ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по учебной дисциплине **«Математика»**
для обучающихся по специальности
10.02.05 «Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем»

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем и программой дисциплины «Математика».

Составитель: Ерёмина Е.Р.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26» мая 2022 г.

Введение

Изучение математики играет решающую роль в системе профессионального образования, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой.

В соответствии с ФГОС специальности «Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем» средствами дисциплины "Математика" и других дисциплин должны быть сформированы общие и профессиональные компетенции.

Общие компетенции означают совокупность социально – личностных качеств выпускника, обеспечивающих осуществление деятельности на определенном квалификационном уровне. Под профессиональными компетенциями понимается способность действовать на основе имеющихся умений, знаний и практического опыта в определенной профессиональной деятельности.

Выпускники специальности «Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем» должны обладать следующими компетенциями:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ПК 2.4. Осуществлять обработку, передачу и хранение информации ограниченного доступа.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 3. Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих.

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 13. Демонстрирующий готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения в профессиональной деятельности.

Содержание

Практическая работа № 1. Выполнение операций над матрицами. Определители. Вычисление обратных матриц.

Основные определения.

Определение. Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется квадратной.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется **единичной матрицей.**

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется симметрической.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - **симметрическая матрица**

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной матрицей.**

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

C = A + B = B + A.

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

α (A+B) $=\alpha$A $\pm$ αB

A($\alpha\pm\beta$) = αA $\pm$ βA

Пример. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

2A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, 2A + B = $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

A·B = C;

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\ .}$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Свойства операции умножения матриц.

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$,

где O – **нулевая матрица**.

2) Операция перемножения матриц ассоциативна, т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$(AB)C=A(BC)$.

3) Операция умножения матриц дистрибутивна по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$.

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Если определено произведение AB , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$(AB)^T = B^T A^T$, где

индексом T обозначается **транспонированная матрица.**

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Понятие det (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

Определение. Матрицу В называют **транспонированной матрицей А**, а переход от А к В транспонированием, если элементы каждой строки матрицы А записать в том же порядке в столбцы матрицы В.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

при условии, что определено произведение матриц АВС.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители (детерминанты) матрицы.

Определение. Определителем квадратной матрицы A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} \text{ , где}}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n.}$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число M_{1k} называется дополнительным минором элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$\det A = \det A^T$;

Свойство 2.

$\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2\cdot1-1\cdot3)-2(0\cdot1-3\cdot3)+(0\cdot1+3\cdot2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 – – 152 = -26.

Задания к практическому занятию:

1.Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\quad б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};\quad в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix};\quad г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix};\quad д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;\quad б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0;\quad в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Решить неравенства:

$$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;\quad б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;\quad в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \ge 5;\quad г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \le 14.$$

4. Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix};\quad б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix};\quad в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix};\quad г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};\quad ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};\quad и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\quad к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};\quad м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};\quad н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

5 Даны матрицы $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

6. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times4}\cdot B_{4\times5}=C_{m\times n}$; б) $A_{2\times3}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times6}$; в) $A_{2\times m}\cdot B_{n\times3}=C_{2\times3}$.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & -6\end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$; д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1}; з) B^{-1}.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1}; ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

9. Найти:

а) $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$.

10. Найти значение многочлена $f(A)$, если:

а) $f(X)=3X^2-4$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $f(X)=X^2-3X+1$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $f(X)=3X^2-2X+5$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы.

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элемнтам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5)транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются **элементарными преобразованиями.**

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы:

Определение.
Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется минором матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным. Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию: XA = AX = E, где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица А, то матрица Х называется обратной к матрице А и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \ i=(1,n), \ j=(1,n),$$

$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$

$e_{ij} = 1, \qquad i = j$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы Х.

Пример. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$\boxed{x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},}$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

Пример. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

det A = 4 - 6 = -2.

M_{11}=4; M_{12}= 3; M_{21}= 2; M_{22}=1

x_{11}= -2; x_{12}= 1; x_{21}= 3/2; x_{22}= -1/2

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обраных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица А = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Базисный минор матрицы.

Ранг матрицы.

Как было сказано , минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

Определение. В матрице порядка m×n минор порядка r называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются базисными.

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется рангом матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются эквивалентными.

Надо отметить, что равные матрицы и эвивалентные матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \text{RgA} = 2.$$

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \ \text{Rg} = 2.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема. *В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Задания к практическому занятию:

1. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Практическая работа №2. Система n линейных уравнений с n переменными. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Метод Крамера. (Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = \Delta_i/\Delta$, *где*

$\Delta = \det A$, *а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца* i *столбцом свободных членов* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\boxed{x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;}$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$ *Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.*

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$$

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 13y + 7z = 14 \\ 7y = 0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ y + \frac{7}{13}z = \frac{14}{13} \\ -\frac{49}{13}z = -\frac{98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z = -\frac{98}{13} : \left(-\frac{49}{13}\right) = 2$$

$$y = \frac{14}{13} - \frac{7}{13} \cdot 2 = 0$$

$$x = -3 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 1$$

Таким образом, $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2.$

Определение. Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех х.

Задания к практическому занятию:

Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 74x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 5, \\ x_1 \qquad + 3x_3 = 16, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 \qquad = -5. \end{cases}$

3. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17. \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

Практическая работа № 3. Выполнение действий над векторами. Решение простейших задач аналитической геометрии на плоскости.

Определение. **Вектором** называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. **Длиной (модулем)** вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Определение. **Линейными операциями** над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\quad |\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если α > 0.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если α < 0.

Свойства векторов.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Определение. Если $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

равные векторы имеют одинаковые координаты,

при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda\vec{a} = \lambda(\alpha\vec{e_1} + \beta\,\vec{e_2} + \gamma\,\vec{e_3}) = (\lambda\alpha)\vec{e_1} + (\lambda\beta)\,\vec{e_2} + (\lambda\gamma)\,\vec{e_3}\,.$$

при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha_3 \overrightarrow{e_3}; \qquad \vec{b} = \beta_1 \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \overrightarrow{e_2} + \beta_3 \overrightarrow{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{Б} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1},..., \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1. Если среди векторов $\overrightarrow{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение. **Декартовой системой координат** в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **апликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$(2; 1; -1) и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2-3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2-2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от A, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$x = (x_1 + x_2)/2$; $y = (y_1 + y_2)/2$; $z = (z_1 + z_2)/2$.

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат

$\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$$

Свойства скалярного произведения:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\quad \vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\hat{\ }\vec{b} = \pi/3$.

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2} +$

$+ 12\cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,

$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};$ $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

cosφ = $\dfrac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \dfrac{17}{50};$ $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}.$

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a}$= (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1$.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 3, \quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \dfrac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) =$
$10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$
$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10$

Задание к практическому занятию:

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Задание 4: При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

$\vec{a} = \{1;+2;3\}, \vec{b} = \{-3;0;-1\}, \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{c}_2 = 3\vec{a} + \vec{b}.$

$\vec{a} = \{-2;3;+1\}, \vec{b} = \{1;+1;-3\}, \vec{c} = \{1;-9;1\}.$

$\vec{a} = \{1;3;-1\}, \vec{b} = \{3;-2;3\}.$

Задание 5: Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC;

A) $A(\alpha;-2;3), B(0;-1;2), C(3;-4;5)$.

B) $A(-1;2;1), B(-1;3;-4), C(0;1;-2)$.

C) $A(1;-1;1), B(-1;2;-4), C(2;0;-6), D(-2;5;1)$.

Практическая работа № 4. Составление уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой- либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

Ax + By + C = 0,

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

C = 0, А ≠ 0, В ≠ 0 – прямая проходит через начало координат

А = 0, В ≠ 0, С ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох

В = 0, А ≠ 0, С ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу

В = С = 0, А ≠ 0 – прямая совпадает с осью Оу

А = С = 0, В ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.

Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$
$$y - 2 = x - 1$$
$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$\boxed{y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; *т.е.* $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

1·A + (-1)·B = 0, т.е. A = B.

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при х = 1, у = 2 получаем С/A = -3, т.е. искомое уравнение:

х + у - 3 = 0

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где

$$\boxed{a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, а = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$$

нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu \cdot C < 0$.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках: $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$

нормальное уравнение прямой:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$ $\qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0;$ $\qquad$ cosφ = 12/13; sinφ = -5/13; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$ $\qquad$ a = b = 1; $\quad$ ab/2 = 8; $\qquad$ a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0};$ $\qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3};$ $\qquad 3x - 2y = 0.$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку

перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)}$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется как*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$, то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$
$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

Задания к практическому занятию:

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1;2), B(-1;3),C(-4;-2). Не находя координаты вершины D, найти:

уравнение стороны AD;

уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;

длину высоты BK;

уравнение диагонали BD;

тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки A(1;2;3), B(-1;3;5), C(2;0;4), D(3;-1;2). Найти:

1) общее уравнение плоскости ABC;
2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
3) расстояние от точки D до плоскости ABC;
4) канонические уравнения прямой AB;
5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
6) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

Практическая работа № 5. Составление и исследование уравнений окружности и эллипса, гиперболы и параболы.

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.}$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.

$a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

$y^2 – a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

$y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

$y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

$$\boxed{x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2}$$

В окружности

центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде: $2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0$.

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$x^2 + y^2 – 4x + 2{,}5y – 2 = 0$

$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$

$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$

$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$

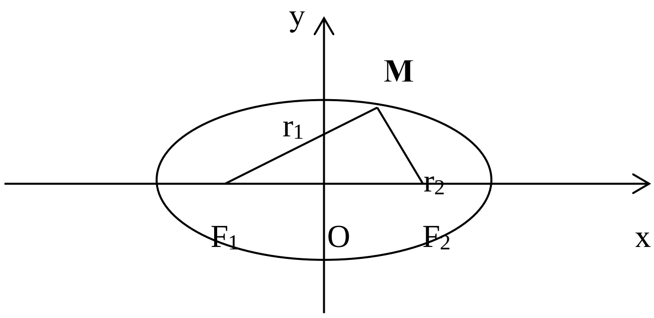
Отсюда находим $O(2; -5/4)$; $R = 11/4$.

Эллипс.

Определение. **Эллипсом** называется кривая, заданная уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Определение. **Фокусами** называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:* $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство: В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то , приравнивая, получаем:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$e = c/a$.

Т.к. $c < a$, то $e < 1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $\boxed{k^2 = 1 - e^2}$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $e = 0$, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то точка находится вне эллипса.

Теорема. *Для произвольной точки M(x, y), принадлежащей эллипсу верны соотношения*:

$$\boxed{r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.}$$

Доказательство. Выше было показано, что $r_1 + r_2 = 2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y} = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. Теорема доказана.

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$$\boxed{x = a/e; \quad x = -a/e.}$$

Теорема. *Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету е.*

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.

Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Расстояние между фокусами:

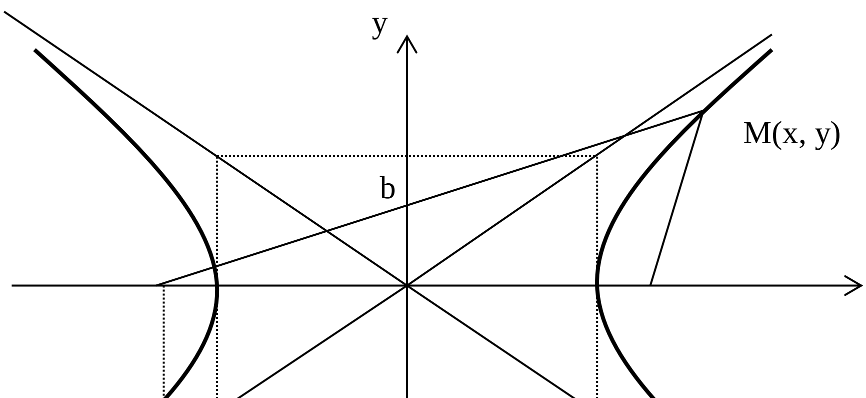
$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гипербола.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



r_1

r_2

x

F_1 a F_2

c

По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x.}$

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

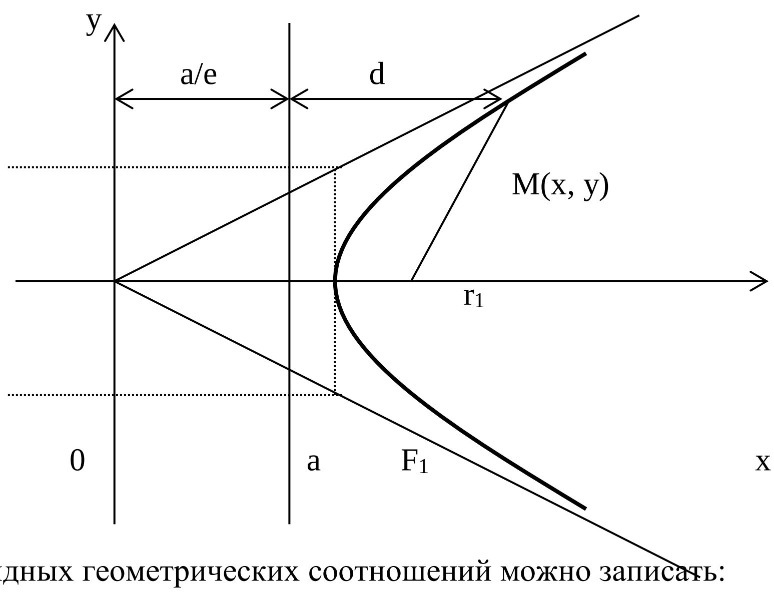
$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если а = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $\boxed{x = \pm\frac{a}{e}.}$

Теорема. *Если r – расстояние от произвольной точки М гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

Доказательство. Изобразим схематично гиперболу.



