ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по учебной дисциплине
«Математика»
для обучающихся по специальности
54.02.01 «Дизайн (в промышленности)»

Ставрополь,2022

Методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 54.02.01 «Дизайн (в промышленности)» и программой дисциплины «Математика».

Составитель: преподаватель Ерёмина Е.Р.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26 » мая 2022 г.

В методических указаниях представлен краткий теоретический и практический материал для проведения практических занятий по дисциплине «Математика».

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Математика» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины ориентирована на достижение следующих целей:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь обучающимся осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

Дизайнер должен обладать **общими** компетенциями, включающими в себя способность

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;

ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, применять стандарты антикоррупционного поведения;

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

Дизайнер должен обладать **профессиональными** компетенциями, соответствующими основным видам профессиональной деятельности:

ПК 1.1. Разрабатывать техническое задание согласно требованиям заказчика;

ПК 1.3. Осуществлять процесс дизайнерского проектирования с применением специализированных компьютерных программ

ПК 1.5. Выполнять эскизы с использованием различных графических средств и приемов.

ПК 2.2. Выполнять технические чертежи;

ПК 4.1. Планировать работу коллектива;

ПК 4.3. Контролировать сроки и качество выполненных заданий.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 3. Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих.

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 13. Выбирающий оптимальные способы решения профессиональных задач на основе уважения к заказчику, понимания его потребностей.

СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие № 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Теоретическая часть

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении последнего к нулю, т.е.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Основные правила дифференцирования

$(c)' = 0,\ \textit{здесь}\ c - const$; $\quad (u+v)' = u' + v'$; $\quad (uv)' = u'v + uv'$;

$(cu)' = c \cdot u'$; $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; $\quad \begin{cases} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{cases} \ y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x).$

Таблица основных производных

$(x^n)' = nx^{n-1};$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

$(e^x)' = e^x;$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(ctg)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Примеры.

1) Найти y' если $y = 5x^3 - 2x + 8$.

Решение. $y' = \left(5x^3\right)' - \left(2x\right)' + \left(8\right)' = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 + 0 = 15x^2 - 2$.

2) Найти y' если $y = \dfrac{15x^2 - 4}{1 - x}$.

Решение.

$$y' = \frac{\left(15x^2 - 4\right)'(1-x) - (1-x)'\left(15x^2 - 4\right)}{(1-x)^2} = \frac{(15 \cdot 2x - 0)(1-x) - (0-1)\left(15x^2 - 4\right)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{30x - 30x^2 + 15x^2 - 4}{(1-x)^2} = \frac{30x - 15x^2 - 4}{(1-x)^2}.$$

3) Найти y' если $y = \sin x \cdot (4^x + 2x)$.

Решение. $y' = (\sin x)'(4^x + 2x) + \sin x\left(4^x + 2x\right)' = \cos x(4^x + 2x) + \sin x(4^x \ln 4 + 2)$.

Если вдоль некоторой прямой движется материальная точка по закону $s = s(t)$, где s - пройденный путь, t - время, то средняя скорость движения точки за промежуток времени длительностью Δt известна $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Тогда мгновенная скорость движения материальной точки - это предел средней скорости при $\Delta t \to 0$: $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. С точки зрения математики мгновенная скорость представляет собой производную от пути по времени.

Производная от скорости называется *ускорением*, она характеризует «скорость изменения скорости».

4) Точка движется по закону $s(t) = 3t^4 - 4t^3$. Найти скорость и ускорение точки через *2 с* после начала движения.

Решение: $s'(t) = v(t)$, $s''(t) = v'(t) = a$, $t = 2$.

Тогда $v(t) = (3t^4 - 4t^3)' = 3 \cdot 4t^3 - 4 \cdot 3t^2 = 12t^3 - 12t^2$, $v(2) = 12 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 48$,

$a(t) = (12t^3 - 12t^2)' = 12 \cdot 3t^2 - 12 \cdot 2t = 36t^2 - 24t$, $a(2) = 36 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 96$.

5) Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 8t - 5t^2$. Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей.

6) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 60t - 5t^3$. Через какое время после начала движения точка остановится? Найти путь, пройденный точкой до остановки.

7) Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента $t = 0$, дается формулой $Q = 2t^3+3t+1$(кул). Найти силу тока в конце 5-ой секунды.

Задания к практическому занятию

Найти производные следующих функций:

$y = e^{-x}$

$y = \sqrt{e^x}$

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$

$y = e^{(3x+5)^2}$

$y = a^{3x}$

$y = a^x e^x$

$y = \lg(2x)$

$y = \ln 3x$

$y = \log_3(4x-2)$

$y = \ln(x^3)$

$y = (\ln x)^3$

$y = 5(2x^2 - 3x + 4)^8$

$y = 4\sqrt{1+3x^3-2x^5}$

$y = \sqrt[3]{(2-x)(5-2x)}$

$y = \sqrt[3]{x^3-2}$

$y = \sqrt{\dfrac{4}{2x^2+5}}$

$y = 3\sin(3x-1)$

$y = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg3x}$
$y = \ln \sin x$
$y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

Вопросы к практическому занятию

1. Привести определение производной.
2. Что называется операцией дифференцирования.
3. Запишите основные правила дифференцирования.
4. Привести физическую интерпретацию производной.

Практическое занятие № 2

ОБЩЕЕ ИСЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Теоретическая часть

Определение. График дифференцируемой функции $f(x)$ называется выпуклым на (a,b), если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение. График дифференцируемой функции называется вогнутым на (a,b), если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости или вогнутости).
Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала (a,b). Если во всех точках этого $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале – выпуклый, если же $f''(x) > 0$ - вогнутый.

Определение. Точка $(x_0;\ f(x_0))$ графика функции, отделяющая его выпуклую часть от выгнутой или наоборот, называется точкой перегиба.

Теорема 2 (необходимое условие наличия точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале (a,b) непрерывную $f''(x)$. Тогда, если точка с абсциссой $x_0 \in (a,b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

Определение. Точка в которой $f''(x_0) = 0$ или не существует называется подозрительной на перегибе.

Теорема 3 (достаточное условие существования перегиба).

Если вторая производная непрерывной функции меняет знак при переходе через x_0, то точка с абсциссой x_0 - является точкой перегиба функции.

Правило исследования на перегиб.

1) Найти $D(y)$.
2) Найти y''.
3) Найти точку, подозрительную на перегиб $(y'' = 0)$.
4) Этими точками разобьем $D(y)$ на интервалы, на каждом из которых $f''(x)$ существует и сохраняет постоянный знак.
5) Определить наличие точки перегиба согласно достаточному условию.

