матрицы

Определение. В матрице порядка $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается *rang A*.

Важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Задача 2. Найти ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-15\neq 0$. Значит *rang A = 2*. Базисный минор стоит на пересечении и 3 строки с 1 и 3 столбцами.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными**.

Надо отметить, что равные матрицы и эквивалентны**е** матрицы - различные понятия.

Так как элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Задача 3. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=11-10=1\neq 0 \Rightarrow rangA = 2.$$

Задача 4. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ rangA = 2.$$

Задача 5. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow rangA = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры 3-го порядка. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{1r} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0$.

Задания к практической подготовке

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицы обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Вопросы к практическому занятию

1. Привести определение обратной матрицы. Записать формулу вычисления.

2. Привести свойства обратных матриц.

3. Привести определение базисного минора матрицы.

4.Привести определение ранга матрицы.

Практическое занятие № 20-21

Метод Крамера (часть 1,2)

Теоретическая часть

Теорема. Система из *n* уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

в случае если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\Delta = det\ A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задания к практической подготовке (часть 1)

Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 74x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

Задания к практической подготовке (часть 2)

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 5, \\ x_1 \qquad + 3x_3 = 16, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 \qquad = -5. \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие определителя (детерминанта).
2. В чем заключается метод Крамера?

Практическое занятие № 22-23

Матричный метод решения систем линейных уравнений (часть 1,2)

Теоретическая часть

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных. Метод удобен для решения систем невысокого порядка. Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Выполним преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$$\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}.$$

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + 1(2 – 12) – 1(3 – 8) = -25 – 10 +5 = -30.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$;

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;\ M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;\ M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; \quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$$
$$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; \quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; \quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$
$$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; \quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; \quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$$

Сделаем проверку:

$A \cdot A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Задания к практической подготовке (часть 1)

Решить системы уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$

Задания к практической подготовке (часть 2)

Решить системы уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дать понятие определителя (детерминанта).
2. Как записать простейшее матричное уравнение?
3. Как решить матричное уравнение?
4. В чем заключается матричный метод?

Практическое занятие № 24-25

Метод Гаусса (часть 1,2)

Теоретическая часть

Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения

2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = d_1, \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \ldots + d_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + \ldots + d_{mn}x_n = d_m, \end{cases}$$

где $d_{1j} = a_{1j} / a_{11},\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$

$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j},\ i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, n+1.$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. **1.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований сведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$ откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16, \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований сведем ее к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ -5y - 10z = 40, \\ 6z = 18, \end{cases}$$ откуда получаем: $z = 3$; $y = 2$; $x = 1$.

Задания к практической подготовке (часть 1)

Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$

Задания к практической подготовке (часть 2)

Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

и) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$ л) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$

м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17. \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ о) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. В чем суть метода Гаусса?
2. По каким признакам можно судить о совместности или несовместимости системы линейных уравнений?
3. В каком случае система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений?

Практическое занятие № 26

Элементы комбинаторики

Теоретическая часть

Комбинаторика - один из разделов математики, который используется в математической логике, вычислительной технике, кибернетике, теории чисел, теории вероятностей и других науках.

Определение 1. Выборка называется упорядоченной, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными. Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется неупорядоченной.

Рассматривая различные виды выборок, мы приходим к таким комбинаторным объектам как *размещения* (без повторений и с повторениями), *перестановки* (без повторений и с повторениями) и *сочетания* (без повторений и с повторениями).

Определение 2. Пусть нужно выполнить одно за другим k действий, причем 1 действие можно выполнить m_1 способами, 2 действие - m_2 способами и т.д. Тогда общее число способов выполнить все эти k действий находится по формуле: $N = m_1 * m_2 * ... * m_k$.

Определение 3. Число перестановок - это число способов, которыми можно поменять n элементов местами, т.е.

$$P_n = n! = 1*2*3*4*\ldots*n$$

$$0! = 1! = 1$$

Перестановки с повторениями:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}, \text{ где } n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

Определение 4. Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, ... a_n$. Тогда число способов извлечь m элементов, не учитывая порядок следования, определяется числом сочетаний из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \ n>m$$

Свойства сочетаний:

1⁰. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2⁰. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

3⁰. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.