$OF_1 = c$

Из очевидных геометрических соотношений можно записать:

a/e + d = x, следовательно d = x – a/e.

$(x - c)^2 + y^2 = r^2$

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 - a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2 =$$

$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

$$r = \frac{c}{a}x - a$$

Тогда т.к. c/a = e, то r = ex – a.

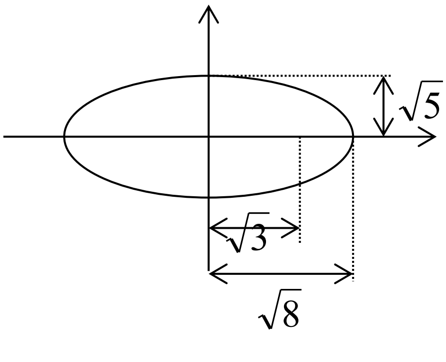
Итого: $\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

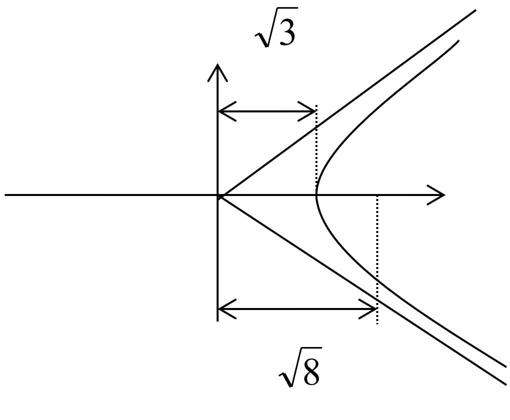
Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. Теорема доказана.

Пример. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Пример. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;

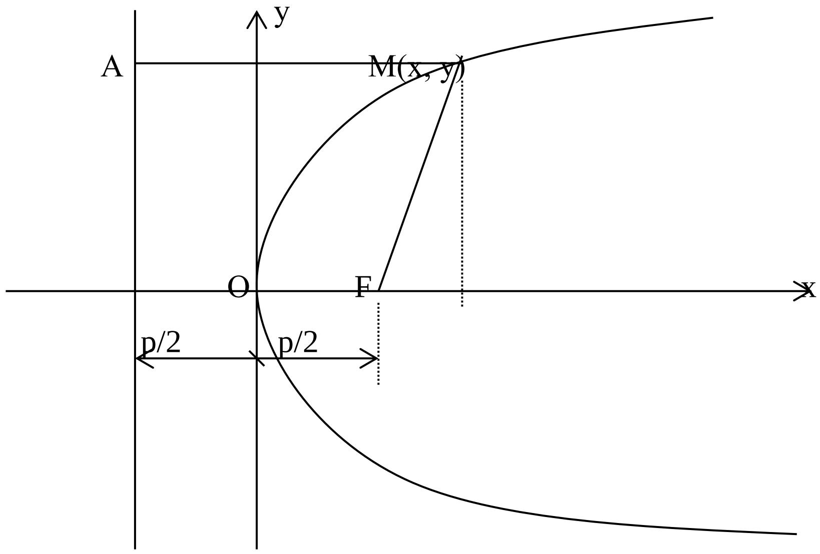
$b^2 = 16 – 4 = 12.$

Итого: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$MF^2 = y^2 + (x – p/2)^2$

$(x + p/2)^2 = y^2 + (x – p/2)^2$

$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 – xp + p^2/4$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.

r = x + p/2 = 4; следовательно:

x = 2; $y^2 = 16$; y = ±4. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Задания к практическому занятию :

Задача 1. Уравнение второго порядка $2x^2+9y^2-4x+6y+2=0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую, определяемую этим уравнением.

Задача 2. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = 3\varphi$.

Требуется:

найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;

построить полученные точки;

построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);

составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 3. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

1) $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$;

2) $\begin{cases} y \le \sqrt{9-x^2} \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$

Практическая работа № 6. Операции над множествами.

Начальные понятия теории множеств

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия **множества**. Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Объекты, которые образуют множество, будем называть **элементами** множества и обозначать малыми буквами латинского алфавита.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{ a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент *a* и множество, состоящее из единственного элемента *a*. **Пример.** Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента *A*.

Если элемент *a* принадлежит множеству *A*, это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент *a* не принадлежит множеству *A*, то записывают так: $a \notin A$. Если какое-либо множество *A* включено в другое множество B, то используется запись $A \subset B$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример. 1. Множество корней уравнения $sin\ x = 2$ является пустым.

2. Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда $a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Множество считается заданным, если каким-либо образом указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств (при этом в обоих случаях при задании множеств используют фигурные скобки).

Примеры задания множеств. 1. Множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде: $M = \{0, 1, ..., 9\}$ или $M = \{x \mid x – \text{целое}, \quad 0 \le x \le 9\}$, где справа от вертикальной черты указывают свойство элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде: $M = \{x \mid x$ – чётное число$\}$.

2. Если R – множество точек числовой прямой, то R^n – множество точек n-мерного арифметического пространства; в частности, R^2 – множество точек плоскости, R^3 – множество точек пространства трех измерений.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном этого множества и обозначать $B(M)$, а множество M будем называть универсальным (универсумом или пространством) и обозначать 1 или U. Множество M (универсальное) не должно быть ýже объединения рассматриваемых множеств, т. е. оно должно быть равно или содержать объединение рассматриваемых множеств.

Пример. Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $B(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$B(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Мы видим, что множество $B(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Приведем стандартные обозначения для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

N – множество натуральных чисел (иногда его начинают с 1, иногда с 0; обычно это оговаривается);

P – простые числа;

Z – множество целых чисел (положительные, отрицательные и 0);

R – множество действительных чисел.

Очевидное соотношение: $N \subseteq Z \subseteq R$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих на примере пространства или множества U, определив в нём 4 операции над множествами A и B: объединение, пересечение, разность, дополнение.

1.2. Операции над множествами

Объединением A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A$ и / или $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cup B$ – множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$. Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cap B$ – множество чисел, которые делятся и на 2, и на 3: $A \cup B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Разностью (относительным дополнением) множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример. 1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример.1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 5\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Дополнением $\overline{M}$ множества M является множество

$\overline{M} = \{m_i \mid m_i \notin M\}$.

Пример. Заданы множества $A = \{1, 2, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 6\}$ на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Выполнить операции $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение. В результате выполнения заданных операций получим следующие множества: $\overline{A} = \{3, 7\}$; $\overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

Для конечных множеств существует понятие: мощность множества A – число его элементов. Обозначают мощность множества $|A|$.

Пример. $A = \{1, 2, 5, 6\}$, тогда мощность множества $|A| = n(A) = 4$; $|\varnothing| = 0$; $|\{\varnothing\}| = 1$.

Также справедливы следующие формулы: для любых множеств A и $B \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то есть учитываются общие для обоих множеств элементы.

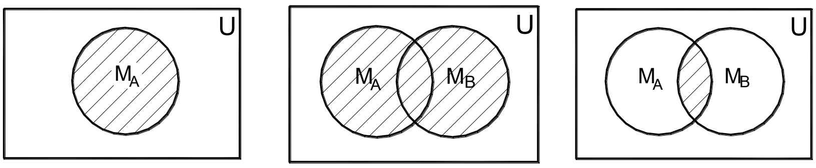
Пример. $A = \{1, 2, 3\}$ $|A| = 3$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|B| = 5$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|A \cup B| = 5$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ $|A \cap B| = 3$, то есть получим равенство: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $5 = 3 + 5 - 3$.

Для конечного множества M мощность его булеана $|B(M)|$ равна $2^{|M|}$.

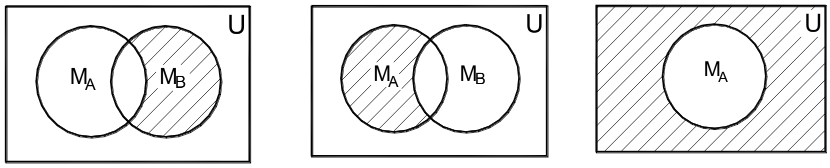
Применение диаграмм Эйлера-Венна при решении практических задач

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используются диаграммы Эйлера-Венна. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга (рис. 1).

С помощью диаграмм Эйлера-Венна удобно иллюстрировать операции над множествами. Результирующее множество каждой операции выделено штриховкой.



M_A $M_A \cup M_B$ $M_A \cap M_B$



$M_B \backslash M_A$ $M_A \backslash M_B$ $\overline{M}_A$

Рис. 1. Представление операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Пример. Рассмотрим операцию дополнения множества, являющегося пересечением множеств M_A и M_B. Необходимо доказать, что её результат совпадает с объединением дополнений этих множеств:

Решение. $M = \overline{M_A \cap M_B} = \overline{M}_A \cup \overline{M}_B$.

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 2).

Рис. 2

Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества (основные тождества алгебры множеств):

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$).
1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$).
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$).
2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$).
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$).
3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$).
4. $A \cup \varnothing = A$ (свойство нуля).
4′. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
5. $A \cup \overline{A} = U$ (свойство дополнения).
5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
6. $A \cup A = A$.
6′. $A \cap A = A$.
7. $A \cup U = U$ (свойство единицы).
7′. $A \cap U = A$.
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана).
8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана).
9. $A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения).
9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).
10. $\overline{\overline{A}} = A$ (инволюция).
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Примеры. 1. Рассмотрим предположение о том, что произвольные множества A и B попарно эквивалентны: 1) $A \subset B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

Решение. Докажем, что из первого предположения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subset A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subset A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, т. к. $A \subset B$ и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предположения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предположения следует первое. Так как $A \subset A \cup B$, а по условию третьего предположения $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

Задания к практическому занятию:

1. Записать множество М целых чисел x, которые делятся на три и находятся в интервале $3 \le x \le 15$. Записать двумя способами.
2. Записать множество А целых чисел x, которые делятся на 2 и на 3 и находятся в интервале $20 \le x \le 25$. Записать двумя способами.

3. Принадлежит ли x множеству М, если:

а) $M = \{2, 6, 8, \ldots, 50\}$; $x = 35$;

б) $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots, 100\}$; $x = 23$;

в) $M = \{-2, 2, -4, 4, \ldots, 120\}$; $x = -30$.

4. Записать приведенные множества с указанием свойств их элементов.

5. Доказать неравенство: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

6. Какие из следующих выражений являются истинными и какие ложными:

а) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; б) $1 \in \{\{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

6. Привести примеры таких множеств A, B, C, чтобы были истинными следующие высказывания:

а) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \notin C$;

б) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \in C$.

7. Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны:

а) $\{x \in R | \, x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

б) $\{x \in N | \, x^2 - 5x + 4 > 0\}$;

в) $\{x \in N | \, x^2 / 24\}$.

8. Равны ли множества:

а) $\{x \in R | \, x^2 - 2x - 2 = 0\}$ и $\{x \in Q | \, x^2 - 2x - 2 = 0\}$;

б) $\{x \in Z | \, 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in Z | \, 4/x \wedge 15/x\}\{x \in Z | \, 20/x \wedge 30/x\}$.

9. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $\{x \in R | \, x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in R | \, x^2 + 1 = 0\}$;

в) множество всех корней уравнения $x^2 + 6x + 9 = 0$.

10. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств:

а) $\{x| \ x \subseteq \{1\}\}$; в) $\{x| \ x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{x| \ x \subseteq \{1, 2\}\}$; г) $\{x| \ x \subseteq \varnothing\}$.

Практическая работа № 7. Вычисление пределов функций.

Теорема 1: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Теорема 2: Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема 3: Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 4: Предел отношений двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Приводим некоторые приёмы вычисления пределов, излагая их на конкретных примерах. 1) Предел многочлена. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$.

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x\to 2}(5x^3) + \lim_{x\to 2}(2x^2) - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 7 = 5\lim_{x\to 2} x^3 + 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + 7 =$$
$$= 5(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2(\lim_{x\to 2} x)^2 - 3\lim_{x\to 2} x + 7 = 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 49.$$

Таким образом, для вычисления предела многочлена $f(x)$ при $x \to x_0$ достаточно вместо переменной x поставить значение x_0, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0).$$

2) Предел отношения двух многочленов, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где x_0 - число.

а) Если $g(x_0) \neq 0$, то можно применить теорему о пределе частного.

Вычислить пределы функций.

а) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

Решение. Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и $7x^5+2x+3$ являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x^2+1\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7x^5+2x+3\right)=\infty$.

Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности и использовании теоремы о пределе отношения двух функций выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7+\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{7+\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

Ответ. 0.

б) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$**.**

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Ответ. -9.

Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для вычисления данного предела подставим значение $x=-1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{(-1)^2+14\cdot(-1)-32}{(-1)^2-6\cdot(-1)+8}=\frac{-45}{15}=-3\cdot$$

Ответ. -3.

в) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

г) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim\limits_{A\to 0}\dfrac{\sin A}{A}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

Ответ. k

д) Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0\cdot\infty\}$ в этом случае, нужно произведение преобразовать в частное, то есть неопределенность $\{0\cdot\infty\}$ свести к неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\sin\frac{\pi x}{2}=1, при\, x=1\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix} y=x-1, \\ y\to 0, x=y+1\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin\frac{\pi}{2}y}.$$

Выделяем первый замечательный предел, то есть, умножаем числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. Получаем,

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

е) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2}{x+1}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2}.