   Точки при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак – точки перегиба, если же $f''(x)$ знак не меняет, то перегиба нет.

Примеры:

1) Найти точки перегиба кривой

1. $y = e^{-x^2}$.

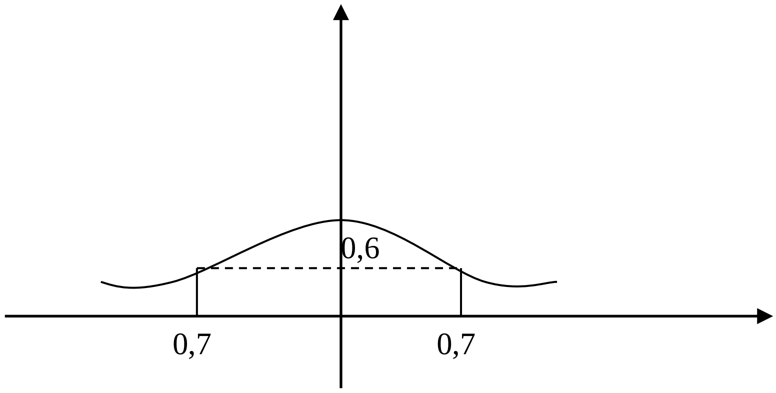
Решение:

1) $D(y) = R$

2) $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = -2\left(e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x)\right) = e^{-x^2}\left(-2 + 4x^2\right)$

3) $y'' = 0$; $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$

x	$-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}};\quad \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}};\quad +\infty$
y''	+	0	-	0	+
y		т. пер. $\approx 0{,}6$		т. пер. $= 0{,}6$	



2. $y = (x-5)^{5/3} + 2$.

3. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

При исследовании функции важно установить форму ее графика от начала координат.

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что при неограниченном удалении по графику функции расстояние между кривой и прямой $\to 0$.

Асимптоты могут быть:

- вертикальные, для нахождения которых нужно найти точки (те значения $x = x_0$), при которых функция обращается в бесконечность, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, тогда уравнение $x = x_0$ является уравнением вертикальной асимптоты.
- наклонные. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту не параллельную оси $0y$, т.е. невертикальную (наклонную). Тогда уравнение этой прямой имеет вид $y = kx + b$, где

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0 \quad\Rightarrow\ k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует при $x\to\infty$ то график функции $y=f(x)$ асимптот не имеет.

В частном случае коэффициент k может быть равен нулю, тогда асимптота параллельна оси $0x$ и называется горизонтальной.

Аналогично находят асимптоты при $x\to-\infty$. Причем пределы могут быть различными при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

Полное исследование функций выполняется по следующей схеме:

1) Найти область определения функции $D(y)$.
2) Исследовать на непрерывность определенный вид точки разрыва, если они есть.
3) Определить четность, нечетность, периодичность.
4) Найти точки пересечения с осями координат.
5) Найти асимптоты графика функции. Если асимптот нет, то полезно изучить поведение функции в граничных точках области существования, т.е. найти пределы при приближении к этим точкам.
6) Определить интервалы возрастания и убывания, точки экстремума графика функции.
7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
8) Найти дополнительные точки.

2) Построить график функции:

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Решение:

1) $D(y)=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

2) общего вида

3) не периодична

4) $x=0$ - точка разрыва

5) $y'=\dfrac{x^3-8}{x^3}$; $x_1=0;\ x_2=2$

x	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ 2[$	2	$]2;\ +\infty[$
y'	+	н.с.	-	0	+
y	↗		↘	3 min	↗

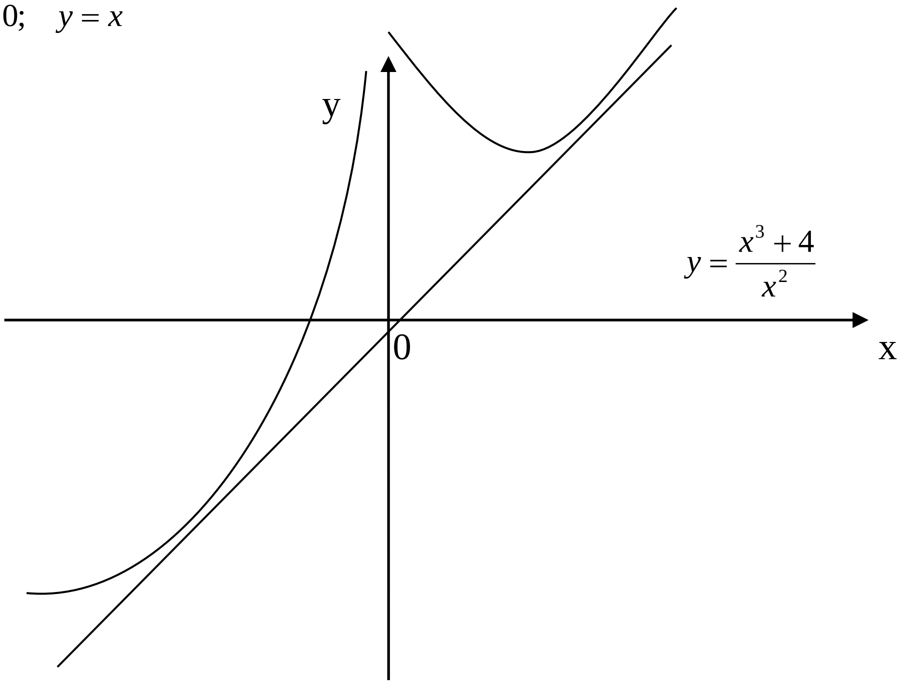
6) $y''=\dfrac{24}{x^4}>0$ всегда вогнута

7) $x=0$ - вертикальная асимптота

$y=kx+b$

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3+4}{x^3}=1;\ b=0;\quad y=x$

8) $y=0\quad x=-\sqrt[3]{4}$



Задания к практическому занятию

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y=\dfrac{x^3+16}{x}$ 3. $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 7. $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$ 8. $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ 10. $y=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ 12. $y=\dfrac{x^2+16}{2x}$

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется экстремумом функции?
2. Как подразделяются экстремумы?
3. Что называется точкой перегиба функции?
4. Дать определение асимптоты.
5. Как классифицируются асимптоты?
6. Назовите этапы исследования функций.

Практическое занятие № 3

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Теоретическая часть

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если для всех x из области определения функции $f(x)$ $F'(x)=f(x)$.

Основная задача интегрального исчисления заключается в нахождении первообразной заданной функции.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается следующим образом: $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция, $\int$ – знак интеграла, x - переменная интегрирования. Операция нахождения первообразной называется *интегрированием* функции.