Определение 5. Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, ... a_n$. Тогда число способов извлечь m элементов, учитывая порядок следования, определяется числом размещений из n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \ n>m$$

Числа C_n^k

Подсчитывать числа вида C_n^k приходится не только при решении комбинаторных задач, но и для определения ***биномиальных коэффициентов в биноме Ньютона***.

Формула бинома Ньютона для натуральных n имеет вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + ... + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + ... + C_n^{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

где $\boxed{C_n^k = \frac{(n)!}{(n-k)!\cdot(k)!}}$ - ***биномиальные коэффициенты****, представляющие из себя сочетания из* n *по* k*.*

Выражение в правой части бинома Ньютона называют ***разложением выражения*** $(a+b)^n$, а выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ **- (k + 1) - *м членом разложения*.**

К примеру, известная формула сокращенного умножения «квадрат суммы» - это частный случай бинома Ньютона при *n* = *2*: $\underline{(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b^1 + C_2^2 \cdot a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Аналогичным образом докажите формулу «куба суммы»: $\underline{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Свойства биномиальных коэффициентов

Для коэффициентов бинома Ньютона справедливы следующие свойства:

- коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой $\underline{C_n^k = C_n^{n-k}}$ (правило симметрии)
- $\underline{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}$;
- сумма биномиальных коэффициентов равна числу *2*, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона: $\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n}$;
- сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, и равна 2^{n-1}.

Биномиальные коэффициенты разложения удобно представлять в виде треугольника Паскаля. Французский математик Блез Паскаль разработал способ вычисления, при котором числа представлены в виде таблицы, которая называется ***арифметический треугольник Паскаля.***

показатель степени	биномиальные коэффициенты										
0						C_0^0					
1					C_1^0		C_1^1				
2				C_2^0		C_2^1		C_2^2			
3			C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3		
$\vdots$		…	…	…	…	…	…	…	…	…	
n	C_n^0		C_n^1	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

Биноминальное разложение с использованием треугольника Паскаля

Рассмотрим следующие выражения со степенями $(a + b)^n$, где a + b есть любой бином, a n - целое число.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}
$$

Каждое выражение - это полином. Во всех выражениях можно заметить особенности.

1. В каждом выражении на одно слагаемое больше, чем показатель степени n.
2. В каждом слагаемом сумма степеней равна n, т.е. степени, в которую возводится бином.
3. Степени начинаются со степени бинома n и уменьшаются к 0. Последний член не имеет множителя a. Первый член не имеет множителя b, т.е. степени b начинаются с 0 и увеличиваются до n.
4. Коэффициенты начинаются с 1 и увеличиваются на определенные значения до "половины пути", а потом уменьшаются на те же значения обратно к 1.

Задания к практической подготовке

1. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Ответ: $2(n!)^2$ способами.

2. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз;

б) ровно один туз;

в) не менее двух тузов;

г) ровно два туза.

Ответ: а) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$; б) $C_4^1 \cdot C_{48}^9$; в) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{48}^9$; г) $C_4^2 \cdot C_{48}^8$.

3. Для награждения победителей школьной олимпиады по математике куплено 10 различных книг (книги равноценные). Сколькими способами эти книги можно распределить между победителями олимпиады, если участник, занявший 1-е место должен получить 5 книг; победитель, занявший 2-е место – 3 книги, а участник, занявший 3-е место – 2 книги?

Ответ: $C_{10}^5 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 2520$ способами.

4. Десять различных книг нужно расставить на двух книжных полках так, чтобы на каждой полке стояло не менее 4 книг. Порядок расположения книг на полке не учитывается. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $C_{10}^4 \cdot C_6^6 + C_{10}^5 \cdot C_5^5 + C_{10}^6 \cdot C_4^4 = C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 = 672$ способа.

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение комбинаторики.
2. Запишите основные формулы комбинаторики.

Практическое занятие № 27

Основные понятия теории вероятностей

Теоретическая часть

Определение 1. Комплекс условий - всё то, что сопровождает данное событие.

Определение 2. Событие - всё то, что может произойти или не произойти при данном испытании.

Определение 3. Событие - достоверно, если оно обязательно произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 4. Событие - невозможно, если оно никогда не произойдёт при данном комплексе условий.

Определение 5. Событие - случайное, если оно может произойти или не произойти при данном комплексе условий.

Определение 6. События $A_1, A_2, .. A_n$ - совместные, если появление одного из событий при одиночном испытании не исключает появление других событий.