ж) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\begin{bmatrix}y=x-2,\\ x=y+2, y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}(3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+3y)^{\frac{1\cdot 3}{y\cdot 3}}=e^3.$$

Ответ. e^3.

Найти $\lim\limits_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x=\frac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(3\cdot\frac{5}{2}-5\right)^{\frac{1}{5/2-2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}=\frac{25}{4}.$$

Ответ. $\frac{25}{4}$**.**

Задания к практическому занятию:

Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\sin 2x}{x(\pi+x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$.

2. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot ctg5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$.

Практическая работа № 8. Исследование функции на непрерывность.

Задана функция $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ и два значения аргумента $x_1 = 3, x_2 = 1$.

Требуется:

1. найти пределы функции при приближении к каждому из данных значений x слева и справа;
2. установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x;
3. сделать схематический чертеж.

Решение. Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0-0} 2^{\frac{1}{t}} = 0,$$

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0+0} 2^{\frac{1}{t}} = \infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый предел бесконечен. Следовательно, по определению $x_0 = 3$ точка разрыва второго рода.

Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x \to 1+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x_0 = 1$ точка непрерывности функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$.

Сделаем схематический чертеж.

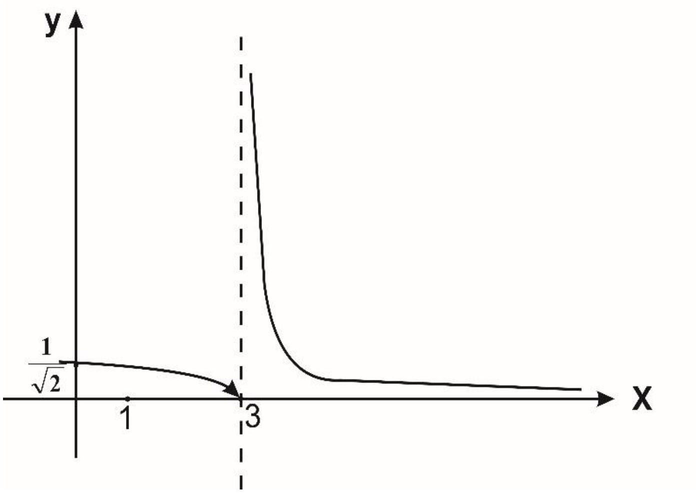


Рис. 1

2. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной.

Требуется:

1. **найти точки разрыва функции, если они существуют;**
2. **найти скачок функции в каждой точке разрыва;**
3. **сделать схематический чертеж.**

$$y = \begin{cases} x-1, \ x<0, \\ x^2-1, \ 0 \le x \le 1, \\ 2, \ x>1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1 = x-1$ непрерывна для $x<0$, функция $y_2 = x^2 - 1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3 = 2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1, \infty)$.

Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x=0$ и $\boldsymbol{x=1}$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x=0$.

$\lim\limits_{x \to 0-0} y = \lim\limits_{x \to 0-0} (x-1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+0} y = \lim\limits_{x \to 0+0} \left(x^2-1\right) = -1$, $y(0) = -1$. Таким образом, точка $\boldsymbol{x=0}$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x=1$.

$\lim\limits_{x \to 1-0} y = \lim\limits_{x \to 1-0} \left(x^2-1\right) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1+0} y = \lim\limits_{x \to 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 1-1 = 0$. Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x=1$ равен $d = \left| \lim\limits_{x \to 1+0} y - \lim\limits_{x \to 1-0} y \right| = |2-0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

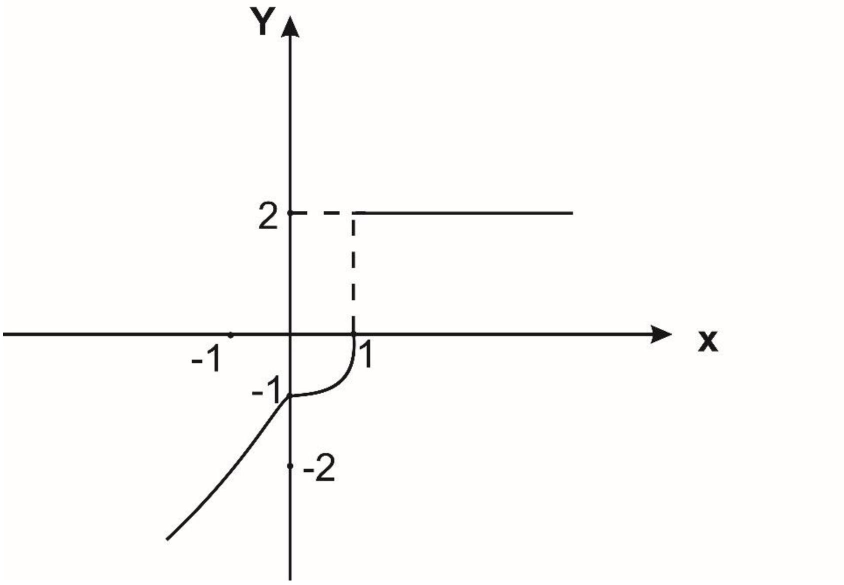


Рис. 2

Задания к практическому занятию:

Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y = e^{\frac{1}{x-7}}$, $x_1 = 7$, $x_2 = 0$.

Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} x+4, & \text{если} \quad x < -1, \\ x^2+2, & \text{если} \quad -1 \le x < 1, \\ 2x, & \text{если} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Дана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y = \ln(x-8)$, $x_1 = 7$, $x_2 = 8$.

Для кусочно-заданной функции $y = f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} \cos x, & если \quad x < 0, \\ 1 - x, & если \quad 0 \le x \le 2, \\ x^2, & если \quad x > 2. \end{cases}$$

Практическая работа № 9. Дифференцирование функций.

Теоретическая часть:

Основные правила дифференцирования

а) $c' = 0$

б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

в) $(uv)' = u'v + uv'$

г) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

д) $(Cu)'_x = Cu'_x$

е) дифференцирование сложной функции, если $y = f(u)$, $u = u(x)$, то $y = f(u(x))$ −сложная функция. Тогда, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ или $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Здесь $c = const,$ а u и v −дифференцируемые функции

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

3. $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

4. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

5. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

7. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

8. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

9. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

10. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$,

11. $(e^x)' = e^x$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$

12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

Пример 1.

Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$;

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2};$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:

Используем формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

в) $y = \frac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{\left(x^2\right)'\cos x - x^2(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin\left(x^2 + 3\right)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$$y' = (\sin u)_u' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x.$$

д) $y = \left(x^2 + e^x\right)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 10\left(x^2 + e^x\right)^9 \cdot \left(2x + e^x\right).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2\left(e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2e^{\sin x}(\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2e^{\sin x}\cos x.$$

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по *x*, полагая, что *y* есть функция от *x* и обозначая производную *y* через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2y' - 2x = 0.$$

Выразим из полученного равенства y':

$$\left(2y + 2x^2\right)y' = 2x - 4xy;$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}.$$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x$;

$(-\sin y - 8y)y' = e^x$;

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y}.$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используем формулу $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2 + 3)'} = \frac{-\sin t}{2t}.$$

Пример 3.

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y = \ln(\cos x)$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = (-tgx)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) $y = xe^x$.

Решение:

$y' = e^x + xe^x$,

$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$.

Пример 4.

Найти дифференциал функции y, если $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$y = \ln(\sin x) - \ln x$.

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = ctgx - \frac{1}{x};$$

$$dy = \left(ctgx - \frac{1}{x}\right)dx.$$

Пример 5.

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 4x^2 + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

Найдем ординату точки касания:

$$y_0 = x_0^3 - 4x_0^2 + 8 = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 = 5.$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$$k = y'(x_0) = (x^3 - 4x^2 + 8)'\Big|_{x=1} = (3x^2 - 4 \cdot 2x)\Big|_{x=1} = -5.$$

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение касательной $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$:

$y = 5 - 5(x-1) = -5x + 10$,

получили уравнение касательной $y = -5x + 10$.

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение нормали $y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$:

$$y = 5 - \frac{1}{-5}(x-1) = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5},$$

получили уравнение нормали $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{24}{5}$.

Задания к практическому занятию:

1. Найти производные

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$,

б) $y = \sin x \cdot arctg\ x$,

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}}$,

д) $y = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x$,

е) $y = \arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$,

ж) $y = (1 + \ln \sin x)^2$,

з) $y = 2^{\frac{1}{\ln x}}$,

и) $y = x\ arctg\sqrt{x}$,

к) $y = e^{\sin x}$,

л) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

м) $y = ctg\ e^x$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^3 + arctg(e^y) + y(x - 1) = 0$,

б) $\sin y = x + 3y$,

в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$y = x \cos 2x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln \frac{tgx}{\sqrt{x}}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = -1$

.

1. Найти производные

а) $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$,

б) $y = \sqrt{x} \sin x$,

в) $y = \frac{tgx}{\sin x - \cos x}$,

г) $y = ctg(2x\sin\frac{1}{2})$,

д) $y = (\arccos x + \arcsin x)^2$,

е) $y = arctg\ln(2x+3)$,

ж) $y = tg\frac{e^x}{x}$,

з) $y = \sin 3x\cos 5x$,

и) $y = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$,

к) $y = tg^2 6x - 2^x$,

л) $y = x\cdot 10^{\sqrt{x}}$,

$y = x + e^{\sin x}$,

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $y\sin x = \cos xy$,

б) $x^3 + y^2 - 3axy = 0$,

в) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

4. Найти дифференциал функции:

$$y = \arcsin\frac{\ln x}{x^2}$$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Практическая работа № 10. Выполнение приближенных вычислений при помощи дифференциала.

Применение дифференциала, в приближенных вычислениях.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях основано на замене приращения функции её дифференциалом $\Delta y \approx dy$. Абсолютная погрешность при такой замене равна $|\Delta y - dy|$ и является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ может сложно зависеть от Δx, и его вычисление часто сопряжено с большими трудностями. Вычисление же дифференциала по формуле $f'(x)dx$ просто. *Геометрически замена приращения функции дифференциалом означает замену участка кривой в окрестности некоторой точки отрезком касательной к этой кривой в данной точке. Эта операция в математике получила название спрямление кривой или линеаризации.*

Приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ применяется в основном в двух задачах:

1). Приближенном вычислении значения функции.

2). Оценке погрешностей в приближенных вычислениях.

Пусть известны значения функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 и её производной $f'(x_0)$. Требуется найти значение функции в точке $x + \Delta x$. $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0); dy = f'(x_0)\Delta x$ отсюда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ или $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (9).

Пример1. Вычислить приближено $\sqrt{36{,}32}$.

Решение. Пусть $y = \sqrt{x}$; x_0 =36. Тогда $f(x_0) = \sqrt{36} = 6.$ $\Delta x = 36{,}32 - 36 = 0{,}32.$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{36}} = \dfrac{1}{12}.$ Подставляя полученные значения в формулу (8) получим $\sqrt{36{,}32} = 6 + \dfrac{1}{12} * 0{,}32 = 6{,}026$. Итак $\sqrt{36{,}32} \approx 6{,}026$.

Задание для практического занятия:

Пример 1. Вычислить приближенное значение приращения функции $y = x^2 + 2x + 5$ при изменении аргумента от $x = 2$ до $x = 2{,}001$.

Решение. Находим дифференциал аргумента:

$dx = \Delta x = 2{,}001 - 2 = 0{,}001$.

Приращение аргумента мало, поэтому приращение функции Δy приближенно равно её дифференциалу dy. дифференциал функции вычисляем по формуле $dy = y'(x)dx$. Предварительно найдем производную функции и её значение при $x = 2$:

$y' = 2x + 2$, $\quad y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$.

Тогда $dy = 6 \cdot 0{,}001 = 0{,}006$ и $\Delta y \approx 0{,}006$.

Точное значение приращения функции найдем по формуле $\Delta y = f(2{,}001) - f(2)$, где

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13$, $\quad f(2{,}001) = (2{,}001)^2 + 2 \cdot 2{,}001 + 5 = 13{,}006001$.

Тогда $\Delta y = 13{,}006001 - 13 = 0{,}006001$.

Сравнивая полученный результат с дифференциалом dy, видим, что абсолютная погрешность равна 0,000001. Однако абсолютная погрешность не дает достаточно полной характеристики точности подсчета. Поэтому вычислим и относительную погрешность:

$$\omega = \frac{0{,}000001}{0{,}006001} < 0{,}02\% .$$

Эта точность обычно оказывается вполне достаточной для расчетов, производимых в технике. Поэтому такой погрешностью можно пренебречь и вместо приращения функции находить её дифференциал, который вычислить проще, так как он зависит от Δx линейно.

Пример 2. Вычислить приближенное значение функции $y = x^3 + x^2 - 2x$ при $x = 2{,}01$.

Решение. Находим дифференциал аргумента: $dx = \Delta x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$. Приращение аргумента мало, поэтому для вычисления приближенного значения функции воспользуемся формулой

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ или $f(2{,}01) \approx f(2) + dy.$

Сначала найдем значение функции при $x = 2$: $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$.

Дифференциал находим по формуле $dy = y'(x)dx$, для чего найдем производную функции и её значение при $x = 2$:

$$y' = 3x^2 + 2x - 2, \quad y'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 12 + 4 - 2 = 14 .$$

Тогда $dy = 14 \cdot 0{,}01 = 0{,}14.$

Следовательно, $f(2{,}01) \approx 8 + 0{,}14 = 8{,}14$.

Пример 3. Найти приближенное значение $\sqrt{16{,}06}.$

Решение. Нам надо найти приближенное значение функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 16{,}06$.

Находим дифференциал аргумента: $dx = \Delta x = 16{,}06 - 16 = 0{,}06$.