Если $F(x)$ одна из первообразных функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Таблица основных интегралов

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgx dx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos x dx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

Интегрирование – действие, обратное дифференцированию, поэтому результат интегрирования можно проверить дифференцированием.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int (x)dx\right)' = f(x)$.

2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Методы интегрирования

Выделяют три основных метода интегрирования:

1. Метод непосредственного интегрирования: подынтегральная функция

с помощью тождественных преобразований приводится к такому виду, чтобы, воспользовавшись свойствами неопределенного интеграла, исходный интеграл можно было свести к алгебраической сумме табличных интегралов.

2. Метод подстановки (замены переменной): $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

3. Метод интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU$, где $U(x), V(x)$ непрерывно дифференцируемые функции. Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

- Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\cdot\sin kxdx,\ \int P(x)\cdot\cos kxdx$, где $P(x)$ - многочлен, k - число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

- Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,\ \int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)arctgxdx,\ \int P(x)arcctgxdx.$

Удобно положить $P(x)dx = dv,$ за u обозначить остальные сомножители.

- Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bxdx,\ \int e^{ax}\cdot\cos bxdx$, где a,b - числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Примеры:

1. $\int\left(x^2 + 7x - 5\right)dx.$

Решение. Метод непосредственного интегрирования:

$$\int\left(x^2 + 7x - 5\right)dx = \int x^2dx + \int 7xdx - \int 5dx = \frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C.$$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 5x + C\right)' = \frac{3x^2}{3} + \frac{14x}{2} - 5 = x^2 + 7x - 5.$

2. $\int(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1})dx$

3. $\int\frac{dx}{4x^2+9}$

Решение: $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{2\cdot 3} arctg\,\frac{2x}{3} + C = \frac{1}{6} arctg\,\frac{2x}{3} + C$

4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx$

Решение: $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{x^8+5}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{(x^4)^2+5}} = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8+5}\right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln|\arcsin x| + C$

6. $\int (4x-3)^2 dx$.

Решение: Пусть $u = 4x-3$, $du = (4x-3)'dx = 4dx$, $dx = \frac{du}{4}$. Подставим эти выражения в интеграл $\int (4x-3)^2 dx = \int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^2 du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C$. Сделаем обратную замену (вернемся к первоначальной переменной) $\int (4x-3)^2 dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x-3)^3}{12} + C$.

Проверка: $\left(\frac{(4x-3)^3}{12} + C\right)' = \frac{3(4x-3)^2 4}{12} = (4x-3)^2$.

Принято все приведенные выше рассуждения записывать следующим образом:

$$\int (4x-3)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = 4x-3 \\ du = (4x-3)'dx = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}dx \end{matrix} \right| = \int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}u^2 du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x-3)^3}{12} + C.$$

7. $\int \cos 3x dx$

Решение: $\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} t = 3x \\ dt = (3x)'dx = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \cos t dt = \frac{1}{3}\sin t + C$

Тогда $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin x + C$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение: $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1-x^2 \\ x^2 = 1-t \\ x = \sqrt{1-t} \\ dx = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}dt \end{matrix} \right| = \int (-\frac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}})dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}dt + C$$

Тогда $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$

9. $\int xe^x dx$.

Решение: Интегрирование по частям: пусть $U = x, \quad dV = e^x dx$. Тогда $dU = dx, \quad V = e^x, \; dU = dx, \quad V = e^x,$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Проверка: $(xe^x - e^x + C)' = xe^x + e^x - e^x = xe^x$.

Принято приведенные выше рассуждения записывать следующим образом:

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^x dx & V = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

10. $\int arctgxdx$

Решение:

$$\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx \\ dv = dx \\ du = (arctgx)'dx = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int x\frac{dx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

11. $\int e^x \cos xdx$

Решение:

$$\int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ dv = \cos dx \\ du = (e^x)'dx = e^x dx \\ v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ dv = \sin xdx \\ du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{matrix} \right| = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx.$$

Тогда $2\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x + C$, $\int e^x \cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

Задания к практическому занятию

1. Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$ 4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^5}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. а) $\int \sqrt{1-5x}dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int xarctgxdx$ 8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}dx$; б) $\int (1-x)\sin 3xdx$ 10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4xdx$ 12. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

2. Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.

2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.

3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.

4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.

5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.

6. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.

7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.

8. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.

9. $\int \frac{e^{2x} + 3e^{x}}{e^{2x} + 3} dx$.

10. $\int \frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

Вопросы к практическому занятию

1. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
2. Как записать всю совокупность первообразных функций?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
5. Как проверить результат интегрирования?
6. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
7. В чём заключается суть метода интегрирования по частям?

Практическое занятие № 4

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Теоретическая часть

Решение многих геометрических и других задач тесно связано с еще одним понятием интегрального исчисления – определенным интегралом.

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b) - F(a)$ - формула *Ньютона-Лейбница*.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Числа a и b называются *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно.

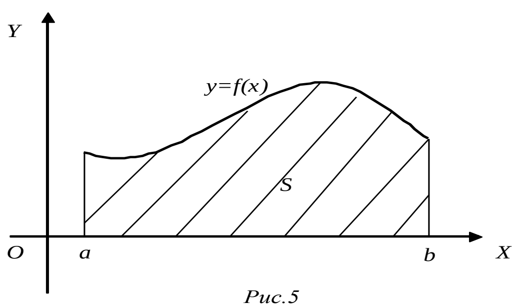


Рис.5

С геометрической точки зрения определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a, x=b$ и отрезком $[a,b]$ (рис.5), $S=\int_a^b f(x)dx$.

Примеры:

1. $\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3}$.

2. $\int_0^8(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx=\int_0^8\sqrt{2x}dx+\int_0^8\sqrt[3]{x}dx=\int_0^8(2x)^{\frac{1}{2}}dx+\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx=$

$$=\frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^8+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8=\frac{16^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{1}{3}0+\frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}0=\frac{100}{3}.$$

3. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\sin x$ и осью абсцисс, если $x\in[0,\pi]$.

   Решение. $S=\int_0^\pi \sin xdx=-\cos x\Big|_0^\pi=-(\cos\pi-\cos 0)=-((-1)-1)=2$ ед.^{2}.

4. $\int_0^{\pi/2}x\sin xdx$.

Решение. Интегрирование по частям в определенном интеграле: пусть $U=x$, $dV=\sin xdx$, тогда $dU=dx$, $V=-\cos x$,

$$\int_0^{\pi/2}x\sin xdx=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos xdx=-x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\sin x\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cos 0\right)+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

С помощью понятия определенного интеграла решается целый ряд задач: определенный интеграл как площадь фигуры ограниченной кривыми, длина плоской кривой, объем тела вращения, площадь поверхности вращения; работа переменной силы; интеграл в задачах экономики и т.д.

