ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим работам и практической подготовке
по учебной дисциплине
«Математика»
для обучающихся по специальности
40.02.01 «Право и организация социального обеспечения»

Ставрополь, 2022

Содержание

Формирование общих и профессиональных компетенций средствами дисциплины «Математика»

Изучение математики играет решающую роль в системе профессионального образования, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой. Внедрение новых стандартов среднего профессионального образования обеспечило компетентностный подход и изменило содержание образовательной программы по математике на разных специальностях.

Во все времена математика имела огромное значение в формировании стиля мышления обучающего, и это в настоящее время – время внедрения Федеральных государственных образовательных стандартов третьего поколения, не утратило свою значимость. С переходом на стандарты нового поколения, которые разработаны с позиций компетентностного подхода в образовании, вопрос повышения качества обучения математике приобретает особую актуальность.

Под компетенцией в ФГОС понимается способность применять знания, умения, личностные качества и практический опыт для успешной деятельности в определенной области.

В соответствии с ФГОС средствами дисциплины "Математика" и других дисциплин должны быть сформированы общие и профессиональные компетенции.

Общие компетенции означают совокупность социально – личностных качеств выпускника, обеспечивающих осуществление деятельности на определенном квалификационном уровне. Под профессиональными компетенциями понимается способность действовать на основе имеющихся умений, знаний и практического опыта в определенной профессиональной деятельности.

Выпускники специальности «Право и организация социального обеспечения» должны обладать следующими общими компетенциями:

ОК1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес

ОК2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность

ОК4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности

Формирование *общих компетенций* направленно на развитие способностей успешно действовать на основе практического опыта, умений и знаний при решении задач, общих для многих видов профессиональной деятельности. *Общие компетенции* характеризуют взаимодействие человека с социумом, другими людьми, с самим собой, они характеризуются надпредметностью и междисциплинарностью, требуют значительного интеллектуального развития.

Планируемые личностные результаты в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 14. Готовый соответствовать ожиданиям работодателей: проектно-мыслящий, эффективно взаимодействующий с членами команды и сотрудничающий с другими людьми, осознанно выполняющий профессиональные требования, ответственный, пунктуальный, дисциплинированный, трудолюбивый, критически мыслящий, нацеленный на достижение поставленных целей; демонстрирующий профессиональную жизнестойкость.

Составитель: преподаватель Еремина Е.Р.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественнонаучных дисциплин, БЖД», протокол №6 от «25» мая2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26» мая 2022 г.

Практическое занятие №1. Предел числовой последовательности.

Введение в математический анализ.

Числовая последовательность.

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана **последовательность**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Общий элемент последовательности является функцией от n.

$$x_n = f(n)$$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$ или $\{x_n\} = 1; 0; 1; 0; \ldots$

Для последовательностей можно определить следующие **операции**:

1) Умножение последовательности на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Сложение (вычитание) последовательностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Ограниченные и неограниченные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует такое число M>0, что для любого n верно неравенство:

$$|x_n| < M$$

т.е. все члены последовательности принадлежат промежутку (-M; M).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$называется **ограниченной сверху**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \le M.$$

<u>Определение.</u> Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если для любого n существует такое число M, что

$$x_n \ge M$$

<u>Пример.</u> $\{x_n\} = n$ – ограничена снизу $\{1, 2, 3, \dots\}$.

<u>Определение.</u> Число **a** называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n>N$ выполняется условие:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Это записывается: $\lim x_n = a$.

В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к a при $n\to\infty$.

<u>Свойство:</u> Если отбросить какое- либо число членов последовательности, то получаются новые последовательности, при этом если сходится одна из них, то сходится и другая.

<u>Пример.</u> Доказать, что предел последовательности $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Пусть при $n>N$ верно $\left|0 - \frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, таким образом, если за N взять целую часть от $\frac{1}{\varepsilon}$, то утверждение, приведенное выше, выполняется.

<u>Пример.</u> Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 3, $2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}$ имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$ Очевидно, что существует такое число n, что $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim \{x_n\} = 2$.

<u>Теорема.</u> *Последовательность не может иметь более одного предела.*

<u>Доказательство.</u> Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, не равные друг другу.

$$x_n \to a;\ x_n \to b;\quad a \ne b.$$

Тогда по определению существует такое число $\varepsilon>0$, что

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Запишем выражение: $|a-b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

А т.к. ε- **любое** число, то $|a-b| = 0$, т.е. a = b. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то* $|x_n| \to |a|$.

<u>Доказательство.</u> Из $x_n \to a$ следует, что $|x_n - a| < \varepsilon$. В то же время:

$||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, т.е. $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, т.е. $|x_n| \to |a|$. Теорема доказана.

<u>Теорема.</u> *Если $x_n \to a$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

Следует отметить, что обратное утверждение неверно, т.е. из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Например, последовательность $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, \textit{при четном } n \\ 2 - \frac{1}{n}, \textit{при нечетном } n \end{cases}$ не имеет предела, хотя $|x_n| \le 2$.

Монотонные последовательности.

<u>Определение.</u> 1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность возрастающая.

2) Если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех n, то последовательность неубывающая.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность убывающая.

4) Если $x_{n+1} \le x_n$ для всех n, то последовательность невозрастающая

Все эти последовательности называются **монотонными.** Возрастающие и убывающие последовательности называются **строго монотонными**.

<u>Пример.</u> $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример.Доказать, что последовательность $\{x_n\}=\dfrac{n}{2n+1}$ монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}=\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=$

$=\dfrac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0$, т.к. $n\in N$, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1}>x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример.Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность

$\{x_n\} = \dfrac{n}{5^n}$.

Найдем $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Найдем разность $x_{n+1}-x_n=\dfrac{n+1}{5\cdot 5^n}-\dfrac{n}{5^n}=\dfrac{n+1-5n}{5\cdot 5^n}=$

$=\dfrac{1-4n}{5\cdot 5^n}$, т.к. $n\in N$, то $1-4n<0$, т.е. $x_{n+1}<x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Следует отметить, что монотонные последовательности ограничены по крайней мере с одной стороны.

Теорема. *Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. Рассмотрим монотонную неубывающую последовательность

$$x_1\le x_2\le x_3\le \ldots \le x_n\le x_{n+1}\le \ldots$$

Эта последовательность ограничена сверху: $x_n\le M$, где M – некоторое число.

Т.к. любое, ограниченное сверху, числовое множество имеет четкую верхнюю грань, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число N, что $x_N>a-\varepsilon$, где a – некоторая верхняя грань множества.

Т.к. $\{x_n\}$- неубывающая последовательность, то при $N>n$ $a-\varepsilon<x_N\le x_n$,

$x_n>a-\varepsilon$.

Отсюда $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$-\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$ или $|x_n-a|<\varepsilon$, т.е. $\lim x_n = a$.