Приращение аргумента мало, поэтому $f(16{,}06) \approx f(16) + dy$, $f(16) = \sqrt{16} = 4$.

Дифференциал находим по формуле $dy = y'(x)dx$, для чего найдем производную функции и её значение при $x = 16$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Следовательно, $\sqrt{16{,}06} \approx 4 + 0{,}0075 = 4{,}0075$. В действительности $\sqrt{16{,}06} = 4{,}00749 \ldots$.

Пример 4. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{0{,}988}$

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем:

$f(0{,}988) \approx f(1) + dy$;

$y = \sqrt[3]{x}$, $\quad dx = \Delta x = 0{,}988 - 1 = -0{,}012$;

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$y'(1) = \frac{1}{3}, \quad dy = \frac{1}{3}\cdot(-0{,}012) = -\frac{0{,}012}{3} = -0{,}004;$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Тогда $\sqrt[3]{0{,}988} = 1 - 0{,}004 = 0{,}996$.

Практическая работа № 11. Приложения производной. Возрастание и убывание функций. Экстремум функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$.

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$$y' = 3 - 3x^2 = 3\left(1 - x^2\right)$$

$y' = 0$ при $x = 1 \in [0;\ 3]$ и $x = -1 \notin [0;\ 3]$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$y(1) = 2;\ \ y(0) = 0;\ y(3) = -18$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{наиб}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{наим}(3) = -18$.

Пример 2.

Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0,\ (x=1)$

Область определения: $x \in (-\infty;\, 1) \cup (1;\, \infty)$

2. Т.к. $x=1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$- вертикальная асимптота.

3.Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

Область определения симметрична относительно начала координат

$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с OX: $y=0$ при $x=-2;$

с OY: $x=0$ при $y=2;$

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y<0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x \in (-\infty;\,-2);$$

$$y>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x \in (-2;1) \cup (1;+\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 2$$

$y = \frac{1}{4}x + 2 -$ наклонная асимптота.

Для $x \to -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0, в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = -2,\ x_2 = 7;$

y' не существует при $x = 1$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$

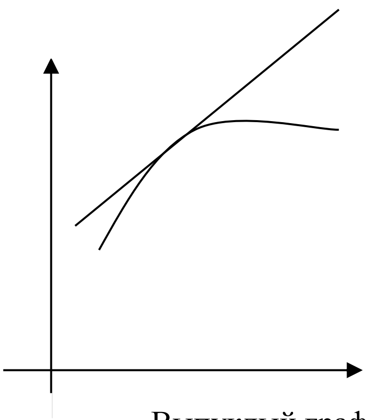
y'	+	0	+	не уществует	-	0	+
y	↗	0	↗	не уществует	↘	≈ 5	↗
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

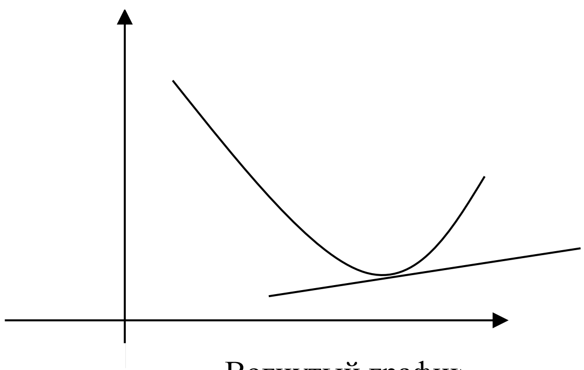
Практическая работа № 12. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Нахождение асимптот кривой.

Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Выпуклый график



Вогнутый график

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y=\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{\left[2(x+2)(x-7)+(x+2)^2\right](x-1)^3-3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6}=\frac{54(x+2)}{4(x-1)^4}=\frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$y''=0$ при $x=-2$

y'' не существует при $x=1$

Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\frown$	0	$\smile$	не существует	$\smile$

Точка $(-2;0)$- точка перегиба.

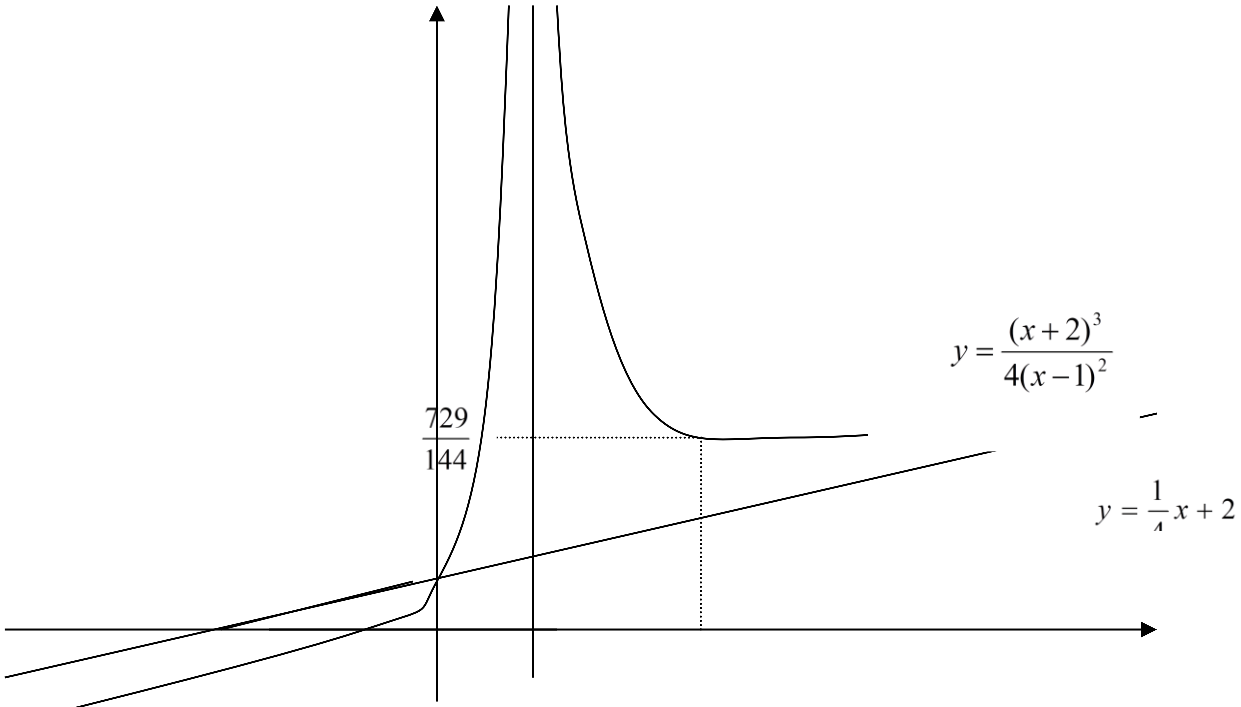
Дополнительные точки:

$y(-3)\approx -0{,}01$

$y(3)\approx 7{,}8$

$y(-6)\approx -0{,}3$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.

Задания к практическому занятию:

Пример 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$$y = \frac{x+6}{x^2+13};\ [-5;5]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Пример 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y = \frac{x}{2} + \cos x;\ [0;\pi]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3+16}{x}$$

Пример 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\frac{x-3}{x^2+16}$; $[-5;10]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$$

Пример 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\frac{x+3}{x^2+7}$; $[-3;7]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$$

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке: $y=\frac{x}{2}-\sin x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Практическая работа № 13. Интегральное исчисление функции одной переменной. Методы непосредственного интегрирования. Интегрирование заменой переменной.

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.

6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

1	$\int dx = x + C;$
2	$\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$
3	$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C;$
4	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 4а $\int e^x dx = e^x + C;$
5	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$
6	$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$
7	$\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$
8	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$
9	$\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert + C;$
10	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left\lvert \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right\rvert + C;$
11	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Метод непосредственного интегрирования:

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Метод подведения под знак дифференциала.

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))d(u(x)),$$

так как $u'(x)dx = d(u(x))$.

1	$\int \sin x \cos x dx$	**6**	$\int \sin 2x \cos x dx$
2	$\int \sin x \cos 2x dx$	7	$\int \frac{3x+4}{3x+2} dx$
3	$\int \frac{x^2+5}{x+2} dx$	8	$\int \frac{2x^2+2x+7}{x+3} dx$
4	$\int \sqrt[3]{1+2x} dx$	9	$\int 8 \cdot \sqrt[7]{1-7x} dx$
5	$\int 5 \cdot \sqrt[3]{(3x+5)^2} dx$	**10**	$\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

Метод замены переменной (способ подстановки):

<u>Теорема:</u> Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

<u>Доказательство:</u> Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

<u>Пример.</u> Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx, dt = cosxdt.$

$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$

<u>Пример.</u> $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Практическая работа № 14. Метод интегрирования по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

<u>Пример.</u> $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$=\begin{cases} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{cases} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x} \cos x dx = \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{cases} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \begin{cases} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{cases} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx\right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

<u>Пример.</u>

$$\int (2x+1)^{20} dx = \{2x + 1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x \cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2} dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int x\ln xdx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

Задание к практической работе № 13-14.

Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$ 4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^5}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. а) $\int \sqrt{1-5x}dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int xarctgxdx$ 8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}dx$; б) $\int (1-x)\sin 3xdx$ 10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4xdx$ 12. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.
2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.
3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.
4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.
5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.
6. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.

7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.

8. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.

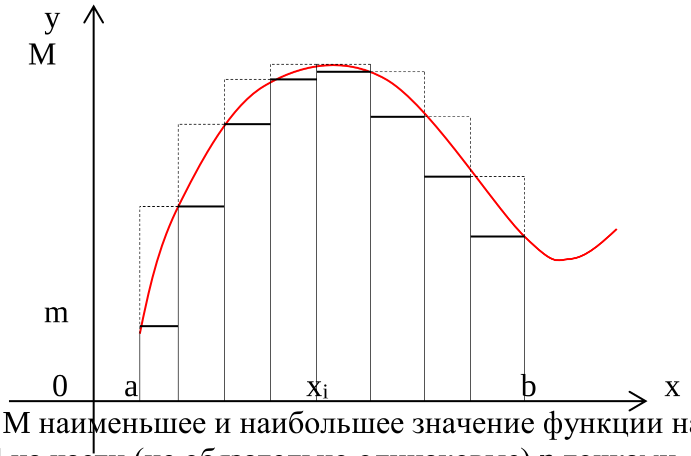
9. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3}dx$.

$\int \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Практическая работа № 15. Вычисление определённых интегралов.

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.
Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, \quad x_1 < \varepsilon < x_2, \ \ldots \ , x_{n-1} < \varepsilon < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min\Delta x_i$ – наименьший. Если $\max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Определение:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $\max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

<u>Определение:</u> Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема:</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

<u>Свойства определенного интеграла.</u>

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Ф(х). Найдем производную функции Ф(х) по переменному верхнему пределу х.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при х = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную t на переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

<u>Замена переменных.</u>

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

<u>Пример.</u>

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

<u>Пример.</u>

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках x_0, x_1, … , x_m, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$,   ….   , $y_n = f(x_n)$.

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Задание к практическому занятию:

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1.$\int_0^1 (5x-2)^4\,dx.$ 2.$\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3.$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)dx.$ 4.$\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}\,dx.$ 5.$\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1.$\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ 2.$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3.$\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4.$\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5.$\int_0^{\pi} (x^2+2)\cos x dx.$

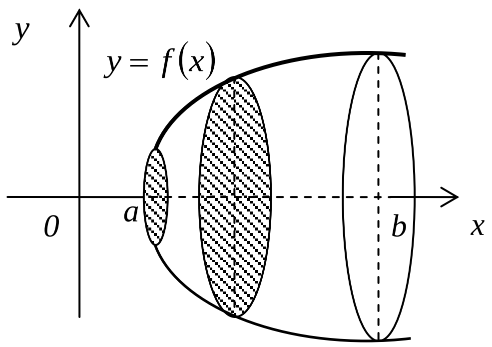
1.$\int_0^{\pi/4} \sin 2t \cdot dt.$ 2.$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 3.$\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4.$\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx.$ 5.$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

1.$\int_0^1 e^{3x}dx.$ 2.$\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ 3.$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 4.$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ 5.$\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

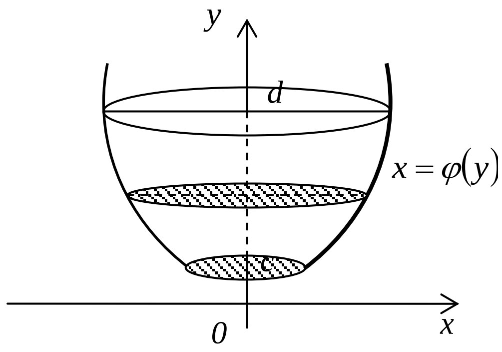
Практическая работа № 16. Вычисление объемов тел вращения.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a;\ b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой:

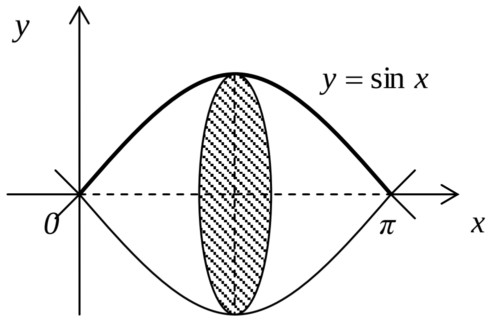
$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ **(20)**.



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x=\varphi(y)$ и прямыми $x=0$, $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (20), равен: $V_y=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$ **(21)**.