Задания к практическому занятию

1.Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница

1. $\int_a^b e^x dx$.
2. $\int_a^b x^m dx$.
3. $\int_a^b \sin(x) dx$.
4. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx$.
5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
6. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2(x)} dx$.
7. $\int_a^b C^x dx$.
8. $\int_a^b \frac{1}{x} dx$.
9. $\int_a^b \cos(x) dx$.
10. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)} dx$.
11. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.
12. $\int_1^2 \left(x^2 - 2x + 3\right) dx$.
13. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4} + x^2\right) dx$.
14. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t} dt$.
15. $\int_1^e \left(\frac{\lg(z)+1}{z}\right) dz$.
16. $\int_0^1 (1+t)^3 dt$.
17. $\int_{-1}^1 \frac{(x-1)^3}{x} dx$.
18. $\int_0^{2\pi} (\cos(x) + \sin(x)) dx$.
19. $\int_2^4 \left(x^2 + 2x + 1\right)^{\frac{1}{2}} dx$.

2.В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 (5x-2)^4 dx.$ 2. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2) dx.$ 4. $\int_0^{\ln 2} e^{2x-1} dx.$ 5. $\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1. $\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ 2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3. $\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4. $\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5. $\int_0^{\pi} (x^2+2)\cos x dx.$

1. $\int_0^{\pi/4} \sin 2t \cdot dt.$ 2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 3. $\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4. $\int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx.$ 5. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$

$1.\int_0^1 e^{3x}dx.\quad 2.\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.\quad 3.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.\quad 4.\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}\quad 5.\int_\pi^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла.
2. Перечислите свойства определенного интеграла.
3. Какова геометрическая интерпретация определенного интеграла?
4. Запишите Формулу Ньютона – Лейбница.
5. Перечислите приемы вычисления определенных интегралов.

Практическое занятие № 5

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Теоретическая часть

Множество – совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Различают *конечные* и *бесконечные* множества. Множество называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа элементов.

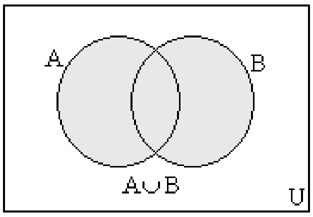
Множество *A* называется **подмножеством** множества *B*, если каждый элемент множества *A* является элементом множества *B*. Символически это обозначают так $A \subset B$ - «*A* включено в *B*» или $B \supset A$ - «множество *B* включает в себя множество *A*».

Говорят, что множества *A* и *B* *равны* или **совпадают**, и пишут *A*=*B*, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Т.е. множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются **равными**.

Объединением (*суммой*) множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств обозначают $A \cup B$ (или *A*+*B*). Кратко можно записать

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

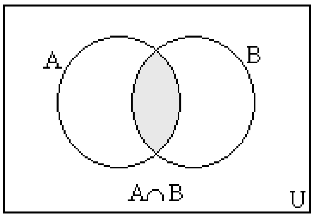
Все операции над множествами можно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. На рисунке показано объединение множеств *A* и *B*.



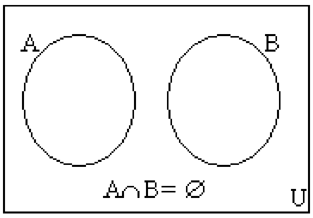
Пример: Пусть A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. Тогда $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6}.

Пересечением (*произведением*) множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству *A* и множеству *B*. Пересечение множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Если множества *A* и *B* не имеют общих элементов, то пересечением таких множеств является **пустое** множество $A \cap B = \varnothing$.

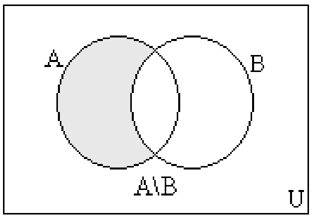


Пример: Пусть *A* = {4, 5, 6}, *B* = {2, 4, 6}. Тогда $A \cap B$ = {4, 6}.

Разностью множеств *A* и *B* называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству *A*, но не принадлежащих множеству

B. Разность множеств обозначают A\B. По определению

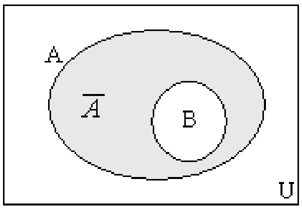
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Пример: A = {4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}. A \ B = {5}, B \ A= {2}.

Пусть B⊂A. *Дополнением* множества *B* до множества *A* называется множество, содержащее все элементы множества *A*, которые не принадлежат множеству *B*. Обозначается дополнение множества B'_A или $\overline{A}$, т.е.

$$A \setminus B = \overline{A}.$$



Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств могут служить:

$\mathrm{N} = \{1,2,3,...,n,...\}$ – множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0,1,2,3,..., n,...\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...,\pm n,...\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{\dfrac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ – множество рациональных чисел;

R - множество действительных чисел;

C - множество комплексных чисел;

Между этими множества существует отношение $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Задания к практическому занятию

1. Записать множество М целых чисел х, которые делятся на три и находятся в интервале $3 \le x \le 15$. Записать двумя способами.

2. Записать множество А целых чисел х, которые делятся на 2 и на 3 и находятся в интервале $20 \le x \le 25$. Записать двумя способами.

3. Принадлежит ли *x* множеству М, если:

а) $M = \{2, 6, 8, \ldots, 50\}$; $x = 35$;

б) $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots, 100\}$; $x = 23$;

в) $M = \{-2, 2, -4, 4, \ldots, 120\}$; $x = -30$.

4. Равны ли множества:

а) $\{x \in R| \; x^2 - 2x - 2 = 0\}$ и $\{x \in Q| \; x^2 - 2x - 2 = 0\}$;

б) $\{x \in Z| \; 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in Z| \; 4/x \wedge 15/x\}\{x \in Z| \; 20/x \wedge 30/x\}$.

5. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $\{x \in R| \; x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in R| \; x^2 + 1 = 0\}$;

в) множество всех корней уравнения $x^2 + 6x + 9 = 0$.

6. Перечислите элементы следующих множеств:

a) $A=\{x \mid x \in Z$ и $10 \le x \le 17\}$;

b) $C=\{x \mid x \in Z$ и $6x^2+x-1=0\}$;

c) $B=\{x \mid x \in Z$ и $x^2<24\}$;

d) $D=\{x \mid x \in R$ и $6x^2+x-1=0\}$.