Определение 7. Два события - независимые, если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого.

Определение 8. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Определение 9. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение 10. Разностью двух событий A и B называется событие, которое состоится, если событие A произойдёт, а событие B не произойдёт.

Определение 11. (классическое) Вероятность события равна отношению числа исходов, благоприятных появлению данного события, к общему числу всех равновозможных исходов, т.е.

$$P(A) = m\backslash n.$$

Задания к практической подготовке

1. Из кубиков составлено слово «КНИГА». Ребёнок, не умеющий читать, смешал все кубики. Какова вероятность того, что он повторно сложит исходное слово.

2. В урне 5 синих, 6 красных, 10 зеленых и 15 желтых шаров. Один шар взяли. Найти вероятность того, что этот шар будет синий или желтый.

3. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекается 1 деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

4. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

5. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета.

6. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Вопросы к практическому занятию

1. Что называют опытом или испытанием?
2. Что называют событием?
3. Какое событие называют достоверным в данном испытании?
4. Какое событие называют невозможным в данном испытании?
5. Какое событие называют случайным в данном испытании?
6. Какие события называют совместными?
7. Что называется суммой, разностью, произведением событий?
8. Сформулировать и записать классическое определение вероятности.
9. Свойства вероятности.
10. Сформулировать и записать геометрическое определение вероятности.

Практическое занятие № 28

Основные теоремы теории вероятностей (часть 1)

Теоретическая часть

Теорема 1:(правило «+» вер.): Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий,

т.е. $P(A+B+C+...+N) = P(A)+P(B)+…+P(N)$.

Следствие: Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB).$$

Определение 1. Условная вероятность события *B* при условии события *A* - отношение вероятности совместного появления событий *A* и *B* к вероятности события *A,* т.е.

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Теорема 3: (правило «*»вер.): Вероятность произведения 2 зависимых событий *A* и *B* равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что 1 событие произошло

$$P(AB) = P(A)P(B/A),\ P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Теорема 4: Вероятность произведения 2 независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема справедлива для любого числа n независимых событий.

Задания к практической подготовке

1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

3. 2 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,7, второго -0,8. Найти вероятность поражения цели.

4. 3 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,8, второго - 0,7, третьего - 0,9. Найти вероятность того, что в мишени три пробоины.

5. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

6. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок в течении часа потребует внимания рабочего равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станке независимы, найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего:
а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере один станок.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух событий.
2. Как определяется независимость двух событий?
3. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
4. Сформулируйте теорему о вероятности произведения n событий?
5. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?

Практическое занятие № 29

Основные теоремы теории вероятностей (часть 2)

Теоретическая часть

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Пусть событие A появляется с одним из событий $B_1, B_2,....B_n$, причём
$P(B_1+ B_2+....+B_n) = P(B_1)+P(B_2)+....+ P(B_n)$.
Тогда $P(A) = P(AB_1+ AB_2+.. ..+AB_n) = P(AB_1)+P(AB_2)+....+ P(AB_n) =$

$P(B_1)P(A \backslash B_1)+P(B_2)P(A \backslash B_2)+....+ P(B_n)P(A \backslash B_n)$. Т.о.,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) * P(A \backslash B_k) \text{ - } \textit{формула полной вероятности,}$$

где B_k - гипотезы.

С помощью формулы Байеса можно определить, каким образом распределились гипотезы.

$$P(B_k \backslash A) = \frac{P(B_k) * P(A \backslash B_k)}{P(A)} \text{ - } \textit{формула Байеса.}$$

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти некоторое событие А. Испытание повторяется n раз. При этом выполняются следующие условия:

1. Вероятность наступления события $P(A) = p$ в каждом испытании одна и та же.

2. Результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Такая последовательность испытаний называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*.

Теорема 1. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

$$P(m,n) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1-p \text{ – формула Бернулли.}$$

Отметим, что при большом числе испытаний формулу Бернулли применять достаточно сложно. В этих случаях применяются т.н. асимптотические формулы, самой простой из которых является формула Пуассона.

Теорема 2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причём произведение np стремиться к постоянному числу λ, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет равенству:

$$P(m,n) \approx P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$ - формула Пуассона.

Локальная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A произойдёт m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, равна:

$$P(m,n) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции $\varphi(x)$ (табл.1).