В условиях нашей задачи $y=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$.



$$V_x=-\pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x dx=\left\{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi}dx-\int\limits_0^{1}\cos 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\left(\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

Задание для практического занятия:

1) Вычислить : объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y=\dfrac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y=1$ и $y=6$.
2) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y=\dfrac{2}{1+x^2}$.
3) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.
4) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=\dfrac{1}{4}x^2$, прямой $x=4$ и осью Ox.

5) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x = \sqrt{1-y}$ и осью Oy.

6) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$ и прямыми $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \sqrt{3}$

7) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

8) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

9) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой , прямой , вокруг оси .

10) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

11) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:

a) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

Практическая работа № 17. Вычисление интегралов приближенными методами.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках x_0, x_1, … , x_m, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …. , $y_n = f(x_n)$.

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$ или

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int\limits_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок $[a, b]$ на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда $a = 0$, $b = 3$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$

$f(x_0) = 2^2 = 4$

$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$

$f(x_2) = 3^2 = 9$

$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$

$f(x_4) = 4^2 = 16$

$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25.$

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2}\cdot(4+6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25)=\frac{1}{2}\cdot 67{,}75=33{,}875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=39$$

$$\Delta = |39-33{,}875| = 5{,}125$$

$$\delta = \frac{5{,}125}{39}\cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

Вычисления проходили долго и мы получили довольно-таки грубое округление. Чтобы вычислить этот интеграл с меньшим приближением, можно воспользоваться техническими возможностями компьютера.

Для нахождения определённого интеграла методом прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции *f(x)* в рабочую таблицу Excel в диапазоне $x \in [2;5]$ с заданным шагом $\Delta x = 0{,}1$.

Открываем чистый рабочий лист.

Составляем таблицу данных *(x* и *f(x))*. Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x)*. Для этого в ячейку A1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку B1 – слово *Функция*. В ячейку A2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*2*). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*2,1*). Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки A32, до значения *x=5*).

Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку B2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку B2 и с клавиатуры ввести формулу *=A2^2* (при английской раскладке клавиатуры). Нажимаем клавишу *Enter*. В ячейке B2 появляется *4*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B32.

В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

Теперь в ячейке B33 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку B33 вводим формулу = *0,1**, затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B2:B31. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке B33 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*37,955*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла (*39*), можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$\Delta = |39 - 37,955| = 1,045$

$\delta = \frac{1,045}{39} \cdot 100\% = 0,02679 \cdot 100\% \approx 2,68\%$.

Пример 2. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ с заданным шагом Δx = 0,05.

Решение:

Для нахождения определённого интеграла значения подынтегральной функции *f(x)* должны быть введены в рабочую таблицу *Excel* в диапазоне $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с заданным шагом Δx = 0,05. В созданную уже таблицу данных в ячейку A2 вводится левая граница интегрирования (*0*). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,05*). Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки A33, до значения *x=1,55*).

Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку B2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку B2. Здесь должно оказаться значение косинуса, соответствующее значению аргумента в ячейке A2. Для получения значения косинуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (f_x) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *COS*. Нажимаем кнопку *ОК*. Появляется диалоговое окно *COS*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента косинуса щелчком мыши на ячейке A2. Нажимаем кнопку *ОК*. В ячейке B2 появляется *1*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

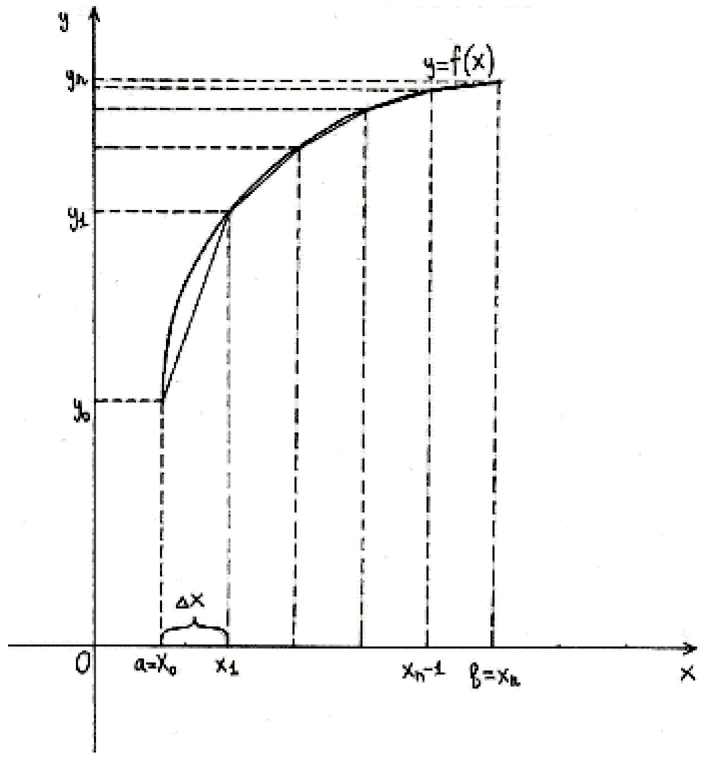
Теперь в ячейке B34 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку B34 вводим формулу = *0,05**, затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции ((f_x)) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B2:B32. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке B34 появляется приближённое значение искомого интеграла с избытком (*1,024056*).

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$$\Delta = |1{,}024056 - 1| = 0{,}024056$$

$$\delta = \frac{0{,}024056}{1} \cdot 100\% \approx 2{,}41\%$$

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

[Рисунок3]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$$

Пример 3. Методом трапеций найти $\int_0^{\pi} \sin\, x dx$ с шагом Δx = 0,1.

Решение.

Открываем чистый рабочий лист.

Составляем таблицу данных *(x* и *f(x)).* Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x).* Для этого в ячейку А1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку В1 – слово *Функция*. В ячейку А2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*0*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,1*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А33, до значения *x=3,1*).

Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение (в примере синуса). Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2. Здесь должно оказаться значение синуса, соответствующее значению аргумента в ячейке А2. Для получения значения синуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции *f(x).* В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *SIN.* Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно *SIN*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента синуса щелчком мыши на ячейке А2. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В2 появляется 0. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

Теперь в ячейке В34 может быть найдено приближённое значение интеграла по методу трапеций. Для этого в ячейку В34 вводим формулу *= 0,1*((В2+В33)/2+,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x)).* В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В3:В32. Нажимаем кнопку *ОК* и ещё раз *ОК.* В ячейке В34 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*1,997*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\pi} \sin\, x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (\cos 0) = -(-1)+1 = 2\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае вполне приемлемая для практики.

$$\Delta = |1{,}997 - 2| = |-0{,}003| = 0{,}003$$

$$\delta = \frac{0{,}003}{2} \cdot 100\% = 0{,}0015 \cdot 100\% = 0{,}15\%$$

Решение упражнений.

Вычислить $\int_0^2 e^x dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок [0;1] на 20 равных частей. *Ответ:* $I \approx 6{,}02344$, $\Delta = 0{,}26656$, $\delta = 4{,}24\%$.

Вычислить методом трапеций $\int_1^{1{,}5} \frac{dx}{x}$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Вычислить методом трапеций $\int_0^2 x dx$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Вычислить методом трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при $\Delta x = 0{,}25$.

Вычислить $\int_0^4 (3x^2 + 4x + 2) dx$, разделив отрезок [0;4] на 40 равных частей.

Вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$, разделив отрезок [0;8] на 40 равных частей.

Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx$, при $\Delta x = 0{,}2$.

Практическая работа № 18. Выполнение операций над высказываниями, составление таблиц истинности. Применение законов логики.

Высказывания и высказывательные формы

Алгебра в широком смысле этого слова — наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами.

Примеры алгебр: алгебра натуральных чисел, алгебра рациональных чисел, алгебра многочленов, алгебра векторов, алгебра матриц, алгебра множеств и т. д.

Объектами алгебры логики, или булевой алгебры, являются высказывания.

Высказывание — это любое предложение какого-либо языка (утверждение), содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Всякое высказывание или истинно, или ложно; быть одновременно и тем и другим оно не может.

Формулировка любой теоремы является высказыванием. Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков.

Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства. Сами числовые выражения высказываниями не являются. Например, предложение $X < 12$ становится высказыванием при замене переменной каким-либо конкретным значением. Такие предложения называют ***высказывательными формами***.

Примеры высказываний:

1) {Город Вашингтон — столица США} (истинное высказывание);

2) {Число 2 является делителем числа 7} (ложное высказывание);

3) $\{3 + 5 = 2 \cdot 4\}$ (истинное высказывание);

4) $\{2 + 6 > 10\}$ (ложное высказывание);

5) $\{II + VI > VIII\}$ (ложное высказывание);

6) {Сумма чисел 2 и 6 больше числа 8} (ложное высказывание);

7) {Two plus six is eight} (истинное высказывание);

8) {Na — металл} (истинное высказывание).

Высказывание называется ***простым*** (**элементарным**), если никакая его часть сама не является высказыванием. Если это условие не выполняется, высказывание называется ***сложным***.

Высказывания, приведенные выше, являются простыми. Они обозначаются заглавными латинскими буквами:

A = {Аристотель — основоположник логики}.

B = {На яблонях растут бананы}.

Читать приведенные записи нужно так:

A есть высказывание «Аристотель — основоположник логики».

B есть высказывание «На яблонях растут бананы».

Обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики.

Например, истинность или ложность высказывания «Сумма углов треугольника равна 180 градусам» устанавливается геометрией, причем в геометрии Евклида это высказывание является истинным, а в геометрии Лобачевского — ложным. Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0.

Таким образом, $A = 1$, $B = 0$.

Логические операции

Будем считать, что уже имеется некоторый запас элементарных высказываний, относительно каждого из которых известно, истинно оно или ложно. В обычной речи мы часто используем слова, называемые логическими связками, — «не», «и», «или», «следует», «влечет», «эквивалентно», «равносильно», «тогда и только тогда, когда...» и т. п.

Примеры сложных высказываний:

1) {В автобусе можно доехать до школы и почитать журнал};

2) {Число 376 четно или двузначно};

3) {Неверно, что Солнце движется вокруг Земли};

4) {Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3}.

В алгебре логики, как и в обычной алгебре, вводится ряд операций. Рассмотрим пять основных логических операций.

1. Логическая операция ***конъюнкция*** (лат. conjunctio — «связываю»):

• в естественном языке соответствует союзам **и**, **а**, **но**, **хотя**;

• обозначение: & или $\wedge$;

• иное название: ***логическое умножение***.

Конъюнкция — это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

Это определение распространяется и на случай *n* высказываний ($n > 2$, *n* —целое число). В соответствии с определением правила выполнения действий для операции конъюнкции можно представить в виде истинностной таблицы:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Истина будет лишь в том случае, когда оба человека не лгут.

2. Логическая операция ***дизъюнкция*** (лат. disjunctio — «различаю»):

• в естественном языке соответствует союзу **или**;

• обозначение;

• иное название: ***логическое сложение***.

Дизъюнкция — это логическая операция, которая каждым двум элементарным высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда хотя бы одно из двух образующих его высказываний истинно.

Правила действия для операции дизъюнкции можно представить в виде истинностной таблицы:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Выбирая между истиной и ложью, мы останавливаемся на истине.

В отличие от рассмотренной выше операции дизъюнкции можно рассмотреть ***строгую дизъюнкцию*** (двойное «или»), которой в естественном языке соответствует связка «либо..., либо...»). Суть этой операции ясна из приведенной ниже таблицы:

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Данная операция реализует сложение разряда двоичного числа без переноса в старший разряд.

3. Логическая операция ***импликация*** (лат. implicatio — «тесно связываю»):

• в естественном языке соответствует обороту **если...,** то...;

• обозначение: =>;

• иное название: ***логическое следование***.

Импликация — это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно. Таблица истинности импликации:

A	B	A⇒B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Из лжи может следовать что угодно, даже истина, но из истины не может следовать ложь.

4. Логическая операция э***квиваленция*** (лат. aequivalens — «равноценное»):

• в естественном языке соответствует оборотам речи **тогда и только тогда, в том и только в том случае;**

• обозначение:⇔;

• иное название: ***равнозначность***.

Эквиваленция — это логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум элементарным высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Эквивалентны ли высказывания, то есть одинаковы ли значения высказываний?

Таблица истинности эквиваленции:

A	B	A⇔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. Логическая операция ***инверсия*** (лат. inversio — «переворачиваю»):

• в естественном языке соответствует словам **неверно, что...** и частице **не**;

• обозначение: $\overline{A}$;

• иное название: ***отрицание***.

Отрицание **—** это логическая операция, которая каждому данному высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если данное высказывание истинно.

Таблица истинности инверсии:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Логические операции имеют следующий приоритет:

действия в скобках, отрицание, $\wedge$, v, =>,<=>.

Таблицы истинности

Логические функции могут быть заданы табличным способом или аналитически — в виде соответствующих формул.

Истинность или ложность сложных высказываний, образованных в результате выполнения логических операций над простыми высказываниями, не зависит от смыслового содержания исходных высказываний и определяется только их значениями (истинностью или ложностью).

Поэтому любое сложное высказывание можно рассматривать как некоторую логическую функцию $F(X1, X2, ..., Xn)$.

Определим количество различных логических функций с заданным числом переменных *n.* Логическая функция на каждом наборе переменных принимает значение 0 или 1.

Следовательно, отличающихся друг от друга функций может быть ровно столько, сколько существует различных комбинаций из $m = 2^n$ нулей и единиц.

Таких комбинаций 2^n, и они представляют собой последовательность *n*-разрядных двоичных чисел от 0 до $2^n - 1$.