Для остальных монотонных последовательностей доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Число *e*.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ монотонная и ограниченная, то она имеет конечный предел.

По формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

или, что то же самое

$$x_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – возрастающая. Действительно, запишем выражение x_{n+1}и сравним его с выражением x_n:

$$x_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Каждое слагаемое в выражении x_{n+1}больше соответствующего значения x_n, и, кроме того, у x_{n+1}добавляется еще одно положительное слагаемое. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Докажем теперь, что при любом n ее члены не превосходят трех: $x_n< 3$.

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{\text{геометр прогрессия}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Итак, последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$- монотонно возрастающая и ограниченная сверху, т.е. имеет конечный предел. Этот предел принято обозначать буквой *e*.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Из неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ следует, что e ≤ 3. Отбрасывая в равенстве для $\{x_n\}$ все члены, начиная с четвертого, имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходя к пределу, получаем

$$e \geq 2+\frac{1}{2} = 2{,}5$$

Таким образом, число e заключено между числами 2,5 и 3. Если взять большее количество членов ряда, то можно получить более точную оценку значения числа e.

Можно показать, что число e иррациональное и его значение равно 2,71828…

Аналогично можно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, расширив требования к x до любого действительного числа:

Предположим: $n \leq x \leq n+1$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$$

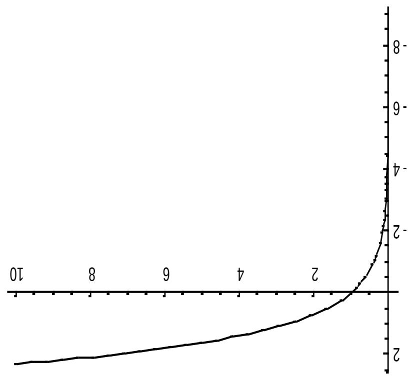
$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} \geq 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Число e является основанием натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad т.е. \quad e^y = x.$$



Выше представлен график функции y = lnx.

Связь натурального и десятичного логарифмов.

Пусть x = 10^y, тогда $\ln x = \ln 10^y$, следовательно $\ln x = y\ln 10$

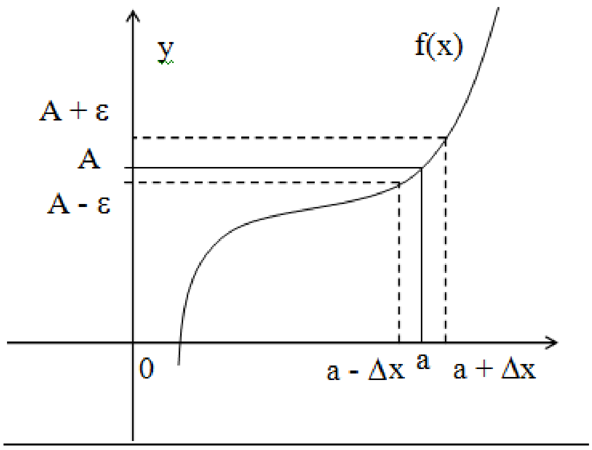
$y = \lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = M\ln x$; $\ln x = \dfrac{1}{M}\lg x$, где M = 1/ln10 ≈ 0,43429…- модуль перехода.

Вопросы к занятию

1. Что такое числовая последовательность?
2. Что называют пределом последовательности?
3. Какая последовательность называется ограниченной?
4. Перечислите основные свойства пределов.
5. Как найти предел простейших последовательностей?
6. Как ликвидировать неопределенность ∞/∞ при нахождении предела?
7. Как ликвидировать неопределенность 0/0 при нахождении предела?
8. Приведите примеры последовательностей.

Практическое занятие №2. Предел и непрерывность функции.

Предел функции в точке



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

Определение. Число А называется **пределом** функции f(x) при x→a, если для любого ε>0 существует такое число Δ>0, что для всех x таких, что

$$0<|x - a|<\Delta$$

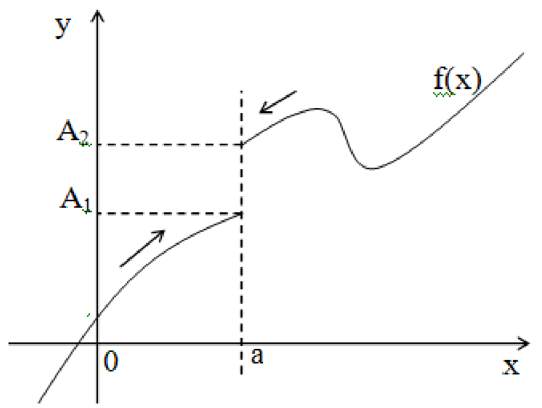
верно неравенство $|f(x) - A|<\varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta<x<a + \Delta$, $x\neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon<f(x) <A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Определение.Если $f(x) \to A_1$при $x \to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а еслиf(x) $\to A_2$при $x \to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

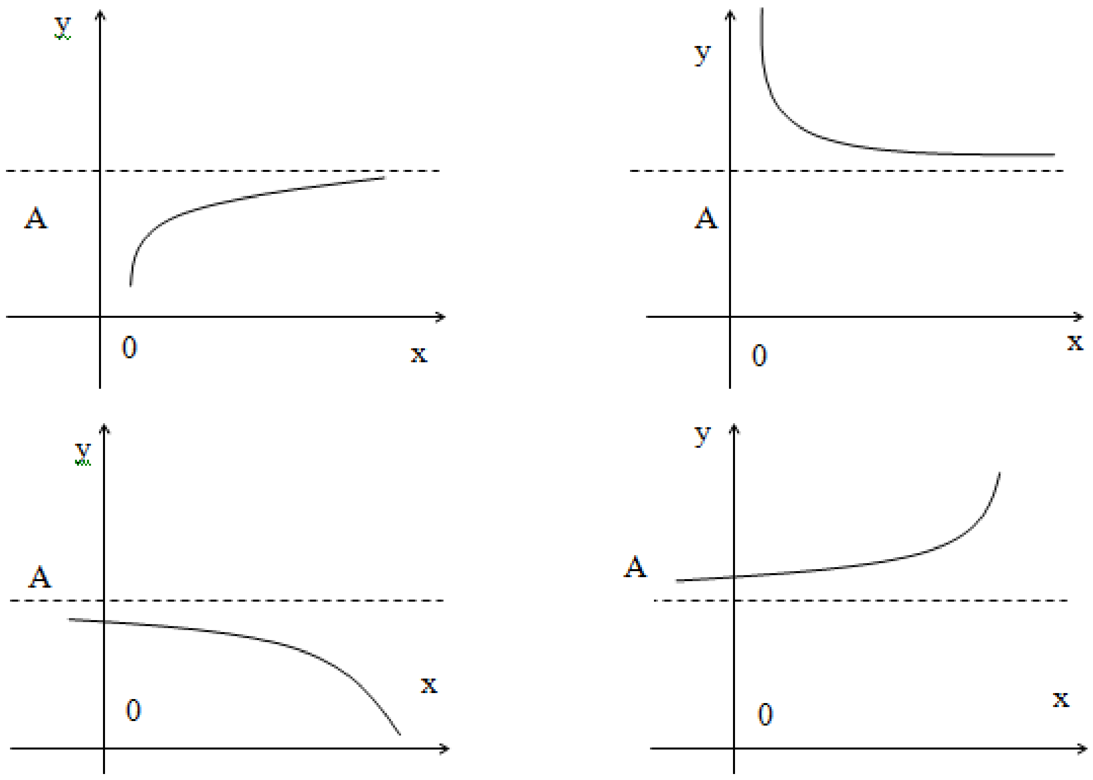
Определение.Число A называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:



Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ для любого x>Mи

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

<u>Теорема1.</u> $\lim_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

<u>Теорема2.</u> $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

<u>Теорема 3.</u> $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

<u>Следствие.</u> $\lim_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

<u>Теорема 4.</u> $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ при $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

<u>Теорема 5.</u> *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim_{x \to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела приf(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤f(x) ≤u(x) вблизи точки x = a и* $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim_{x\to a} = A$

.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|$<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \le |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Некоторые замечательные пределы.

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m \\ \infty, & при \quad n > m \end{cases}}$

Первый замечательный предел. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$

Второй замечательный предел. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} =} m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x} = \left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{matrix}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^{4}$$

Пример.Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0;$	$x^2 - 8x + 12 = 0;$
$D = 36 - 32 = 4;$	$D = 64 - 48 = 16;$
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример.Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженноевыражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Пример.Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3),\ \text{т.к.}$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \; x - 1$

$x^3 - x^2 \qquad x^2 - 5x + 6$

$-5x^2 + 11x$

$-5x^2 + 5x$

$6x - 6$

$6x - 6$

0

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h - 1)}{h^2} =$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a\cdot(-1/2) = -\sin a$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$ - не определен, т.к. при стремлении х к 2 имеют место различные односторонние пределы $-\infty$ и $+\infty$.

Задания к практической подготовке

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3 - 7x^2 + 5x^3}{2 + 2x - x^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 + 10x + 21}{x^2 + 8x + 15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x} - 2}{\sqrt{4-x} - 3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}\dfrac{2\tilde{o}^2 - 7x - 4}{2\tilde{o}^2 - 13x + 20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}\dfrac{3 - \sqrt{x+11}}{2 - \sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1 - \cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\left(\frac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{1-\cos\tilde{o}}{\tilde{o}\sin x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{1-\cos\tilde{o}}{1-\cos 3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,3x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_4\left(\frac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\cos 3\tilde{o}-1}{\tilde{o}\,tg 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[3]{\frac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}{\tilde{o}\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{4+5\tilde{o}^2-3x^5}{8-6\tilde{o}-\tilde{o}^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\arcsin\left(\frac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-3}\frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{\cos\tilde{o}-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

9. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{\tilde{o}-2\tilde{o}^3-5x^4}{2+3\tilde{o}^2+\tilde{o}^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to3}\frac{\tilde{o}^2+4x-21}{2\tilde{o}^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{\tilde{o}tg3x}{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{3\tilde{o}+14\tilde{o}^2}{1+2\tilde{o}+7\tilde{o}^2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\frac{\tilde{o}-\tilde{o}^2}{1-2\tilde{o}^2}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-5}\frac{\tilde{o}^2-25}{\tilde{o}^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{\tilde{o}\sin2x}{tg^2 3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

11. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{3-7\tilde{o}^2+5\tilde{o}^3}{2+2\tilde{o}-\tilde{o}^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-3}\frac{\tilde{o}^2+10x+21}{\tilde{o}^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-5}\frac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x^2-4x})$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$;б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

Непрерывность функции в точке.

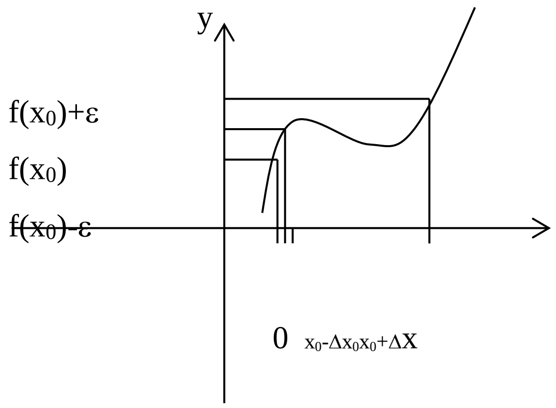
<u>Определение.</u>Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

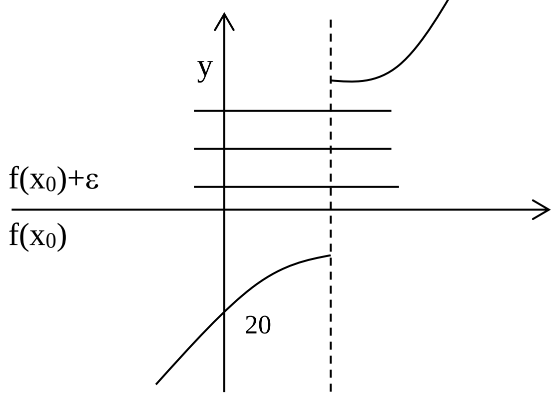
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

<u>Определение.</u>Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



$f(x_0)-\varepsilon$

x_0 x

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sinи cosнепрерывны на своей области определения.
Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования:

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx→0 $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, а т.к.

предел функции синус $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$, то она является бесконечно малой при Δx→0.

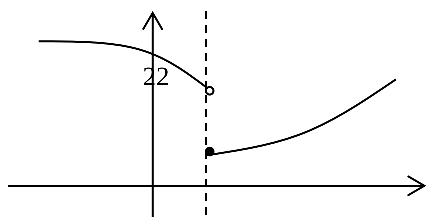
Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения x = x_0 из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что x = x_0 является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

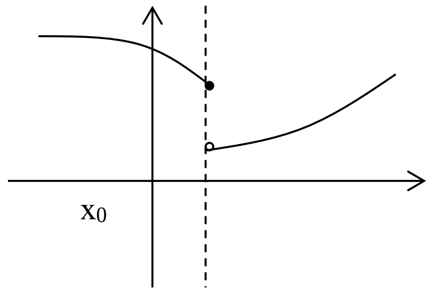
Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x\to x+0}f(x)=f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



x_0

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

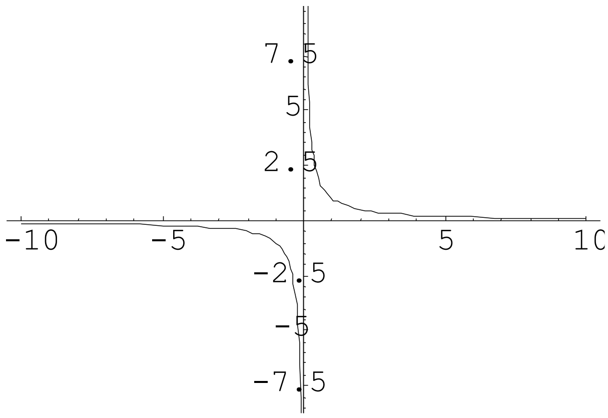
<u>Пример.</u> Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример.Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