Если в задаче требуется найти вероятность, принадлежащую некоторому интервалу, то используется следующая теорема.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n равна:

$$P_n(a \le m \le b) = \frac{1}{2}(\Phi(x_2)-\Phi(x_1)),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и $x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$.

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции $\Phi(x)$ (табл.2).

Задания к практической подготовке

1. Пусть имеется три урны с шарами: 1- 5 белых, 3 красных; 2 - 3 белых, 5 красных; 3 - 4 белых, 4 красных. Из одной урны наугад вытащили 1 шар. Найти вероятность того, что он белый.

2. В некоторой местности на каждых 100 семей приходится 80 автомобилей. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют автомобили.

3. Применить интегральную теорему для предыдущей задачи в предположении, что от 300 до 360 семей из 400 имеют автомобили.

Вопросы к практическому занятию

1. Записать формулу полной вероятности, формулу Байеса.
2. Записать и пояснить формулу Пуассона. В каких случаях она применима?
3. Сформулировать и записать локальную теорему Муавра-Лапласа.
4. Сформулировать и записать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Приложение 1

Функция Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$
0,00	0,398942	0,52	0,348493	1,04	0,232297	1,56	0,118157	2,08	0,045861
0,02	0,398862	0,54	0,344818	1,06	0,227470	1,58	0,114505	2,10	0,043984
0,04	0,398623	0,56	0,341046	1,08	0,222653	1,60	0,110921	2,12	0,042166
0,06	0,398225	0,58	0,337180	1,10	0,217852	1,62	0,107406	2,14	0,040408
0,08	0,397668	0,60	0,333225	1,12	0,213069	1,64	0,103961	2,16	0,038707
0,10	0,396953	0,62	0,329184	1,14	0,208308	1,66	0,100586	2,18	0,037063
0,12	0,396080	0,64	0,325062	1,16	0,203571	1,68	0,097282	2,20	0,035475
0,14	0,395052	0,66	0,320864	1,18	0,198863	1,70	0,094049	2,22	0,033941
0,16	0,393868	0,68	0,316593	1,20	0,194186	1,72	0,090887	2,24	0,032460
0,18	0,392531	0,70	0,312254	1,22	0,189543	1,74	0,087796	2,26	0,031032
0,20	0,391043	0,72	0,307851	1,24	0,184937	1,76	0,084776	2,28	0,029655
0,22	0,389404	0,74	0,303389	1,26	0,180371	1,78	0,081828	2,30	0,028327
0,24	0,387617	0,76	0,298872	1,28	0,175847	1,80	0,078950	2,32	0,027048
0,26	0,385683	0,78	0,294305	1,30	0,171369	1,82	0,076143	2,34	0,025817
0,28	0,383606	0,80	0,289692	1,32	0,166937	1,84	0,073407	2,36	0,024631
0,30	0,381388	0,82	0,285036	1,34	0,162555	1,86	0,070740	2,38	0,023491
0,32	0,379031	0,84	0,280344	1,36	0,158225	1,88	0,068144	2,40	0,022395
0,34	0,376537	0,86	0,275618	1,38	0,153948	1,90	0,065616	2,42	0,021341
0,36	0,373911	0,88	0,270864	1,40	0,149727	1,92	0,063157	2,44	0,020328
0,38	0,371154	0,90	0,266085	1,42	0,145564	1,94	0,060765	2,46	0,019356
0,40	0,368270	0,92	0,261286	1,44	0,141460	1,96	0,058441	2,48	0,018423
0,42	0,365263	0,94	0,256471	1,46	0,137417	1,98	0,056183	2,50	0,017528
0,44	0,362135	0,96	0,251644	1,48	0,133435	2,00	0,053991	2,52	0,016670
0,46	0,358890	0,98	0,246809	1,50	0,129518	2,02	0,051864	2,54	0,015848
0,48	0,355533	1,00	0,241971	1,52	0,125665	2,04	0,049800	2,56	0,015060
0,50	0,352065	1,02	0,237132	1,54	0,121878	2,06	0,047800	2,58	0,014305