Алгоритм построения таблицы истинности

1) Подсчитать *n* — количество переменных в формуле.
2) Определить число строк в таблице $m = 2^n$.
3) Подсчитать количество логических операций в формуле.
4) Установить последовательность выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.
5) Определить количество столбцов в таблице: число переменных плюс число операций.
6) Выписать наборы входных переменных с учетом того, что они представляют собой натуральный ряд n-разрядных двоичных чисел от 0 до 2^n—1.
7) Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 4 последовательностью.

П р и м е р. Для формулы A∧(B∨B∧C) построить таблицу истинности.

A	B	C	$\bar{B}$	$\bar{C}$	B ∧ C	B ∧ B ∧ C	A∧(B ∨ B ∧ C)
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Наборы входных переменных во избежание ошибок иногда рекомендуют перечислять следующим образом:

1) определить количество наборов входных переменных;
2) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки нулями, а нижнюю — единицами;
3) разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами нулей или единиц, начиная с группы нулей;
4) продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т. д. частей и заполнение их группами нулей или единицами до тех пор, пока группы нулей и единиц не будут состоять из одного символа.

Процедура составления таблиц истинности может быть существенно сокращена, если воспользоваться следующим приемом.

П р и м е р. Для $(X_1 \Rightarrow X_2) \Leftrightarrow (\overline{X}_1 \,\&\, X_2)$ получаем:

$$(X_1 \Rightarrow X_2) \quad \Rightarrow \quad (\overline{X}_1 \,\&\, X_2)$$

0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1

Построить таблицы истинности для следующих формул:

1. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$

2. $(\overline{A \vee B}) \vee (\bar{B} \wedge \bar{A}) \Leftrightarrow ((A \vee B) \oplus \bar{B}) \Rightarrow A$

3. $(\bar{z} \oplus y) \vee (\bar{z} \,|(y \vee \bar{x}))$

4. $((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$

5. $x\left|\left(y \oplus z\right) \oplus (x|y) \vee \left(x|z\right)\right.$

6. $(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right)$

7. $\left(x \wedge y\right) \oplus \left(x \wedge z\right)$

8. $(\overline{A \Rightarrow B}) \wedge \left(\bar{B} \Leftrightarrow \bar{A}\right) \Leftrightarrow \left(\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \bar{B}\right) \oplus A$

9. $\left(\bar{z} \Leftrightarrow y\right) \vee \left(\bar{z}\,|(z \vee \bar{x})\right)$

10. $\left(x|\bar{y}\right) \oplus \left(\bar{z} \to x\right)$

11. $(\overline{A \oplus B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \oplus \bar{A}\right) \Leftrightarrow A \Rightarrow \left(\left(A \vee B\right) \wedge \bar{B}\right)$

12. $\left(\bar{z} \Rightarrow y\right) \oplus \left(\bar{z}\,|(y \vee \bar{x})\right)$

13. $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow \left(A \downarrow B\right)$

14. $x\left|\left(y \wedge z\right) \Rightarrow (x|y) \oplus \left(x|z\right)\right.$

15. $\left(\bar{z} \vee y\right) \to \left(\bar{z} \oplus \bar{x}\right)$

Законы логики высказываний

Сложные высказывания (формулы) А и В называются ***равносильными***, если их истинностные значения совпадают на любых наборах истинностных значений простейших высказываний, входящих в эти формулы. В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования формул.

Формулировки логических законов

1. Закон двойного отрицания:

$$A = \overline{\overline{A}}.$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

2. Переместительный (коммутативный) закон:

• для логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A;$$

• для логического умножения:

$$A \& B = B \& A.$$

Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания. В обычной алгебре $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

3. Сочетательный (ассоциативный) закон:

• для логического сложения:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C;$$

• для логического умножения:

$$(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C).$$

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать. В обычной алгебре

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C,$$
$$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C.$$

4. Распределительный (дистрибутивный) закон:

• для логического сложения:

$$(A \vee B) \,\&\, C = (A \,\&\, C) \vee (B \,\&\, C);$$

• для логического умножения:

$$(A \,\&\, B) \vee C = (A \vee C) \,\&\, (B \vee C).$$

Закон определяет правило выноса общего высказывания за скобку.
В обычной алгебре $(a+b)*c = a+b*c$.

5. *Закон общей инверсии (законы де Моргана):*

• для логического сложения:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B};$$

• для логического умножения:

$$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

6. Закон идемпотентности (от латинских слов idem — «тот же самый» и potens — «сильный»; дословно — «равносильный»):

• для логического сложения:

$$A \vee A = A;$$

• для логического умножения:

$$A \,\&\, A = A.$$

Закон означает отсутствие показателей степени

7. Законы исключения констант:

• для логического сложения:

$$A \vee 1 = 1, A \vee 0 = A;$$

• для логического умножения:

$$A \,\&\, 1 = A, A \,\&\, 0 = 0.$$

8. Закон противоречия:

$$A \,\&\, \overline{A} = 0.$$

Невозможно, чтобы противоречивые высказывания были одновременно истинными.

9. Закон исключения третьего:

$$A \vee \overline{A} = 1.$$

Из двух противоречивых высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

10. Закон поглощения:

• для логического сложения:

$$A \vee (A \,\&\, B) = A;$$

• для логического умножения:

$$A \,\&\, (A \vee B) = A.$$

11. Закон исключения (склеивания):

• для логического сложения:

$$(A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, B) = B;$$

• для логического умножения:

$$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B) = B.$$

12. Закон контрапозиции (правило перевертывания):

$$(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Переместительный, сочетательный (для логических сложения и умножения) и распределительный (для логического сложения) законы имеют полную аналогию с обычной алгеброй. Для других законов такой аналогии нет.

Доказательство логических законов

Справедливость приведенных законов можно доказать табличным способом: надо выписать все наборы значений *A* и *B,* вычислить для них значения левой и правой частей доказываемого выражения и убедиться, что результирующие столбцы совпадут.

Пример. Докажем справедливость закона инверсии для логического сложения:

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$

A	**B**	**A∨B**	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \,\&\, \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Задания к практическому занятию:

1.Укажите, в каких случаях высказывание истинно, а в каких ложно:

$$(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow \left(\overline{B} \wedge \overline{A}\right)$$

$$\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow \left(A \downarrow B\right)$$

$$\left(\overline{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\overline{z} \oplus \overline{x}\right)$$

$$\left(\left(x \downarrow y\right) \rightarrow z\right) \oplus y$$

$$((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow \overline{A}$$

2.Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$\left(x \wedge y\right) \oplus \left(x \wedge z\right)$ и $x \wedge \left(y \oplus z\right)$

$x \left| \left(y \wedge z\right) \right.$ и $(x|y) \oplus \left(x|z\right)$

$\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right)$ и $A \vee B$

$x \left| \left(y \Rightarrow z\right) \right.$ и $(x|y) \vee \left(x|z\right)$

Практическая работа № 19. Функции алгебры логики.

Логические функции от двух переменных

Пусть $n = 2$. Существует 16 различных логических функций от двух переменных. Рассмотрим их подробно:

Аргументы		**Функции**															
X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}

F_1 — константа 0.

F_2 — конъюнкция.

F_3 — отрицательные импликации X_1 и X_2.

F_4 — функция, повторяющая переменная X_1.

F_5 — отрицание импликации X_2 и X_1.

F_6 — переменная X_2.

F_7 — строгая дизъюнкция или отрицание эквивалентности (неравнозначность) переменных X_1 и X_2. Значение этой функции получается поразрядным сложением двоичных переменных X_1 и X_2 по модулю 2, то есть без учета переноса в старший разряд.

F_8 — дизъюнкция.

F_9 — отрицание дизъюнкции (функция ИЛИ-НЕ); эта функция называется также ***функцией Пирса*** («стрелка» Пирс).

F_{10} — эквивалентность.

F_{11} — отрицание переменной X_2.

F_{12} — импликация X_1 и X_2.

F_{13} — отрицание X_1.

F_{14} —импликация X_1 и X_2.

F_{15} — отрицание конъюнкции (функция И-НЕ); эта функция называется также ***функцией Шеффера*** («штрих» Шеффера).

F_{16} — константа 1.

С увеличением числа аргументов количество логических функций резко возрастает. Так, при $n = 3$ их будет уже 256. Но изучать их все нет никакой необходимости. Дело в том, что функция любого количества переменных может быть выражена через функции только двух переменных. Делается это с помощью приема суперпозиции, состоящего в том, что, во-первых, на место переменных подставляются функции, во-вторых, переменные меняются местами.

Минимальное количество функций двух переменных, через которое можно выразить все другие логические функции, называется ***функционально полным набором логических функций***.

Вот несколько примеров функционально полных наборов:

1) F2 и F11; 2) F13 и F8; 3) F9 и F15.

При желании всю алгебру логики можно свести к одной функции. Но чаще всего логические функции записываются в виде логического выражения через инверсию, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Введенные пять логических операций дают возможность из простых высказываний строить сложные. Всякое сложное высказывание принимает значение 1 или 0 в зависимости от значения простых высказываний, из которых оно построено.

Таблицу, показывающую, какие значения принимает сложное высказывание при всех сочетаниях (наборах) значений входящих в него простых высказываний, называют ***таблицей истинности*** сложного высказывания. Сложные высказывания часто называют ***формулами логики высказываний***. Для любой формулы алгебры логики достаточно просто построить таблицу истинности.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Если логическая функция представлена дизъюнкцией, конъюнкцией и инверсией, то такая форма представления называется ***нормальной***.

Элементарная конъюнкция — конъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

Элементарная дизъюнкция — дизъюнкция конечного множества логических переменных и их инверсий.

Число аргументов, образующих элементарную дизъюнкцию или конъюнкцию, называется ***ее рангом.***

П р и м е р 1. *X & Y & Z, X &. Y & Z* — элементарные конъюнкции третьего ранга. *X* v *Y, X* v *Y* — элементарные дизъюнкции второго ранга.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) содержит элементарные конъюнкции, связанные между собой операцией дизъюнкции.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) содержит элементарные дизъюнкции, связанные между собой операцией конъюнкции.

Одну и ту же логическую функцию можно представить разными ДНФ и КНФ.

П р и м е р 2. Нетрудно убедиться (построив таблицы истинности для каждой из логических формул или проведя преобразования на основании логических законов), что приведенные ниже формулы определяют одну и ту же логическую функцию *F(X, Y, Z)*:

1) $(X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y) \vee (X \& Y \& Z)$;

2) $(X \& Y) \vee (\bar{X} \& Y) \vee (X \& Z)$.

Для исключения неоднозначности записи логические функции могут быть представлены в совершенных дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных формах.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) отвечает следующим требованиям:

1) в ней нет двух одинаковых элементарных конъюнкций;

2) ни одна элементарная конъюнкция не содержит двух одинаковых переменных;

3) ни одна элементарная конъюнкция не содержит переменную вместе с ее инверсией;

4) все конъюнкции имеют один и тот же ранг.

Аналогичным требованиям подчиняется и ***совершенная конъюнктивная нормальная форма*** (СКНФ).

П р и м е р 3. Если логическая функция содержит конъюнкции разных рангов, то для получения СДНФ следует повысить ранг младших конъюнкций, используя закон исключения третьего.

$$F(X,Y,Z) = (\bar{X} \& Y) \vee (X \& Y \& Z) = (\bar{X} \& Y) \& (Z \vee \bar{Z}) \vee (X \& Y \& Z) = (\bar{X} \& Y \& Z) \vee (\bar{X} \& Y \& \bar{Z}) \vee (X \& Y \& Z).$$

СДНФ и СКНФ можно получить по табличному представлению логической функции.

Алгоритм образования СДНФ по таблице истинности

1. Выделить в таблице истинности все наборы переменных, на которых функция принимает единичные значения.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные конъюнкции, содержащие без инверсии переменные, принимающие в соответствующем наборе значение 1 и с инверсией — переменные, принимающие значение 0.

3. Соединить элементарные конъюнкции знаком дизъюнкции.

Алгоритм образования СКНФ по таблице истинности

1. Выделить в таблице истинности все наборы переменных, на которых функция принимает нулевые значения.

2. Для каждого выбранного набора записать элементарные дизъюнкции, содержащие без инверсии переменные, принимающие в соответствующем наборе значение 0 и с инверсией — переменные, принимающие значение 1.

3. Соединить элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

П р и м е р 4. Пусть логическая функция F задана таблицей истинности:

X	**Y**	**Z**	**F**	**СДНФ**	**СКНФ**
0	0	0	0	–	$X \vee Y \vee Z$
0	0	1	0	–	$X \vee Y \vee \bar{Z}$
0	1	0	1	–	$X \vee \bar{Y} \vee Z$
0	1	1	1	$\bar{X} \& Y \& Z$	–
1	0	0	0	–	$\bar{X} \vee Y \vee Z$
1	0	1	0	$X \& \bar{Y} \& Z$	–
1	1	0	0	$X \& Y \& \bar{Z}$	–
1	1	1	1	$X \& Y \& Z$	–

В соответствии с приведенными выше алгоритмами логическую функцию *F(X, Y, Z)*, заданную таблицей истинности, можно представить аналитически:

1) в СДНФ —
$$F(X,Y,Z) = (X \& Y \& Z) \vee (X \& Y \& \bar{Z}) \vee (X \& \bar{Y} \& Z) \vee (\bar{X} \& Y \& Z);$$
2) в СКНФ —
$$F(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee \bar{Z}) \& (X \vee \bar{Y} \vee Z) \& (\bar{X} \vee Y \vee Z).$$

Обратите внимание на тот факт, что СДНФ и СКНФ являются инверсными по отношению друг к другу, т. е. если одна из них в некотором наборе равна 1, то другая на этом же наборе равна 0.