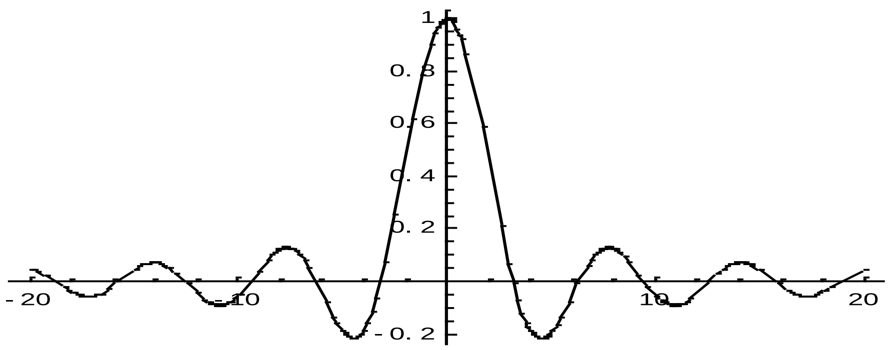


Пример.f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

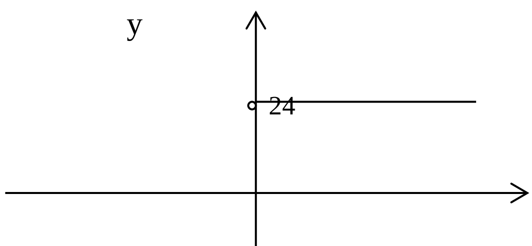
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример.f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



1

0 x

-1

Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому-либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция $f(x)$- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\mathrm{sign}(f(a)) \neq \mathrm{sign}(f(b))$, то $\exists x_0$: $f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

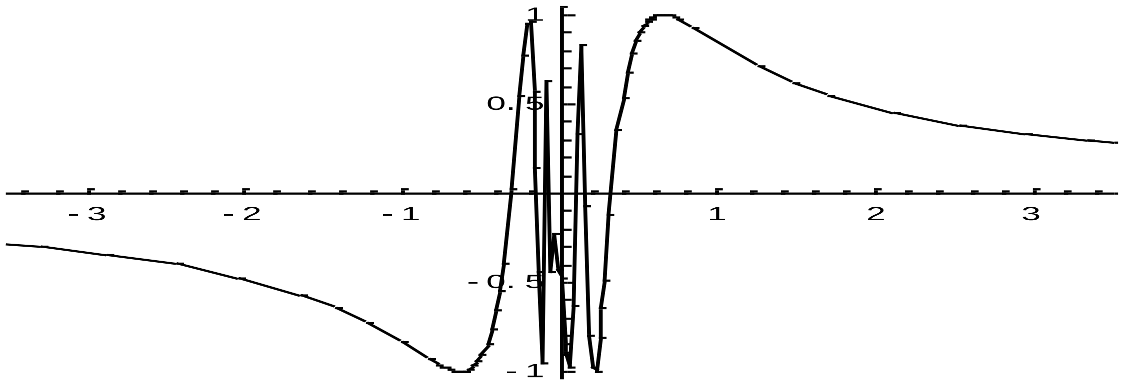
верно неравенство $$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x.

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin \dfrac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

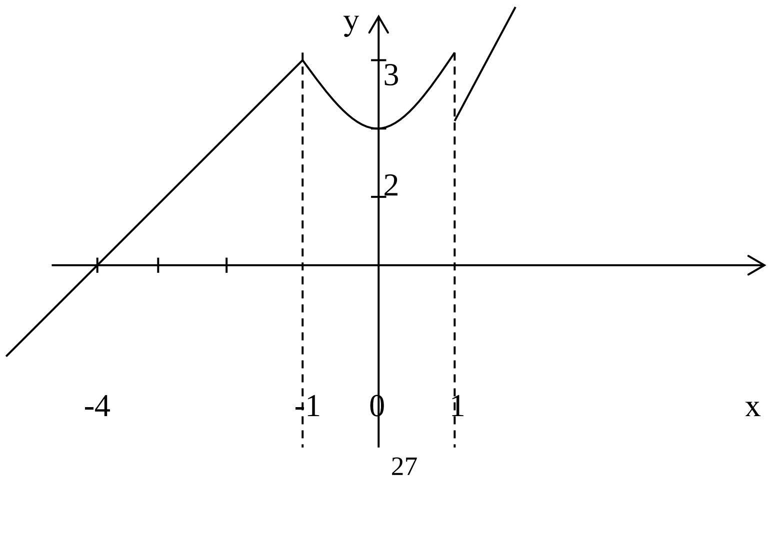
<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

<u>Пример.</u>Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

в точке x = -1 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

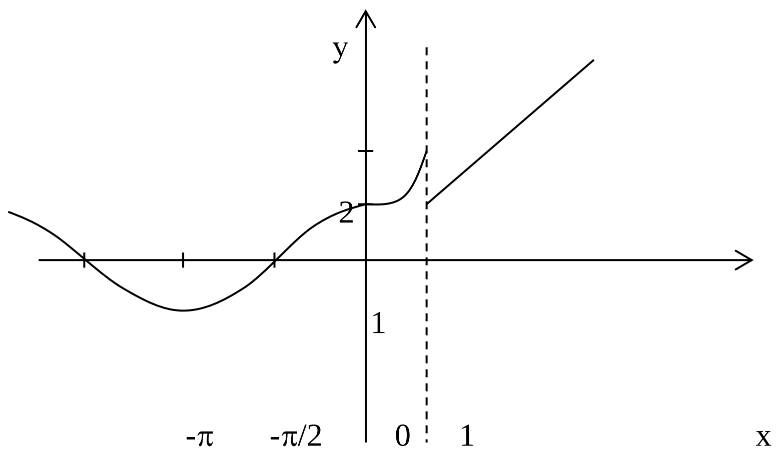


Пример.Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Задания к практической подготовке