7. Укажите все подмножества данных множеств:

e) $\{0,1\}$

f) $\{0,1,2\}$;

g) $\{a,b,c\}$;

8. Изобразите на числовой прямой пересечение, объединение и разность следующих множеств: $X_1=\{x|x \in R$ и $x^2-1 \le 0\}$ и $X_2=\{x| \; |x|<1\}$.

9. Выполните все известные вам операции над заданными множествами:

h) A={1,2,3,4}; B={1,3,5}; C={5,6}.

i) A={a,b,d}; B={b,d,e,h}; U={a,b,c,d,e,f,g,h}.

j) A={2,4,6,8}; B={3,6,9}; C={1,2,3,…,10}.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте понятие множества, пустого и универсального множества. Перечислите основные операции над множествами.
2. Сформулируйте понятие декартового произведение множеств.
3. Перечислите способы задания множеств.

Практическое занятие № 6

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Теоретическая часть

***Определение*.** **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}; \quad |\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **аппликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора.

Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок АВ в соотношении λ/μ**, считая от А, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$

Определение. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Примеры:

1. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

Решение: $10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

2. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},$

Решение: $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

3.Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$

Решение: $15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} =$
$15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} +$

+ 12·36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.

4.Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,

Решение: $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$; $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

cosφ = $\frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}$; $\varphi = \arccos\frac{17}{50}$.

5. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение: $\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \Rightarrow m = 1$.

Задания к практическому занятию

1.Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

3.Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

4. При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

$\vec{a} = \{1; +2; 3\}, \vec{b} = \{-3; 0; -1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + \vec{b}.$

$\vec{a} = \{-2; 3; +1\}, \vec{b} = \{1; +1; -3\}, \vec{c} = \{1; -9; 1\}.$

$\vec{a} = \{1; 3; -1\}, \vec{b} = \{3; -2; 3\}.$

5. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC;

А) $A(\alpha; -2; 3), B(0; -1; 2), C(3; -4; 5).$

B) $A(-1;2;1), B(-1;3;-4), C(0;1;-2)$.

C) $A(1;-1;1), B(-1;2;-4), C(2;0;-6), D(-2;5;1)$.

Вопросы к практическому занятию

1. Какие векторы называются равными?
2. Сформулировать правило сложения любого числа векторов.
3. Какие векторы называются противоположными?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Назвать необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
6. Назвать понятие прямоугольного базиса. Разложение вектора по базису.
7. Назвать понятие координат вектора.
8. Как найти координаты вектора, заданного координатами точек – начала и конца этого вектора?

Практическое занятие № 7

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теоретическая часть

Определение. Событие - всё то, что может произойти или не произойти при данном испытании.

Определение. Событие - достоверно, если оно обязательно произойдёт при данном комплексе условий.

Определение. Событие - невозможно, если оно никогда не произойдёт при данном комплексе условий.

Определение. Событие - случайное, если оно может произойти или не произойти при данном комплексе условий.

Определение. События $A_1, A_2, .. A_n$ - совместные, если появление одного из событий при одиночном испытании не исключает появление других событий.

Определение. Два события - независимые, если появление одного из событий не влияет на вероятность появления другого.

Определение. Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий.

Определение. Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение. Разностью двух событий A и B называется событие, которое состоится, если событие A произойдёт, а событие B не произойдёт.

Определение. (классическое) Вероятность события равна отношению числа исходов, благоприятных появлению данного события, к общему числу всех равновозможных исходов, т.е.

$$P(A) = m\backslash n.$$

Примеры:

1. Из кубиков составлено слово «КНИГА». Ребёнок, не умеющий читать, смешал все кубики. Какова вероятность того, что он повторно сложит исходное слово.

Решение: Пусть A- событие, что слово «КНИГА» сложено, m = 1, n = 5.

Тогда $P(A)=1\backslash 5!= 1\backslash 120$.

2. В урне 5 синих, 6 красных, 10 зеленых и 15 желтых шаров. Один шар взяли. Найти вероятность того, что этот шар будет синий или желтый.

Решение: Пусть A- событие, что шар синий или желтый.

Тогда n = 36, m = 5+15 = 20. Значит, $P(A) = m\backslash n = 20\backslash 36 = 5\backslash 9$.

Задания к практическому занятию

1. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекается 1 деталь, которая оказалась

стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.

2. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

3. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета.

4. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

Вопросы к практическому занятию

1. Что называют опытом или испытанием?
2. Что называют событием?
3. Какое событие называют достоверным в данном испытании?
4. Какое событие называют невозможным в данном испытании?
5. Какое событие называют случайным в данном испытании?
6. Какие события называют совместными?
7. Что называется суммой, разностью, произведением событий?
8. Сформулировать и записать классическое определение вероятности.

Практическое занятие № 8

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теоретическая часть

Теорема 1(правило «+» вер.): Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий,

т.е. $P(A+B+C+\ldots+N) = P(A)+P(B)+\ldots+P(N)$.

Следствие: Сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т.е.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB).$$

Определение. Условная вероятность события B при условии события A - отношение вероятности совместного появления событий A и B к вероятности события A, т.е.

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Теорема 3(правило «*»вер.): Вероятность произведения 2 зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что 1 событие произошло

$$P(AB) = P(A)P(B/A),\ P(AB) = P(B)P(A/B).$$

Теорема 4: Вероятность произведения 2 независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема справедлива для любого числа n независимых событий.

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Пусть событие A появляется с одним из событий $B_1, B_2, ...B_n$, причём $P(B_1+ B_2+....+B_n) = P(B_1)+P(B_2)+....+ P(B_n)$.

Тогда $P(A) = P(AB_1+ AB_2+.. ..+AB_n) = P(AB_1)+P(AB_2)+....+ P(AB_n) = P(B_1)P(A\backslash B_1)+P(B_2)P(A\backslash B_2)+....+ P(B_n)P(A\backslash B_n)$. Т.о.,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) * P(A \backslash B_k)$$ - *формула полной вероятности,*

где B_k - гипотезы.

С помощью формулы Байеса можно определить, каким образом распределились гипотезы.

$$P(B_k \setminus A) = \frac{P(B_k) * P(A \setminus B_k)}{P(A)}$$ - *формула Байеса.*

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти некоторое событие А. Испытание повторяется n раз. При этом выполняются следующие условия:

1. Вероятность наступления события $P(A) = p$ в каждом испытании одна и та же.

2. Результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Такая последовательность испытаний называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*.

Теорема 5. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A наступит m раз в n независимых испытаниях, равна

$P(m,n) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1-p$ – формула Бернулли.

Отметим, что при большом числе испытаний формулу Бернулли применять достаточно сложно. В этих случаях применяются т.н. асимптотические формулы, самой простой из которых является формула Пуассона.