П р и м е р 5. Покажем, как для логической функции, заданной аналитически, можно построить таблицу истинности по СДНФ.

$$F(X, Y, Z) = (X \ \& \ Y \ \& \ Z) v (X \ \& \ Y \ \& \ Z) \vee (X \ \& \ Y \ \& \ Z).$$

По определению СДНФ только на наборах 011, 010, 111 логическая функция *F (X, Y, Z)* принимает значение 1; во всех остальных случаях — значение 0.

X	**Y**	**Z**	**F**
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Минимизация логических функций

Используя законы алгебры логики, можно упрощать сложные выражения, определяющие логические функции.

Преобразование логической функции с целью упрощения ее аналитического представления называется ***минимизацией.***

П р и м е р. Пусть некоторая логическая функция представлена в СДНФ.

$$F(X,Y,Z) = \bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z} \vee \bar{X}\,\bar{Y}\,Z \vee \bar{X}\,Y\,\bar{Z} \vee \bar{X}\,YZ.$$

Элементарные конъюнкции называются ***соседними,*** если они отличаются только одной переменной. Применение к соседним конъюнкциям правила склеивания понижает их ранг на единицу.

Первая и вторая, а также третья и четвертая конъюнкции — соседние. В результате их склеивания получим:

$$F = \bar{X}\,\bar{Y}(\bar{Z} \vee Z) \vee \bar{X}\,\bar{Y}(\bar{Z} \vee Z) = \bar{X}\,\bar{Y} \vee \bar{X}\,Y = \bar{X}(\bar{Y} \vee Y) = \bar{X}\,.$$

Минимизация функций алгебры логики (ФАЛ) в более общем смысле — это процедура нахождения наиболее простого представления ФАЛ в виде суперпозиции функций, составляющих функционально полную систему, при одновременной оптимизации ее технической реализации по некоторым критериям в условиях ряда ограничений.

Критериями оптимизации могут быть объем оборудования (количество вентилей, корпусов), габариты, вес, энергопотребление, стоимость, быстродействие, надежность.

В качестве ***ограничений*** могут выступать допустимые к использованию системы элементов, число элементов в корпусе, коэффициенты объединения по входу и разветвления по выходу логических элементов, необходимость реализации системы ФАЛ, а также ряд перечисленных выше критериев оптимизации.

Решение задачи минимизации ФАЛ в полном объеме является трудной проблемой хотя бы потому, что ряд критериев оптимизации находятся в противоречивом отношении друг к другу, например, одновременное снижение энергопотребления и повышение быстродействия.

На практике обычно решается задача оптимизации по нескольким или даже одному из критериев. Наиболее часто это делается по минимуму необходимого числа базовых логических элементов И, ИЛИ, НЕ, так как при этом в большинстве случаев удовлетворяются требования получения минимальных габаритов, веса, энергопотребления, стоимости, а также повышения быстродействия и надежности.

Иногда ограничиваются еще более простой задачей представления ФАЛ в дизъюнктивной или конъюнктивной форме, содержащей наименьшее возможное число букв, когда, например, для дизъюнктивных форм, в выражении присутствует как можно меньше слагаемых, являющихся элементарными произведениями, которые в свою очередь содержат как можно меньше сомножителей. Такую задачу принято называть ***канонической задачей минимизации ФАЛ***.

Существует несколько методов минимизации, например, расчетный метод и табличный метод минимизации ФАЛ, основанный на использовании карт, впервые предложенных Вейтчем и модернизированных Карно.

Задания к практическому занятию:

Построить таблицу истинности, найти СНДФ, найти минимальную ДНФ.

для высказывания:

1в.

1. $\left(\overline{z} \vee y\right) \rightarrow \left(\overline{z} \oplus \overline{x}\right)$
2. $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Rightarrow A \vee B$
3. $\left(\overline{z} \vee y\right) \wedge \left(\overline{z} \oplus \overline{x}\right)$
4. $\left((\overline{A \wedge B}) \Rightarrow A\right) \Leftrightarrow (A \vee B)$
5. $x \left| \left(y \rightarrow z \right) \right. \oplus (x|y) \rightarrow \left(x|z\right)$
6. $\left(\overline{z} \Rightarrow y\right) \Leftrightarrow \left(\overline{z} \vee \overline{x}\right)$
7. $(x|y) \rightarrow \left(x|z\right)$

8. $(\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \oplus \bar{A}\right) \Leftrightarrow (A \vee B) \oplus \left(A \oplus \bar{B}\right)$

9. $(\bar{z} \oplus y) \Rightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right)$

10. $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right)$

11. $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge (y \oplus z)$

12. $(\bar{z} \oplus x) \vee \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right)$

Построить таблицу истинности, найти СНКФ, найти минимальную КНФ.

для высказывания:

1 $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$

2. $(x|y) \to (x|z) \oplus (\bar{z} \vee y) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$

3. $(\bar{z} \vee y) \to \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right)$

4. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$

5. $(\overline{A \Rightarrow B}) \Leftrightarrow \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right) \oplus \left((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}\right) \Rightarrow A$

6. $(\bar{z} \vee y) \oplus (\bar{z} \oplus \bar{x})$

7. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$

8. $(\overline{A \Rightarrow B}) \vee \left(\bar{B} \wedge \bar{A}\right) \Rightarrow \left((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}\right) \oplus A$

9. $(\bar{z} \vee x) \Leftrightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \vee \bar{x})\right)$

10. $((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow \bar{A}$

11. $x|(y \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x|y) \vee (x|z)$

$(\bar{z} \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow \left(\bar{z} \,|\, (y \oplus \bar{x})\right)$

Практическая работа № 20. Выполнение операций над событиями. Применение классического определения к вычислению вероятности.

Определение. ***Событием*** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. ***Полной группой событий*** называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. ***Достоверным событием*** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются ***равновозможными,*** если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

П р и м е р 1.1. Подбрасывается правильная монета и регистрируется сторона (герб или решка) монеты, которая обращена к наблюдателю после ее падения. Пространство Ω состоит из двух точек: $\omega 1$ = Г (выпал герб) и $\omega 2$ = Р (выпала решка). Любое событие А в этом примере является либо элементарным, либо достоверным.

П р и м е р 1.2. Правильная монета подбрасывается два раза или, что одно и то же, подбрасываются две монеты. Пространство Ω содержит четыре точки: ГГ, ГР, РГ, РР. Событие А = {ГР,РГ} означает, что монеты выпали на разные стороны, и, очевидно, не является элементарным событием. Интересно, что на раннем этапе становления теории вероятностей событие А трактовалось как элементарное (то есть полагалось Ω = {ГГ, А, РР}), и это приводило к вероятностной модели результатов испытаний двух правильных монет, которая противоречила наблюдаемой частоте элементарных исходов.

Операции над событиями

Определение. События A и B ***называются равными***, если осуществление события A влечет за собой осуществление события B и наоборот.

Определение. ***Объединением или суммой событий*** A_k называется событие A, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение. ***Пересечением или произведением событий*** A_k называется событие A, которое заключается в осуществлении всех событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. ***Разностью событий*** A и B называется событие C, которое означает, что происходит событие A, но не происходит событие B.

$$C = A \setminus B$$

Определение. ***Дополнительным к событию*** A называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие A не происходит.

Определение. ***Элементарными исходами опыта*** называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие A, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

Количество подмножеств данного конечного множества

Выясним, сколько всего подмножеств имеет множество A с $N(A) = n$.

Теорема 2.

Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n , т.е.

$N(M(A)) = 2^n$

Доказательство: Перенумеруем элементы множества A и для каждого подмножества B $\subset M(A)$ построим последовательность длины n из нулей и единиц по следующему правилу: на $k-$ом месте пишем 1, если элемент

$a \in B$, и пишем 0, если $a \notin B$.

Итак, каждому подмножеству будет соответствовать своя последовательность из нулей и единиц. Например, пустому множеству Ø соответствует последовательность из одних нулей, а самому множеству A – последовательность из одних единиц. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: каждой последовательности из множества P последовательностей длины n из нулей и единиц соответствует одно подмножество $B \subset M(A)$. Таким образом, между множествами

$M(A)$ и P установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, эти множества эквивалентны и как конечные множества имеют одинаковое количество элементов, т.е. $N(M(A)) = N(P)$. Но $N(P) = N(\{0;1\}\ 2^n) = 2^n$ в силу формулы ,

поэтому и $N(M(A)) = 2^n$. Теорема 2 доказана.

Задания к практическому занятию:

1. Найдите вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 27 является делителем числа 60.
2. Куб с окрашенными гранями распилили на 125 кубиков меньшего размера. Определите вероятность того, что случайно выбранный кубик имеет ровно две окрашенные грани.
3. Определите вероятность того, что случайно выбранное целое число от 1 до 17 при возведении в квадрат дает число, оканчивающееся единицей.
4. Длины пяти отрезков равны соответственно 1, 3, 4, 5, 6 единицам. Найдите вероятность того, что из трех случайно выбранных из них отрезков можно построить треугольник.
5. Найдите вероятность того, что случайно выбранное целое число от 1 до 50 не делится ни на 2, ни на 3.
6. Случайным образом выбирается один из дней года. Определите вероятность того, что число и номер месяца записываются с помощью только одной цифры.
7. Определите вероятность того, что случайно выбранное целое число от 1 до 100 является простым.
8. Найдите вероятность того, что кость, извлеченная наудачу из полного набора домино, имеет сумму очков, равную четырем.
9. Найдите вероятность того, что сумма цифр случайно выбранного целого числа от 12 до 66 равна 7.

Практическая работа № 21. Вычисление вероятностей по теоремам сложения и умножения вероятностей. Вычисление вероятностей по формуле полной вероятности, формуле Бейеса. Схема Бернулли.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1: *Если события* $A_1, A_2,..., A_n$ *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Определение. Событие А называется независимым от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется условной вероятностью события В.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)\ldots P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B / \overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ - две осечки подряд

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ - две осечки подряд

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий* $H_1, H_2, ..., H_n$, *равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Фактически эта формула полной вероятности уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$

Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;

- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;

- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Формула Бейеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется формулой Бейеса.

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $P(H_i) = p$, то формула Бейеса принимает вид:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи.

Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

Задача. 1:

В лотерее каждый десятый билет выигрывает 10 рублей, сам же лотерейный билет стоит 1 рубль. Некто приобрел 10 билетов. Найти вероятность того, что он:

а) не будет в проигрыше;

б) будет в выигрыше.

Решение

Вероятность выиграть по произвольному билету, по формуле классической вероятности равна p=0.1 Проводится n=10 испытаний с одинаковой вероятностью наступления события в каждом. Для того чтобы игрок не был в проигрыше, должен выиграть хотя бы один билет то есть k>=1 Для того чтобы игрок был в выигрыше, должно выиграть как минимум два билета или k>1 По формуле Бернулли,

Теперь найдем вероятность противоположного события p(k>=1)=1-p(k<1)=1-0.349=0.651 - вероятность не оказаться в проигрыше

P(k>=1)=p(k>1)+p(k=1) - вероятность суммы несовместных событий

P(k>1)=p(k>=1)-p(k=1)=0.651-0.387=0.264 - вероятность выигрыша

Ответ: а)0,651 б)0,264

Задания к практическому занятию:

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?
2. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются 3 карты. Определите вероятность того, что сумма очков в этих картах равна 21, если валет составляет 2 очка, дама – 3, король – 4, туз – 11, а остальные карты – соответственно 6, 7, 8, 9, 10 очков.
3. 2 стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0,6, а для другого – 0,7. Найдите вероятность того, что:

а) только один из стрелков попадет в мишень;

б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень;

в) оба стрелка попадут в мишень;

г) ни один из стрелков не попадет в мишень;

д) ни один из стрелков не попадет в мишень.

1. В 2 урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?
2. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. Найдите вероятность того, что: а) наудачу выбранный стрелок попадет в цель; б) 2 наудачу выбранных стрелка попадут в цель.
3. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс H_1 (мало рискует), класс H_2 (рискует средне), класс H_3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат к классу H_1, 50% - к классу H_2 и 20 % - к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,01, для водителей класса H_2 эта вероятность равна 0,02, а для водителя класса H_3 – 0,08. Водитель А страхует свою машину и в течение года попадет в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_1? К классу H_2? К классу H_3?

Практическая работа № 22. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Составление закона распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение.

Случайная величина – это величина, которая в результате эксперимента (опыта, испытания) принимает одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно. **Примеры случайных величин:**

число дефектных деталей в партии при контроле качества;

процент завершенного строительства жилого дома спустя 6 месяцев;

число клиентов операционного отдела банка в течение рабочего дня;

число продаж автомобилей в течение месяца.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами: X, Y, Z и т. п. Строчные буквы используются для обозначения определенных значений случайной величины. Например, случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ..., x_n. Различают случайные, дискретные и непрерывные величины.

Дискретной (прерывной) случайной величиной называют случайную величину, которая принимает конечное или бесконечное (но счетное) число отдельных, изолированных возможных значений с определенными вероятностями. Число студентов на лекции – дискретная случайная величина.

Совокупность значений может быть задана таблицей, функцией или графиком. Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения дискретной случайной величины**.

Простейшей формой закона распределения для дискретных случайных величин является ряд распределений.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в которой перечислены возможные (различные) значения этой случайной величины x_1, x_2, ..., $x_п$ с соответствующими им вероятностями p_1, p_2, ..., p_n.

x_i	x_1	x_2	…	$x_п$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Таким образом, случайная величина X в результате испытания может принять одно из возможных значений x_1, x_2, ..., $x_п$ с вероятностями

$P\ (X = x_1) = p_1$; $P(X = x_2) = p_2$; $P(X = x_п) = p_n$.