Задание№1: Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2,} x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, x>1.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}-\dfrac{2|x|}{x}, x<0\\ \sqrt{4-x^2}, 0\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{9-x^2}, 0\le x\le 3,\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, x>2.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3,} x<-3,\\ -\sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 3,\\ \dfrac{|x-3|}{x-3}, x>3.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 0,\\ \dfrac{|x|}{x}, x>0.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2,} x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{2|x|}{x}, x>2.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 0,\\ \dfrac{3|x|}{x}, x>0.\end{cases}$

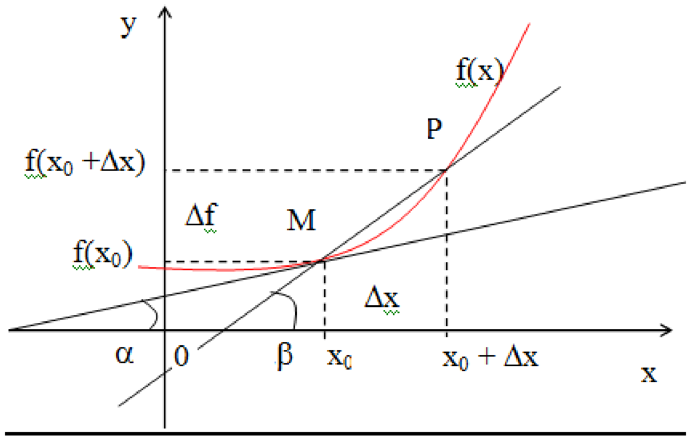
Вопросы к занятию

1. Что такое предел функции?
2. Какая функция называется ограниченной?
3. Перечислите основные свойства пределов.
4. Как найти предел простейших функций?
5. Как ликвидировать неопределенность ∞/∞ при нахождении предела?
6. Как ликвидировать неопределенность 0/0 при нахождении предела?

Практическое занятие №3. Дифференциальное исчисление.

Производная функции, ее геометрический и физический смысл.

<u>**Определение.**</u>**Производной** функции *f(x)*в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.



Пусть *f(x)*определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha\ ,}$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)*в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$

Уравнение нормали к кривой: $\boxed{y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\ .}$

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Односторонние производные функции в точке.

Определение. Правой (левой) производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется правое (левое) значение предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при условии, что это отношение существует.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Если функция *f(x)* имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке $x = 0$ и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция f(x) имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим *f(x) = u, g(x) = v*- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1)$C' = 0$; 9) $(\sin x)' = \cos x$

2)$(x^m)' = mx^{m-1}$; 10) $(\cos x)' = -\sin x$

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ 12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$ 13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ 14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ 16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $\boxed{y' = f'(u)\cdot u'}$

<u>Доказательство.</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha\to 0$, при $\Delta x\to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

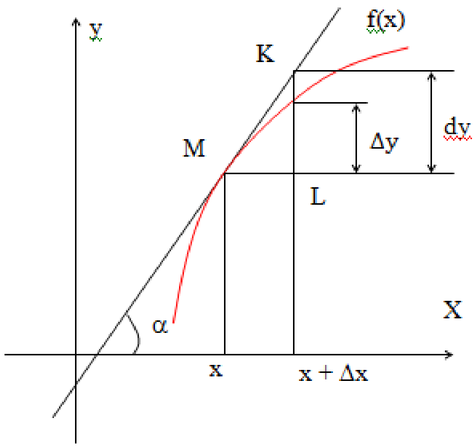
<u>Определение.</u>Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dyили df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$-функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть *y = f(x), x = g(t)*,т.е. y - сложная функция.

Тогда $$\boxed{dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.}$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$dx = \Delta x$, но

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример.Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример.Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y'=\frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2}=\frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2}=\frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2}=$$
$$=\frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2}=\frac{8x^3}{1+x^8}$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y=x^2e^{x^2}\ln x$

$$y'=\left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x+x^2e^{x^2}\frac{1}{x}=\left(2xe^{x^2}+x^2e^{x^2}2x\right)\ln x+xe^{x^2}=2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x+xe^{x^2}=$$
$$=xe^{x^2}(1+2\ln x+2x^2\ln x)$$

Задание к практической подготовке

Найти производные от указанных функций:

1. а) $y=x^5+\ln\left(x^2+8x-1\right)$; б) $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3x+3}}$

2. а) $y=\sin 3x\cdot\cos 5x$; б) $y=\frac{\mathrm{tg}x}{\sin x-\cos x}$

3. а) $y=\ln(1+\sqrt{x^2-1})$; б) $y=\frac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$

4. а) $y=x^2+\arcsin\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\frac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

5. а) $y=(2x+e^{-x^2})^2$; б) $y=\ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$

6. а) $y=\mathrm{tg}^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\frac{x+1}{x^2-\ln x}$

7. а) $y=(e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$; б) $y=\mathrm{ctg}\frac{\ln x+1}{2-\ln x}$

8. а) $y=x^2\cdot 10^{-x+2}$; б) $y=\frac{e^x+1}{\cos x}$

9. а) $y = \sin^2 2x \cdot \cos\frac{x}{2}$; б) $y = \ln\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 10. а) $y = \mathrm{arctg} x^2 - \ln\sin x$; б) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$

11. а) $y = x^4 + e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y = \frac{\cos x + 2x}{\sqrt{x}}$ 12. а) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$; б) $y = \mathrm{tg}\frac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$

Вопросы к занятию

1. Дайте определение производной функции.
2. Дайте определение дифференциала функции.
3. Какую функцию называют сложной?
4. Перечислите правила нахождения производной сложной функции.
5. Какую функцию называю обратной?
6. Как находят производные к обратным функциям?
7. Каков смысл дифференциала?
8. Сформулируйте правила дифференцирования.

Практическое занятие № 4. Общее исследование функции

Исследование функций с помощью производной. Возрастание и убывание функций

<u>Теорема.</u>1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a<x<b$, то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

<u>Доказательство.</u>

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1<\varepsilon<x_2$

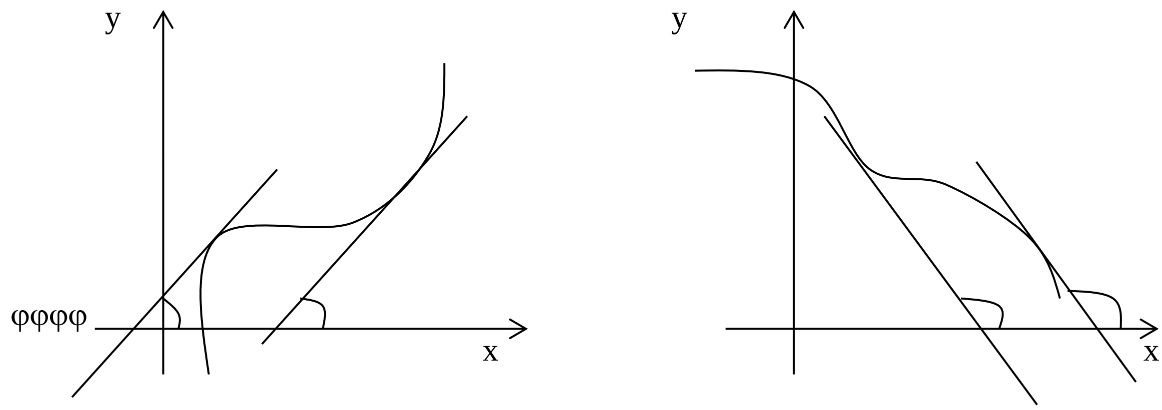
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то f′(x)≤0 на этом отрезке. Если f′(x)<0 в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума.