Теорема 6. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \to 0$) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n \to \infty$), причём произведение np стремиться к постоянному числу λ, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет равенству:

$$P(m,n) \approx P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$ - формула Пуассона.

Локальная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P(m,n)$ того, что событие A произойдёт m раз в n независимых испытаниях при достаточно большом числе n, равна:

$$P(m,n) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции $\varphi(x)$ (табл.1).

Если в задаче требуется найти вероятность, принадлежащую некоторому интервалу, то используется следующая теорема.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа: Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, число m наступления события A в n независимых испытаниях заключено в пределах от a до b (включительно), при достаточно большом числе n равна:

$$P_n(a \le m \le b) = \frac{1}{2}(\Phi(x_2)-\Phi(x_1)),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и $x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}$.

Для упрощения расчётов по последней формуле составлена таблица значений функции $\Phi(x)$ (табл.2).

Примеры:

1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение: Пусть A - выпало четное число очков; $B_к$ - выпало k очков (k = 1,2,3,4,5,6). Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6, т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6 несовместны, то $P(B_к)$ = 1/6 (k = 1,2, 3, 4, 5, 6).

$P(A) = P(B_2)+ P(B_4)+ P(B_6)$ =1/6+1/6+1/6 =3/6=1/2.

Замечание: Тот же результат получается и непосредственно по формуле P(A)=m/n=3/6=1/2.

2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение: Извлечение цветного шарика означает появление либо голубого, либо зеленого шарика. Вероятность извлечения голубого шарика (событие A): $P(A) = 15/40 = 3/8$. Вероятность извлечения зеленого шарика (событие B): $P(B) = 5/40 = 1/8$. Так как события A и B несовместны, то получим

$P(A+B) = P(A) + P(B) = 3/8+1/8=4/8=1/2$.

3. 2 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,7, второго -0,8. Найти вероятность поражения цели.

Решение: Пусть A - событие, что цель поражена.

A_1 -событие, что 1 стрелок попал в цель.

A_2 - событие, что 2 стрелок попал в цель.

Тогда, $P(A) = P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 0.7+0.8-0.56 = 0.94$.

4. 3 стрелка стреляют по цели. Вероятность попадания первого - 0,8, второго - 0,7, третьего - 0,9. Найти вероятность того, что в мишени три пробоины.

Решение: A - событие, что в мишени три пробоины.

A_1 -событие, что 1 стрелок попал в цель.

A_2 - событие, что 2 стрелок попал в цель.

A_3 - событие, что 3 стрелок попал в цель.

Так как события A_1, A_2, A_3 - независимые, то

$P(A) = P(A_1*A_2*A_3) = P(A_1) *P(A_2) * P(A_3) = 0.7*0.8*0.9 = 0.504$.

5. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

Решение: Пусть A_1 - "первый шар голубой", A_2 -"второй, шар голубой", A_3 - "третий шар голубой", A - "все 3 шара голубые", тогда $A = A_1 A_2 A_3$.

$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)$.

Т.к. $P(A_1) = 6/14$, $P(A_2/A_1) =5/13$, $P(A_3 / A_1 A_2)= 4/12$, то

$P(A_1 A_2 A_3) = 6/14*5/13*4/12 = 5/91$.

6. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок в течении часа потребует внимания рабочего равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станке независимы, найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего:

а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере один станок.

Решение: Обозначим через A_1 , A_2 , A_3, A_4 события, состоящие в том, что в течение часа потребуют внимания рабочего соответственно первый, второй, третий, четвертый станки. По теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность того, что в течение часа все станки потребуют внимания рабочего, т.е. произойдут события A_1 , A_2 , A_3, и A_4 выразится формулой $P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}1296$.

Вероятность того, что в течение часа станок (любой) не потребует внимания рабочего, найдем по правилу вычисления вероятности противоположного события: $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = 1-0{,}6 = 0{,}4$.

Следовательно, вероятность события B, состоящего в том, что ни один станок в течение часа не потребует внимания рабочего, т.е. произойдут события и $\bar{A}_1$, и $\bar{A}_2$, и $\bar{A}_3$, и $\bar{A}_4$ также выражается формулой

$P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}0256$.

Событие, состоящее в том, что в течение часа по крайней мере один из четырех станков потребует внимания рабочего, и событие B являются противоположными. Поскольку $P(B) = 0{,}0256$, то $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

7. Пусть имеется три урны с шарами: 1- 5 белых, 3 красных; 2 - 3 белых, 5 красных; 3 - 4 белых, 4 красных. Из одной урны наугад вытащили 1 шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение: A - событие, что шар белый. B_1 - гипотеза, что выбрана 1 урна. B_2 - гипотеза, что выбрана 2 урна. B_3 - гипотеза, что выбрана 3 урна.

$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 1$

По формуле полной вероятности получим:

$P(A) = P(B_1)P(A\backslash B_1)+P(B_2)P(A\backslash B_2)+ P(B_3)P(A\backslash B_3)$.

$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1\backslash 3$

$P(A\backslash B_1) = 5/8$, $P(A\backslash B_2) = 3/8$, $P(A\backslash B_3) = 4/8$.

$P(A) = 1\backslash 3*(5/8 + 3/8 +4/8) = 1\backslash 2$.

Тогда, по формуле Байеса найдём распределение гипотез:

$$P(B_1\backslash A) = \frac{1/3*5/8}{1/2} = \frac{5*2}{3*8} = 5/12,$$

$$P(B_2\backslash A) = \frac{1/3*3/8}{1/2} = \frac{3*2}{3*8} = 3/12,$$

$$P(B_3\backslash A) = \frac{1/3*4/8}{1/2} = \frac{4*2}{3*8} = 1/3 = 4/12.$$

8.В некоторой местности на каждых 100 семей приходится 80 автомобилей. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют автомобили.

Решение: Вероятность того, что семья имеет автомобиль, равна p = 80/100 = 0,8. Т.к. n = 100 достаточно велико, то по теореме имеем:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{300-400*0,8}{\sqrt{400*0,8*0,2}} = -2,5.$$

Тогда $P(300,400) = \frac{\varphi(-2.5)=\varphi(2.5)}{\sqrt{400*0.8*0.2}} = \frac{\varphi(2.5)}{\sqrt{64}} = \frac{0.0175}{8} = 0.0022$ (прил.1).

9. Применить интегральную теорему для предыдущей задачи в предположении, что от 300 до 360 семей из 400 имеют автомобили.