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,60	0,013583	3,12	0,003070	3,64	0,000529	4,16	0,000070	4,68	0,000007
2,62	0,012892	3,14	0,002884	3,66	0,000492	4,18	0,000064	4,70	0,000006
2,64	0,012232	3,16	0,002707	3,68	0,000457	4,20	0,000059	4,72	0,000006
2,66	0,011600	3,18	0,002541	3,70	0,000425	4,22	0,000054	4,74	0,000005
2,68	0,010997	3,20	0,002384	3,72	0,000394	4,24	0,000050	4,76	0,000005
2,70	0,010421	3,22	0,002236	3,74	0,000366	4,26	0,000046	4,78	0,000004
2,72	0,009871	3,24	0,002096	3,76	0,000340	4,28	0,000042	4,80	0,000004
2,74	0,009347	3,26	0,001964	3,78	0,000315	4,30	0,000039	4,82	0,000004
2,76	0,008846	3,28	0,001840	3,80	0,000292	4,32	0,000035	4,84	0,000003
2,78	0,008370	3,30	0,001723	3,82	0,000271	4,34	0,000032	4,86	0,000003
2,80	0,007915	3,32	0,001612	3,84	0,000251	4,36	0,000030	4,88	0,000003
2,82	0,007483	3,34	0,001508	3,86	0,000232	4,38	0,000027	4,90	0,000002
2,84	0,007071	3,36	0,001411	3,88	0,000215	4,40	0,000025	4,92	0,000002
2,86	0,006679	3,38	0,001319	3,90	0,000199	4,42	0,000023	4,94	0,000002
2,88	0,006307	3,40	0,001232	3,92	0,000184	4,44	0,000021	4,96	0,000002
2,90	0,005953	3,42	0,001151	3,94	0,000170	4,46	0,000019	4,98	0,000002
2,92	0,005616	3,44	0,001075	3,96	0,000157	4,48	0,000017	5,00	0,000001
2,94	0,005296	3,46	0,001003	3,98	0,000145	4,50	0,000016	5,02	0,000001
2,96	0,004993	3,48	0,000936	4,00	0,000134	4,52	0,000015	5,04	0,000001
2,98	0,004705	3,50	0,000873	4,02	0,000124	4,54	0,000013	5,06	0,000001
3,00	0,004432	3,52	0,000814	4,04	0,000114	4,56	0,000012	5,08	0,000001
3,02	0,004173	3,54	0,000758	4,06	0,000105	4,58	0,000011	5,10	0,000001
3,04	0,003928	3,56	0,000706	4,08	0,000097	4,60	0,000010	5,12	0,000001
3,06	0,003695	3,58	0,000657	4,10	0,000089	4,62	0,000009	5,14	0,000001
3,08	0,003475	3,60	0,000612	4,12	0,000082	4,64	0,000008	5,16	0,000001
3,10	0,003267	3,62	0,000569	4,14	0,000076	4,66	0,000008	5,18	0,000001

Приложение 2

Функция Лапласа

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,000000	0,52	0,198468	1,04	0,350830	1,56	0,440620	2,08	0,481237
0,02	0,007978	0,54	0,205402	1,06	0,355428	1,58	0,442947	2,10	0,482136
0,04	0,015953	0,56	0,212260	1,08	0,359929	1,60	0,445201	2,12	0,482997
0,06	0,023922	0,58	0,219043	1,10	0,364334	1,62	0,447384	2,14	0,483823
0,08	0,031881	0,60	0,225747	1,12	0,368643	1,64	0,449497	2,16	0,484614
0,10	0,039828	0,62	0,232371	1,14	0,372857	1,66	0,451543	2,18	0,485371
0,12	0,047758	0,64	0,238914	1,16	0,376976	1,68	0,453521	2,20	0,486097
0,14	0,055670	0,66	0,245373	1,18	0,381000	1,70	0,455435	2,22	0,486791
0,16	0,063559	0,68	0,251748	1,20	0,384930	1,72	0,457284	2,24	0,487455
0,18	0,071424	0,70	0,258036	1,22	0,388767	1,74	0,459071	2,26	0,488089
0,20	0,079260	0,72	0,264238	1,24	0,392512	1,76	0,460796	2,28	0,488696
0,22	0,087064	0,74	0,270350	1,26	0,396165	1,78	0,462462	2,30	0,489276
0,24	0,094835	0,76	0,276373	1,28	0,399727	1,80	0,464070	2,32	0,489830
0,26	0,102568	0,78	0,282305	1,30	0,403199	1,82	0,465621	2,34	0,490358
0,28	0,110261	0,80	0,288145	1,32	0,406582	1,84	0,467116	2,36	0,490863
0,30	0,117911	0,82	0,293892	1,34	0,409877	1,86	0,468557	2,38	0,491344
0,32	0,125516	0,84	0,299546	1,36	0,413085	1,88	0,469946	2,40	0,491802
0,34	0,133072	0,86	0,305106	1,38	0,416207	1,90	0,471284	2,42	0,492240
0,36	0,140576	0,88	0,310570	1,40	0,419243	1,92	0,472571	2,44	0,492656
0,38	0,148027	0,90	0,315940	1,42	0,422196	1,94	0,473810	2,46	0,493053
0,40	0,155422	0,92	0,321214	1,44	0,425066	1,96	0,475002	2,48	0,493431
0,42	0,162757	0,94	0,326391	1,46	0,427855	1,98	0,476148	2,50	0,493790
0,44	0,170031	0,96	0,331472	1,48	0,430563	2,00	0,477250	2,52	0,494132
0,46	0,177242	0,98	0,336457	1,50	0,433193	2,02	0,478308	2,54	0,494457
0,48	0,184386	1,00	0,341345	1,52	0,435744	2,04	0,479325	2,56	0,494766
0,50	0,191462	1,02	0,346136	1,54	0,438220	2,06	0,480301	2,58	0,495060