<u>Определение.</u> Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

<u>Определение.</u> Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

<u>Теорема.</u> (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

<u>Доказательство.</u> Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)\text{, т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0 \qquad при \quad \Delta x>0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

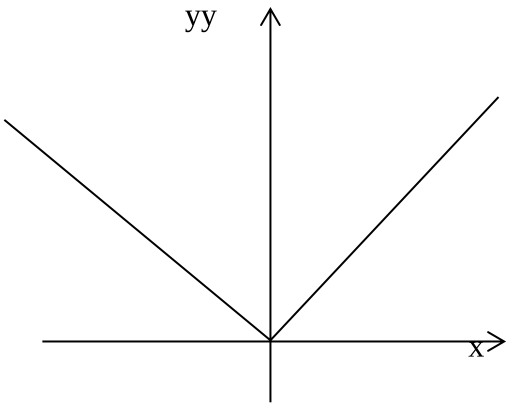
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

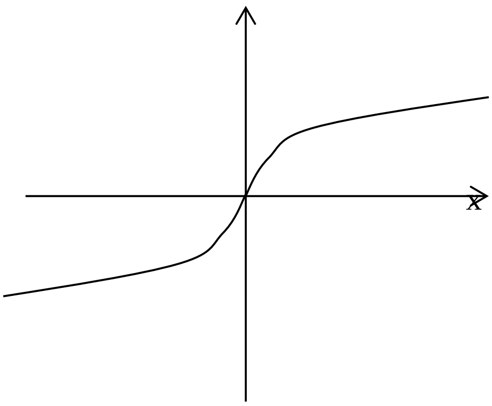
Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

Пример: $f(x) = |x|$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной.

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

<u>Доказательство.</u>

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x<\varepsilon<x_1$.

Тогда: 1) Если $x<x_1$, то $\varepsilon<x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) <f(x_1).$$

2) Если $x>x_1$, то $\varepsilon>x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \text{ или } f(x) <f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) <f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при **нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:**

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

<u>Теорема.</u> *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

<u>Доказательство.</u>

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

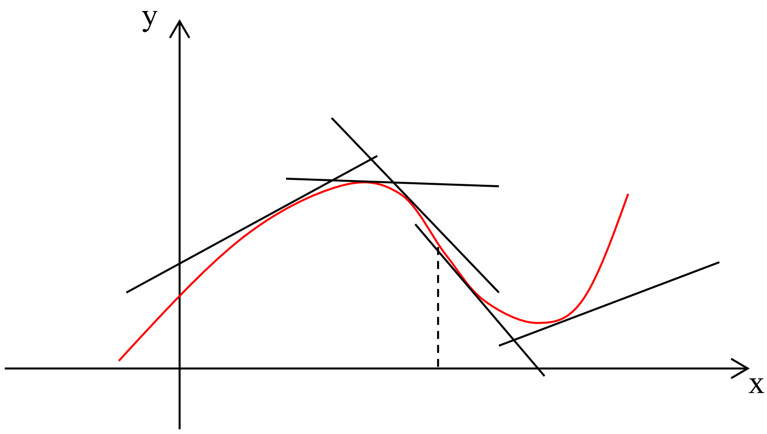
Т.к. $f''(x) = (f'(x))'< 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если f″(x) = 0, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой.
Точки перегиба.

Определение.Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1.*Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Доказательство.Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая $y=f(x)$ вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x<a$ и $f''(x) > 0$ при $x>a$. Тогда при $x<a$ кривая выпукла, а при $x>a$ кривая вогнута, т.е. точка $x = a$ – точка перегиба.

2) Пусть $f''(x) > 0$ при $x<b$ и $f''(x) < 0$ при $x<b$. Тогда при $x<b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x>b$ – выпуклостью вверх. Тогда $x = b$ – точка перегиба.

Теорема доказана.

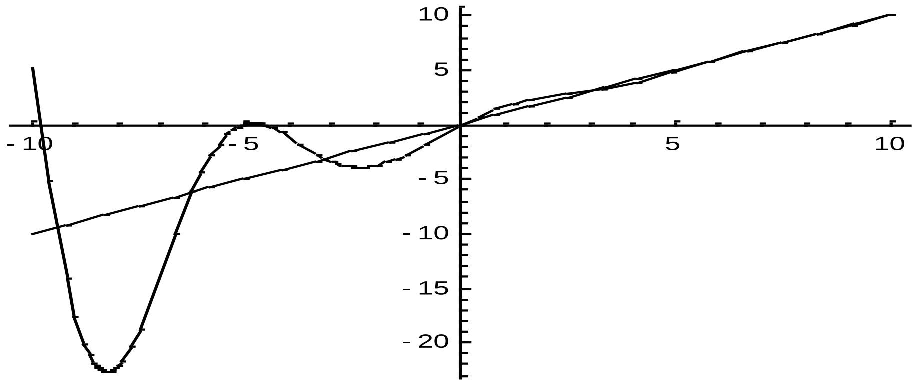
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}}\sin x$. Ее наклонная асимптота $y = x$.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

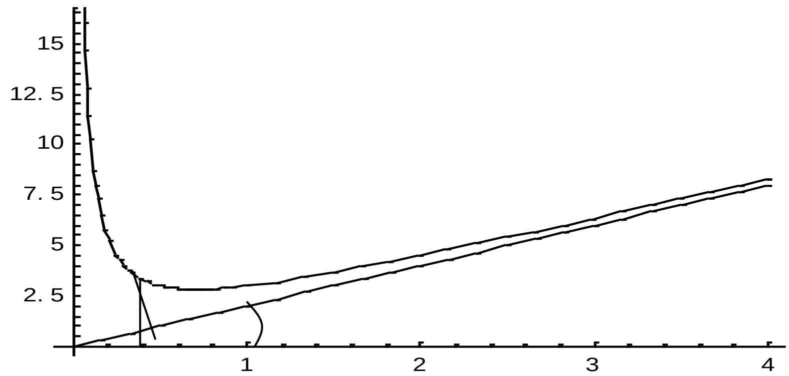
Вертикальные асимптоты.