Можно использовать более короткую запись: P(x) = P(5) = 0,2. Так как события ($X = x_1$), ($X = x_2$), …, ($X = x_п$) составляют полную группу событий, то сумма вероятностей p_1, p_2, ..., p_n равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,.$$

Ряд распределения случайной дискретной величины должен удовлетворять следующим условиям:

$$P(x) \geq 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1\,.$$

Пример. Каждый день местная газета получает заказы на новые рекламные объявления, которые будут напечатаны в завтрашнем номере. Число рекламных объявлений в газете зависит от многих факторов: дня недели, сезона, общего состояния экономики, активности местного бизнеса и т. д. Пусть X – число новых рекламных объявлений, напечатанных в местной газете в определенный день. X – случайная величина, которая может быть только целым числом. В нашем примере случайная величина X принимает значения 0; 1; 2; 3; 4; 5 с вероятностями 0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1 соответственно (табл. 1).

Т а б л и ц а 1 . Ряд распределения случайной величины X

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$=	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Поскольку появления различных значений случайной величины X – несовместные события, то вероятность того, что в газету будут помещены или 2 или 3 рекламных объявления, равна сумме вероятностей P(2) + P(3) = 0,3 + 0,2 = 0,5. Вероятность же того, что их число будет находиться в пределах от 1 до 4 (включая 1 и 4), равна 0,8, т. е. $P(1 \le X \le 4) = 0{,}8$; а P(X = 0) = 0,1. Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Если точки (x_i, p_i) соединить отрезками прямых, то полученная ломаная линия есть **многоугольник** (или **полигон**) **распределения**.

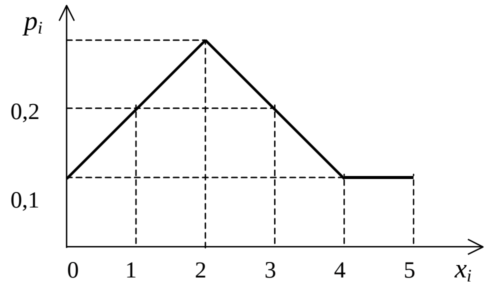


Рис. 1. Полигон распределения

Пример1. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 10 руб. и одна – стоимостью в 30 руб. Составить закон распределения случайной величины X – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 1 руб., если всего продано 50 билетов.

Решение: Случайная величина X может принимать три значения: 1 руб. (если владелец билета не выиграет, а фактически проиграет 1 руб., уплаченный им за билет); 9 руб.; 29 руб. (фактический выигрыш уменьшается на стоимость билета – 1 руб.). Первому результату благоприятствуют 47 исходов из 50, второму – два, а третьему – один. Поэтому их вероятности таковы: P(X = –1) = 47/50 = 0,94; P(X =9) = 2/50 = 0,04; P(X = 29) = 1/50 = 0,02;

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

Сумма выигрыша, X	–1	9	29
Вероятность, P	0,94	0,04	0,02

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i$ = 0,94 + 0,04 + 0,02 = 1.

Пример 2:

В коробке лежат 10 исправных и 3 неисправных батарейки. На удачу извлекаются 3 батарейки. Составить закон распределения случайной величины --- числа исправных батареек среди извлеченных.

Решение

Пусть X- дискретная случайная величина- число неисправных батареек. X может принимать значения 0,1,2 или 3. Найдем вероятности каждого из значений X.

Вероятность для каждой батарейки быть неисправной определяем по формуле классической вероятности.

Проводится n=3 испытания Бернулли в каждом из которых p=0.231, q=1-p=0.769

По формуле Бернулли

Проверка: p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=0.455+0.410+0.123+0.012=1.00

Получаем закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3
P	0,455	0,410	0,123	0,012

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать любые значения на числовом интервале.

Примеры непрерывных случайных величин: возраст студентов, длина ступни ноги человека, масса детали и т. д. Это положение относится ко всем случайным величинам, измеряемым на непрерывной шкале, таким как меры веса, длины, времени, температуры, расстояния. Измерение может быть проведено с точностью до какого-нибудь десятичного знака, но случайная величина – теоретически непрерывная величина. В экономическом анализе находят широкое применение относительные величины, различные индексы экономического состояния, которые также вычисляются с определенной точностью, скажем, до двух знаков после запятой, хотя теоретически их значения – непрерывные случайные величины.

У непрерывной случайной величины возможные значения заполняют некоторый интервал (или сегмент) с конечными или бесконечными границами.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно задать в виде **интегральной функции распределения**, являющейся наиболее общей формой задания закона распределения случайной величины, а также в виде **дифференциальной функции** (плотности распределения вероятностей), которая используется для описания распределения вероятностей только непрерывной случайной величины.

Функция распределения (или интегральная функция) $F(x)$ – универсальная форма задания закона распределения случайной величины. Для непрерывной случайной величины функция распределения также определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного действительного числа x, т. е.

$F(x) = F(X < x)$.

При изменении x меняются вероятности $P(X < x) = F(x)$. Поэтому $F(x)$ и рассматривают как функцию переменной величины. Принято считать, что случайная величина X известна, если известна ее функция распределения $F(x)$.

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: **случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной**.

Свойства функции распределения.

1. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между 0 и 1, т.е. $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$. Тогда $P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) – P(X < x_1) = F(x_2) – F(x_1)$.

3) так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $P(x_1 \le \le X < x_2) \ge 0$, а следовательно, $F(x_2) – F(x_1) \ge 0$ и $F(x_2) \ge F(x_1)$.

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (α, β), равна приращению функции распределения на этом интервале, т. е.

$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) – F(\alpha)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

$P(X = x_1) = 0$.

Согласно сказанному, равенство нулю вероятности $P(X = x_1)$ не всегда означает, что событие $X = x_1$ невозможно. Говоря о вероятности события $X = x_1$, априорно пытаются угадать, какое значение примет случайная величина в опыте.

Если x_1 лежит в области возможных значений непрерывной случайной величины X, то с некоторой уверенностью можно предсказать область, в которую случайная величина может попасть. В то же время невозможно хотя бы с малейшей степенью уверенности угадать, какое конкретное значение из бесконечного числа возможных примет непрерывная случайная величина.

Например, если метеослужба объявляет, что температура воздуха в полдень составила 5 °C, то это не означает, что температура будет точно равна этому значению. Вероятность такого события равна нулю.

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то

F(x) = 0 при x ≤ α; F(x) = 1 при x > β.

В самом деле, F(x) = 0 для всех значений x ≤ α и F(x) = 1 при x > β, поскольку события X < x для любого значения x ≤ α, являются в этом случае невозможными, а для любого значения x > β – достоверными.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной личины расположены на всей оси OX, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

или F(– ∞) = 0; F(+ ∞) = 1. Это следствие справедливо и для дискретных случайных величин.

Практическая работа№ 23. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Закон больших чисел.

Методика вычисления математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения НСВ по её функции плотности.

Математическое ожидание случайной величины.

Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, т.е. приближенно равно ее среднему значению (вероятностный смысл математического ожидания). Иногда знания этой характеристики достаточно для решения задачи. Например, при оценке покупательной способности населения вполне может хватить знания среднего дохода, при анализе выгодности двух видов деятельности можно ограничиться сравнением их средних прибыльностей. Знание того, что выпускники данного университета зарабатывают в среднем больше выпускников другого, может послужить основанием для принятия решения о поступлении в данный ВУЗ и т.п.

Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется соотношением:

$$M(X) = M_X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ , где } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Математическое ожидание **непрерывной** случайной величины равно

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

где $f(x)$ - плотность вероятности.

Свойства математического ожидания

Прежде чем формулировать свойства математического ожидания необходимо пояснить смысл арифметических операций $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$ и т.п., где X и Y – дискретные случайные величины.

Например, под суммой $X+Y$ понимается случайная величина Z, значениями которой являются все допустимые суммы $z_{ij}=x_i+y_j$, где x_i и y_j – все возможные значения соответственно случайных величин X и Y.

Свойства математического ожидания:

Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$

Математическое ожидание суммы (разности) двух или нескольких случайных величин X и Y равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$

Следствие. Если C – постоянная величина, то

$$M(X+C)=M(X)+C$$

Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких **взаимно независимых** случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX)=C\cdot M(X)$.

Дисперсия случайной величины и ее свойства. На практике часто требуется оценить рассеяние случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, акции двух компаний могут приносить в среднем одинаковые дивиденды, однако вложение денег в одну из них может быть гораздо более рискованной операцией, чем в другую. Поэтому возникает необходимость в числовой характеристике, оценивающей разброс возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения (математического ожидания). Такой характеристикой является **дисперсия**.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right).$$

Легко показать, что вышеприведенное выражение может быть записано в виде

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Действительно, используя основные теоремы о математическом ожидании, получим

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M\left(X^2 - 2XM(X) + M(X)^2\right) =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$$

В случае **дискретной** случайной величины, имеющей закон распределения (x_i, p_i) $(i = 1,2,...,n)$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i \cdot$$

Для **непрерывной** случайной величины формула для расчета дисперсии имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2.Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Если C – постоянная величина, то $D(X + C) = D(X)$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

Пример. Пусть закон распределения дискретной случайной величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение: Рассчитаем вначале математическое ожидание

$M(X) = 1\cdot 0.07 + 2\cdot 0.21 + 3\cdot 0.55 + 4\cdot 0.16 + 5\cdot 0.01 = 2.83$

Дисперсия равна

$D(X) = (1-2.83)^2\cdot 0.07 + (2-2.83)^2\cdot 0.21 + (3-2.83)^2\cdot 0.55 + (4-2.83)^2\cdot 0.16 +$
$(5-2.83)^2\cdot 0.01 = 0{,}661$

Пример. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна

$$f(x) = \exp(-x), \text{ где } \quad x > 0$$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение: Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^{-x}dx & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x]\Big| + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Далее,

$$M(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} U = x^2 & dU = 2x\,dx \\ dV = e^{-x} & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x^2]\Big| + 2\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 2$$

Найдем дисперсию, используя формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - 1 = 1.$$

Среднее квадратическое отклонение.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ (или стандартом) случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $D(X)$ этой величины:

$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$.

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратичное отклонение, а не дисперсию.

Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения широко используется практически во всех областях человеческой деятельности, связанных с процессами измерений.

Так, например, в технике, они характеризуют точность измерительной аппаратуры (чем выше среднеквадратическое отклонение (разброс) при измерениях, тем хуже качество прибора).

Примерами использования данных параметров в экономике могут служить изучение риска различных действий со случайным исходом, в частности, при анализе риска инвестирования в ту или иную отрасль, при оценивании различных активов в портфеле ценных бумаг и т.д.

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$f(M_0) = \max$.

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двухмодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Определение. Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$P(X < M_D) = P(X > M_D)$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Определение. Начальным моментом порядка *k* случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Закон больших чисел

Под *законом больших чисел* в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, по формулировке А.Н. Колмогорова, совокупное действие большого числа случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая.

Другими словами, при большом числе случайных величин их средний результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Под законом больших чисел в *узком* смысле понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к определенным постоянным, неслучайным величинам.

Рассмотрим различные формы закона больших чисел, образующих ряд так называемых предельных теорем.

Неравенство Чебышева

Для любой СВ X , имеющей МОЖ - m_n и дисперсию *Д(x),* справедливо неравенство

$$p\left(\left|X-m\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{Д\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}, \qquad (1)$$

где ε - любое положительное число.

Неравенство (1) ограничивает сверху вероятности больших отклонений СВ от её МОЖ.

Неравенство Чебышева иногда записывают в виде

$$p\left(\left|X-M\left(X\right)\right|<\varepsilon\right)\geq1-\frac{Д\left(X\right)}{\varepsilon^{2}} \qquad (2)$$

Пример Дана СВ X с МОЖ - M (X) и дисперсией $\sigma^{2}\left(X\right)$.

Оценить сверху вероятность того, что СВ X отклонится от своего МОЖ не меньше чем на 3 $\sigma^{2}\left(X\right)$.

Решение. Используя неравенство Чебышева (1) и полагая $\varepsilon=3\sigma$, получим

$$p\left(\left|X-M\left(X\right)\right|\geq3\sigma\right)\leq\frac{Д\left(X\right)}{9\sigma^{2}}=\frac{\sigma^{2}}{9\sigma^{2}}=\frac{1}{9}\approx0{,}111.$$

Следовательно, вероятность того, что отклонение СВ от ее МОЖ выйдет за пределы трех СКО, не может быть больше 1/9 ≈ 0,111.

С другой стороны можно показать, что для большинства СВ, встречающихся на практике, ошибка «правила трех сигм» гораздо меньше этого значения. Например, при оценке вероятности ошибки «правила трех сигм» для показательного распределения СВ X:

$$f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x};\quad x>0;\quad \lambda>0;\quad m=\frac{1}{\lambda};\quad Д\left(X\right)=\frac{1}{Д^{2}}$$

$$p\left(\left|X-m\right|\geq3\sigma\right)\leq e^{-4}\approx0{,}018.$$

Если воспользоваться правилом «трех сигм», для нормального распределения, то эта вероятность равна 0,0027, Таким образом, оценка, полученная с помощью неравенства Чебышева, не точная. Важность этого неравенства заключается в его универсальности, и поэтому его используют в основном для доказательства других теорем.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.- 368с.

Список дополнительной литературы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017.
   http://znanium.com/catalog/product/615108