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
2,60	0,495339	3,12	0,499096	3,64	0,499864	4,16	0,499984	4,68	0,499999
2,62	0,495603	3,14	0,499155	3,66	0,499874	4,18	0,499985	4,70	0,499999
2,64	0,495855	3,16	0,499211	3,68	0,499883	4,20	0,499987	4,72	0,499999
2,66	0,496093	3,18	0,499264	3,70	0,499892	4,22	0,499988	4,74	0,499999
2,68	0,496319	3,20	0,499313	3,72	0,499900	4,24	0,499989	4,76	0,499999
2,70	0,496533	3,22	0,499359	3,74	0,499908	4,26	0,499990	4,78	0,499999
2,72	0,496736	3,24	0,499402	3,76	0,499915	4,28	0,499991	4,80	0,499999
2,74	0,496928	3,26	0,499443	3,78	0,499922	4,30	0,499991	4,82	0,499999
2,76	0,497110	3,28	0,499481	3,80	0,499928	4,32	0,499992	4,84	0,499999
2,78	0,497282	3,30	0,499517	3,82	0,499933	4,34	0,499993	4,86	0,499999
2,80	0,497445	3,32	0,499550	3,84	0,499938	4,36	0,499993	4,88	0,499999
2,82	0,497599	3,34	0,499581	3,86	0,499943	4,38	0,499994	4,90	0,500000
2,84	0,497744	3,36	0,499610	3,88	0,499948	4,40	0,499995	4,92	0,500000
2,86	0,497882	3,38	0,499638	3,90	0,499952	4,42	0,499995	4,94	0,500000
2,88	0,498012	3,40	0,499663	3,92	0,499956	4,44	0,499995	4,96	0,500000
2,90	0,498134	3,42	0,499687	3,94	0,499959	4,46	0,499996	4,98	0,500000
2,92	0,498250	3,44	0,499709	3,96	0,499963	4,48	0,499996	5,00	0,500000
2,94	0,498359	3,46	0,499730	3,98	0,499966	4,50	0,499997	5,02	0,500000
2,96	0,498462	3,48	0,499749	4,00	0,499968	4,52	0,499997	5,04	0,500000
2,98	0,498559	3,50	0,499767	4,02	0,499971	4,54	0,499997	5,06	0,500000
3,00	0,498650	3,52	0,499784	4,04	0,499973	4,56	0,499997	5,08	0,500000
3,02	0,498736	3,54	0,499800	4,06	0,499975	4,58	0,499998	5,10	0,500000
3,04	0,498817	3,56	0,499815	4,08	0,499977	4,60	0,499998	5,12	0,500000
3,06	0,498893	3,58	0,499828	4,10	0,499979	4,62	0,499998	5,14	0,500000
3,08	0,498965	3,60	0,499841	4,12	0,499981	4,64	0,499998	5,16	0,500000
3,10	0,499032	3,62	0,499853	4,14	0,499983	4,66	0,499998	5,18	0,500000

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

11. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1235904

2. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 томах. Том 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1817031

Список дополнительной литературы

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.