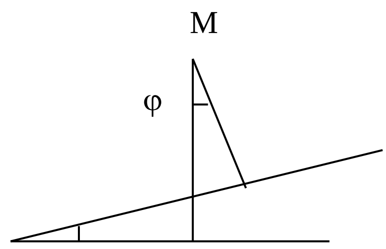
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.





N
φP

Q

Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ох обозначим φ. Перпендикуляр MQк оси Ох пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ= $\bar{y}$ -ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, $\angle$NMP = φ, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$
$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx+b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов kиb.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\big[f(x) - (kx+b)\big] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\big[f(x) - kx\big] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}\big[f(x) - kx\big]}$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞x→0-0: y→-∞x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

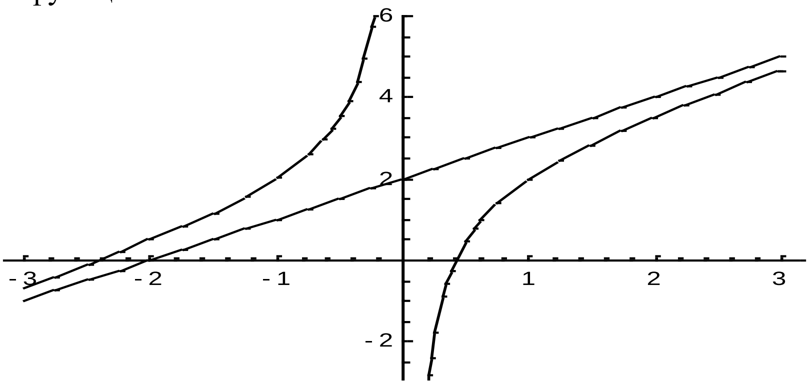
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



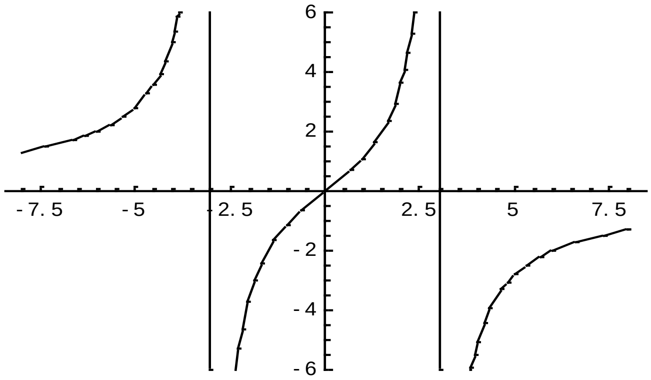
Пример.Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



Пример.Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}=-4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.

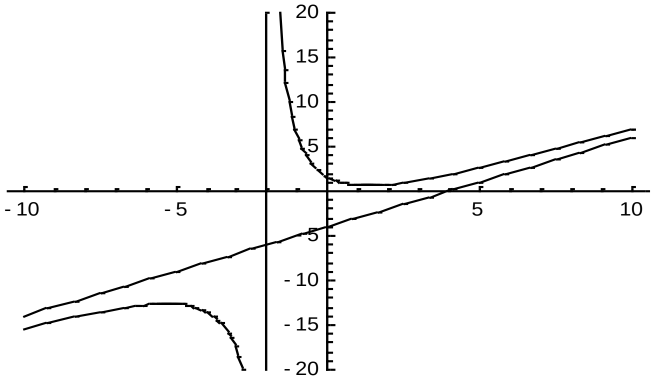


Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

Пример.Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = -$\sqrt{3}$; x= $\sqrt{3}$;x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

-∞<x< -$\sqrt{3}$,   y″< 0, кривая выпуклая
-$\sqrt{3}$ <x< -1,   y″< 0, кривая выпуклая
-1 <x< 0,   y″> 0, кривая вогнутая
0 <x< 1,   y″< 0, кривая выпуклая
1 <x< $\sqrt{3}$,   y″> 0,   кривая вогнутая
$\sqrt{3}$ <x<∞,   y″> 0,   кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

-∞<x< -$\sqrt{3}$,   y′> 0, функция возрастает
-$\sqrt{3}$ <x< -1,   y′< 0, функция убывает
-1 <x< 0,   y′< 0, функция убывает
0 <x< 1,   y′< 0, функция убывает
1 <x< $\sqrt{3}$,   y′< 0,   функция убывает
$\sqrt{3}$ <x<∞,   y″> 0,   функция возрастает

Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно -3$\sqrt{3}$ /2 и 3$\sqrt{3}$ /2.

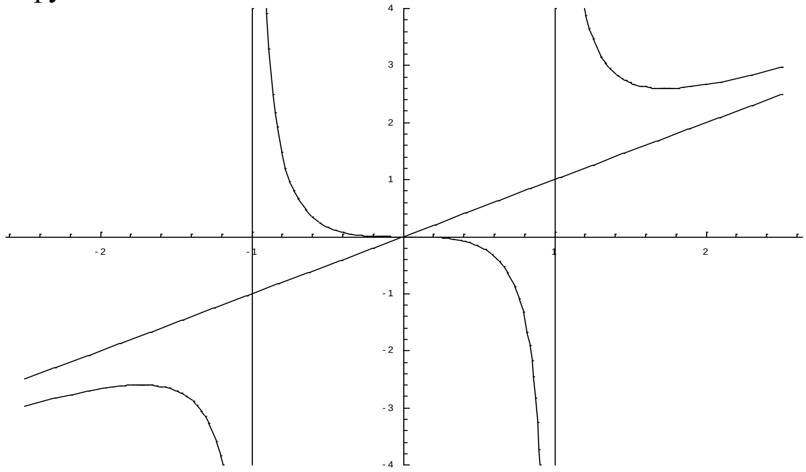
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Построим *график* функции:



<u>Задание к практической подготовке</u>

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y=\frac{x^3+16}{x}$ 3. $y=\frac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y=\frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y=\frac{x^2+1}{x}$ 7. $y=\frac{2x+1}{x^2}$ 8. $y=\frac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y=\frac{x}{3-x^2}$ 10. $y=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

2. $y=\frac{x^2+16}{2x}$

Вопросы к занятию

1. Что такое функция?
2. Для чего проводят исследование функции?
3. Что такое асимптоты функции?
4. Что такое экстремумы функции?
5. Чему равна производная в точках, где существуют асимптоты?

6. Приведите алгоритм исследования функции.

Практическое занятие № 5. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ 4a $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

8 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

9 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Рассмотрим три основных метода интегрирования:

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Задания к практической подготовке

Вычислить интеграл:

а) $\int \left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$;

в) $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx$;

г) $\int 3^{2-7x} dx$;

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx$;

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}} dx$;

и) $\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x} dx$;

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx$;

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4} dx$;

м) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx$;

н) $\int \arccos x \, dx$;

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} dx$;

п) $\int \frac{x^6}{x^2-x+1} dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$;

с) $\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$;

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx$;

у) $\int \sin^4 x \, dx$;

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Вопросы к занятию

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования методом подведения под знак интеграла.
5. Покажите формулами справедливость интегрирования методом подведения под знак интеграла.