$x_1 = \frac{300-400*0,8}{\sqrt{400*0,8*0,2}} = -2,5$, $x_2 = \frac{360-400*0,8}{\sqrt{400*0,8*0,2}} = 5$. Тогда

$P_{400}(300 \le m \le 360) = \frac{1}{2}(\Phi(5)-\Phi(-2,5)) = \frac{1}{2}(\Phi(5)+\Phi(2,5)) = \frac{1}{2}(1+0,9876) =$ 0,9938 (прил.2).

Задания к практическому занятию

1.В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого-0,1,второго-0,15, третьего-0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

2.Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

3. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

4.Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого -0.7, второго-0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

5.Отдел технического контроля проверяет на стандартность по двум пара-метрам серию изделий. Было установлено, что у 8 из 25 изделий не выдержан только первый параметр, у 6 изделий -только второй, а у 3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берется одно из изделий. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

6.От здания аэровокзала к трапам самолётов отправились два автобуса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса к трапам равна 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы один из автобусов прибудет вовремя.

Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух событий.
2. Как определяется независимость двух событий?
3. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

4. Сформулируйте теорему о вероятности произведения n событий?

5. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?

6. Записать формулу полной вероятности, формулу Байеса.

7. Записать и пояснить формулу Пуассона. В каких случаях она применима?

8. Сформулировать и записать локальную теорему Муавра-Лапласа.

9. Сформулировать и записать интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Приложение 1

Функция Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$	**x**	$\varphi(x)$
0,00	0,398942	0,52	0,348493	1,04	0,232297	1,56	0,118157	2,08	0,045861
0,02	0,398862	0,54	0,344818	1,06	0,227470	1,58	0,114505	2,10	0,043984
0,04	0,398623	0,56	0,341046	1,08	0,222653	1,60	0,110921	2,12	0,042166
0,06	0,398225	0,58	0,337180	1,10	0,217852	1,62	0,107406	2,14	0,040408
0,08	0,397668	0,60	0,333225	1,12	0,213069	1,64	0,103961	2,16	0,038707
0,10	0,396953	0,62	0,329184	1,14	0,208308	1,66	0,100586	2,18	0,037063
0,12	0,396080	0,64	0,325062	1,16	0,203571	1,68	0,097282	2,20	0,035475
0,14	0,395052	0,66	0,320864	1,18	0,198863	1,70	0,094049	2,22	0,033941
0,16	0,393868	0,68	0,316593	1,20	0,194186	1,72	0,090887	2,24	0,032460
0,18	0,392531	0,70	0,312254	1,22	0,189543	1,74	0,087796	2,26	0,031032
0,20	0,391043	0,72	0,307851	1,24	0,184937	1,76	0,084776	2,28	0,029655
0,22	0,389404	0,74	0,303389	1,26	0,180371	1,78	0,081828	2,30	0,028327
0,24	0,387617	0,76	0,298872	1,28	0,175847	1,80	0,078950	2,32	0,027048
0,26	0,385683	0,78	0,294305	1,30	0,171369	1,82	0,076143	2,34	0,025817
0,28	0,383606	0,80	0,289692	1,32	0,166937	1,84	0,073407	2,36	0,024631
0,30	0,381388	0,82	0,285036	1,34	0,162555	1,86	0,070740	2,38	0,023491
0,32	0,379031	0,84	0,280344	1,36	0,158225	1,88	0,068144	2,40	0,022395
0,34	0,376537	0,86	0,275618	1,38	0,153948	1,90	0,065616	2,42	0,021341
0,36	0,373911	0,88	0,270864	1,40	0,149727	1,92	0,063157	2,44	0,020328
0,38	0,371154	0,90	0,266085	1,42	0,145564	1,94	0,060765	2,46	0,019356
0,40	0,368270	0,92	0,261286	1,44	0,141460	1,96	0,058441	2,48	0,018423
0,42	0,365263	0,94	0,256471	1,46	0,137417	1,98	0,056183	2,50	0,017528
0,44	0,362135	0,96	0,251644	1,48	0,133435	2,00	0,053991	2,52	0,016670
0,46	0,358890	0,98	0,246809	1,50	0,129518	2,02	0,051864	2,54	0,015848
0,48	0,355533	1,00	0,241971	1,52	0,125665	2,04	0,049800	2,56	0,015060
0,50	0,352065	1,02	0,237132	1,54	0,121878	2,06	0,047800	2,58	0,014305

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,60	0,013583	3,12	0,003070	3,64	0,000529	4,16	0,000070	4,68	0,000007
2,62	0,012892	3,14	0,002884	3,66	0,000492	4,18	0,000064	4,70	0,000006
2,64	0,012232	3,16	0,002707	3,68	0,000457	4,20	0,000059	4,72	0,000006
2,66	0,011600	3,18	0,002541	3,70	0,000425	4,22	0,000054	4,74	0,000005
2,68	0,010997	3,20	0,002384	3,72	0,000394	4,24	0,000050	4,76	0,000005
2,70	0,010421	3,22	0,002236	3,74	0,000366	4,26	0,000046	4,78	0,000004
2,72	0,009871	3,24	0,002096	3,76	0,000340	4,28	0,000042	4,80	0,000004
2,74	0,009347	3,26	0,001964	3,78	0,000315	4,30	0,000039	4,82	0,000004
2,76	0,008846	3,28	0,001840	3,80	0,000292	4,32	0,000035	4,84	0,000003
2,78	0,008370	3,30	0,001723	3,82	0,000271	4,34	0,000032	4,86	0,000003
2,80	0,007915	3,32	0,001612	3,84	0,000251	4,36	0,000030	4,88	0,000003
2,82	0,007483	3,34	0,001508	3,86	0,000232	4,38	0,000027	4,90	0,000002
2,84	0,007071	3,36	0,001411	3,88	0,000215	4,40	0,000025	4,92	0,000002
2,86	0,006679	3,38	0,001319	3,90	0,000199	4,42	0,000023	4,94	0,000002
2,88	0,006307	3,40	0,001232	3,92	0,000184	4,44	0,000021	4,96	0,000002
2,90	0,005953	3,42	0,001151	3,94	0,000170	4,46	0,000019	4,98	0,000002
2,92	0,005616	3,44	0,001075	3,96	0,000157	4,48	0,000017	5,00	0,000001
2,94	0,005296	3,46	0,001003	3,98	0,000145	4,50	0,000016	5,02	0,000001
2,96	0,004993	3,48	0,000936	4,00	0,000134	4,52	0,000015	5,04	0,000001
2,98	0,004705	3,50	0,000873	4,02	0,000124	4,54	0,000013	5,06	0,000001
3,00	0,004432	3,52	0,000814	4,04	0,000114	4,56	0,000012	5,08	0,000001
3,02	0,004173	3,54	0,000758	4,06	0,000105	4,58	0,000011	5,10	0,000001
3,04	0,003928	3,56	0,000706	4,08	0,000097	4,60	0,000010	5,12	0,000001
3,06	0,003695	3,58	0,000657	4,10	0,000089	4,62	0,000009	5,14	0,000001
3,08	0,003475	3,60	0,000612	4,12	0,000082	4,64	0,000008	5,16	0,000001
3,10	0,003267	3,62	0,000569	4,14	0,000076	4,66	0,000008	5,18	0,000001

Приложение 2

Функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$
0,00	0,000000	0,52	0,198468	1,04	0,350830	1,56	0,440620	2,08	0,481237
0,02	0,007978	0,54	0,205402	1,06	0,355428	1,58	0,442947	2,10	0,482136
0,04	0,015953	0,56	0,212260	1,08	0,359929	1,60	0,445201	2,12	0,482997
0,06	0,023922	0,58	0,219043	1,10	0,364334	1,62	0,447384	2,14	0,483823
0,08	0,031881	0,60	0,225747	1,12	0,368643	1,64	0,449497	2,16	0,484614
0,10	0,039828	0,62	0,232371	1,14	0,372857	1,66	0,451543	2,18	0,485371
0,12	0,047758	0,64	0,238914	1,16	0,376976	1,68	0,453521	2,20	0,486097
0,14	0,055670	0,66	0,245373	1,18	0,381000	1,70	0,455435	2,22	0,486791
0,16	0,063559	0,68	0,251748	1,20	0,384930	1,72	0,457284	2,24	0,487455
0,18	0,071424	0,70	0,258036	1,22	0,388767	1,74	0,459071	2,26	0,488089
0,20	0,079260	0,72	0,264238	1,24	0,392512	1,76	0,460796	2,28	0,488696
0,22	0,087064	0,74	0,270350	1,26	0,396165	1,78	0,462462	2,30	0,489276
0,24	0,094835	0,76	0,276373	1,28	0,399727	1,80	0,464070	2,32	0,489830
0,26	0,102568	0,78	0,282305	1,30	0,403199	1,82	0,465621	2,34	0,490358
0,28	0,110261	0,80	0,288145	1,32	0,406582	1,84	0,467116	2,36	0,490863
0,30	0,117911	0,82	0,293892	1,34	0,409877	1,86	0,468557	2,38	0,491344
0,32	0,125516	0,84	0,299546	1,36	0,413085	1,88	0,469946	2,40	0,491802
0,34	0,133072	0,86	0,305106	1,38	0,416207	1,90	0,471284	2,42	0,492240
0,36	0,140576	0,88	0,310570	1,40	0,419243	1,92	0,472571	2,44	0,492656
0,38	0,148027	0,90	0,315940	1,42	0,422196	1,94	0,473810	2,46	0,493053
0,40	0,155422	0,92	0,321214	1,44	0,425066	1,96	0,475002	2,48	0,493431
0,42	0,162757	0,94	0,326391	1,46	0,427855	1,98	0,476148	2,50	0,493790
0,44	0,170031	0,96	0,331472	1,48	0,430563	2,00	0,477250	2,52	0,494132
0,46	0,177242	0,98	0,336457	1,50	0,433193	2,02	0,478308	2,54	0,494457
0,48	0,184386	1,00	0,341345	1,52	0,435744	2,04	0,479325	2,56	0,494766
0,50	0,191462	1,02	0,346136	1,54	0,438220	2,06	0,480301	2,58	0,495060

z	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$	**z**	$\Phi(z)$
2,60	0,495339	3,12	0,499096	3,64	0,499864	4,16	0,499984	4,68	0,499999
2,62	0,495603	3,14	0,499155	3,66	0,499874	4,18	0,499985	4,70	0,499999
2,64	0,495855	3,16	0,499211	3,68	0,499883	4,20	0,499987	4,72	0,499999
2,66	0,496093	3,18	0,499264	3,70	0,499892	4,22	0,499988	4,74	0,499999
2,68	0,496319	3,20	0,499313	3,72	0,499900	4,24	0,499989	4,76	0,499999
2,70	0,496533	3,22	0,499359	3,74	0,499908	4,26	0,499990	4,78	0,499999
2,72	0,496736	3,24	0,499402	3,76	0,499915	4,28	0,499991	4,80	0,499999
2,74	0,496928	3,26	0,499443	3,78	0,499922	4,30	0,499991	4,82	0,499999
2,76	0,497110	3,28	0,499481	3,80	0,499928	4,32	0,499992	4,84	0,499999
2,78	0,497282	3,30	0,499517	3,82	0,499933	4,34	0,499993	4,86	0,499999
2,80	0,497445	3,32	0,499550	3,84	0,499938	4,36	0,499993	4,88	0,499999
2,82	0,497599	3,34	0,499581	3,86	0,499943	4,38	0,499994	4,90	0,500000
2,84	0,497744	3,36	0,499610	3,88	0,499948	4,40	0,499995	4,92	0,500000
2,86	0,497882	3,38	0,499638	3,90	0,499952	4,42	0,499995	4,94	0,500000
2,88	0,498012	3,40	0,499663	3,92	0,499956	4,44	0,499995	4,96	0,500000
2,90	0,498134	3,42	0,499687	3,94	0,499959	4,46	0,499996	4,98	0,500000
2,92	0,498250	3,44	0,499709	3,96	0,499963	4,48	0,499996	5,00	0,500000
2,94	0,498359	3,46	0,499730	3,98	0,499966	4,50	0,499997	5,02	0,500000
2,96	0,498462	3,48	0,499749	4,00	0,499968	4,52	0,499997	5,04	0,500000
2,98	0,498559	3,50	0,499767	4,02	0,499971	4,54	0,499997	5,06	0,500000
3,00	0,498650	3,52	0,499784	4,04	0,499973	4,56	0,499997	5,08	0,500000
3,02	0,498736	3,54	0,499800	4,06	0,499975	4,58	0,499998	5,10	0,500000
3,04	0,498817	3,56	0,499815	4,08	0,499977	4,60	0,499998	5,12	0,500000
3,06	0,498893	3,58	0,499828	4,10	0,499979	4,62	0,499998	5,14	0,500000
3,08	0,498965	3,60	0,499841	4,12	0,499981	4,64	0,499998	5,16	0,500000
3,10	0,499032	3,62	0,499853	4,14	0,499983	4,66	0,499998	5,18	0,500000

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. -М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2021. http://znanium.com/catalog/product/1178146

Список дополнительной литературы

1. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2017.
http://znanium.com/catalog/product/760157