Практическое занятие № 6. Неопределенный интеграл. Метод замены переменных

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dtполучается:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx=d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

$$\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t=x^2+1; \quad dt=2xdx; \quad dx=\dfrac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

$$\text{б)}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l} t=1+2x; \\ dt=2dx; \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

$$\text{в)}\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx=\left|\begin{array}{l} t=x^5 \\ dt=5x^4dx \\ x^4dx=\frac{1}{5}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x^5+C;$$

$$\text{г)}\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{array}{l} t=2-7x, \\ dt=-7dx, \\ dx=-\frac{1}{7}dt \end{array}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^t dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

$$\text{д)}\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{arctg}x \\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx \end{array}\right|=\int t\,dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C;$$

е) $$\int e^x\cdot\sin e^x dx=\left|\begin{matrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{matrix}\right|=\int\sin t\,dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$$=-\cos t+C=-\cos e^x+C;$$

ж) $$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx=\left|\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C;$$

з) $$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}dx=\left|\begin{matrix} t=e^x, \\ dt=e^x dx, \\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$$=\ln\left|\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+t\right|+C=\ln\left|\sqrt{e^{2x}-7}+e^x\right|+C;$$

и) $$\int\frac{\sin 5x\;dx}{9-\cos^2 5x}=\left|\begin{matrix} t=\cos 5x \\ dt=-5\sin 5x\,dx \\ \sin 5x\,dx=-\frac{1}{5}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C;$$

к) $\int x\cdot \mathrm{tg}x^2dx=\int\frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\cos x^2\\ dt=-2x\sin x^2dx\\ x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right|+C;$

л) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx=\int\frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=3^x\\ dt=3^x\ln 3dx\\ 3^xdx=\frac{1}{\ln 3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{dt}{t^2+2^2}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$=\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2\ln 3}\mathrm{arctg}\frac{3^x}{2}+C;$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Вопросы к занятию

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования заменой переменных.

Практическое занятие № 7. Неопределенный интеграл. Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где uиv – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$,а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv=\int udv+\int vdu \text{ или } \int udv=uv-\int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (**13**):

м) $\int x^2 \cos x dx = \begin{vmatrix} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$

$= \begin{vmatrix} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$

н) $\int \arccos x \, dx = \begin{vmatrix} U = \arccos x; \; U' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ V' = 1; \qquad V = x \end{vmatrix} = x \cdot \arccos x - \int x \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{vmatrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ -x dx = \dfrac{1}{2} dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1 - x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C;$

<u>Пример.</u> $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx\right] = e^{2x} \sin x +$

$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t;\quad dt=2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{t^{21}}{42}+C = \frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$

Пример.

$$\int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int\frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int\sin^{-3/2}x\cos x dx = \{\sin x = t;\quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2}+C =$$

$$= -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x}dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2x dx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int\frac{1}{5}e^{5x}2x dx = \frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\{dx=d(x+1)\}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\{x+1=t\}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\frac{1}{x^3}dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=-\frac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

Пример.

$$\int x\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=\frac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\{t=e^{\cos^2 x};\quad dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\}=-\int dt=-t+C=$$

$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Задание к практической подготовке

Вычислить неопределенные интегралы

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$ 4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^5}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. а) $\int \sqrt{1-5x}dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int xarctgxdx$ 8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}dx$; б) $\int (1-x)\sin 3xdx$ 10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4xdx$ 12. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.
2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.
3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.
4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.
5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.
6. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.
7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.
8. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.
9. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3}dx$.

$$\int \frac{\sin 2x + \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

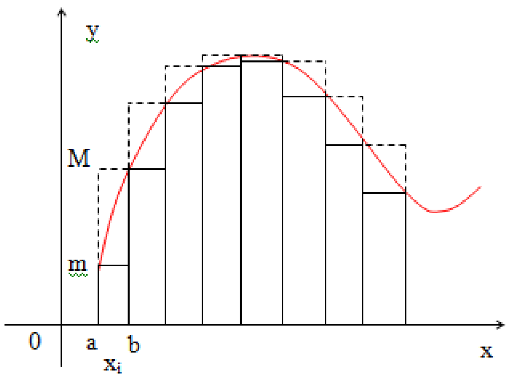
Вопросы к занятию

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования по частям.

Практическое занятие № 8. Определённый интеграл

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x)



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) пточками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ... ,$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$, а $m(b - a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b - a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0<\varepsilon_1<x_1, \quad x_1<\varepsilon<x_2, \ \dots \ , x_{n-1}<\varepsilon<x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int\limits_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i =$ $\int\limits_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤φ(x) на отрезке [a, b] a<b, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$

5) Если mи M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **<u>Теорема о среднем.</u>** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

<u>Доказательство:</u> В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от mдо M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \mu$ и μ =f(ε), а a≤ε≤b,тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

<u>Обобщенная теорема о среднем.</u> Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема:Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство:Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при х = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную tна переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^{\pi} dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках $x_0, x_1, \dots ,x_m$, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на правных частей $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots\ ,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \ldots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \ldots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

<u>Задание к практической подготовке</u>

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1.$\int_0^1 (5x-2)^4\,dx.$ 2.$\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3.$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)dx.$ 4.$\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}\,dx.$ 5.$\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1.$\int_2^3 \dfrac{dx}{3x-5}.$ 2.$\int_1^2 \dfrac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3.$\int_0^1 \dfrac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4.$\int_3^7 \dfrac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5.$\int_0^{\pi} (x^2+2)\cos x dx.$

1.$\int_0^{\pi/4} \sin 2t\cdot dt.$ 2.$\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}.$ 3.$\int_0^{\sin 1} \dfrac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4.$\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx.$ 5.$\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

1.$\int_0^1 e^{3x}dx.$ 2.$\int_0^3 \dfrac{dx}{4x+1}.$ 3.$\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\ln x}.$ 4.$\int_1^5 \dfrac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ 5.$\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

Вопросы к занятию

1.Что такое определенный интеграл?

2.Что является результатом при вычислении определенного интеграла?

3.Приведите формулу Ньютона-Лейбница?

4.Как можно приближенно вычислить определенный интеграл?

5. Дайте определение интегала при помощи понятия интегральной суммы.

Практическое занятие № 9. Матрицы.

Основные определения.

Определение. **Матрицей** размера$m\times n$, где m- число строк, n- число столбцов,называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, aj- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение.Если число столбцов матрицы равно числу строк(m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение.Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

Называется **единичной матрицей**.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они <u>определены только для матриц одинакового размера</u>. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

<u>**Определение.**</u>**Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

C = A + B = B + A.

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha\ (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

<u>**Определение:**</u> **Произведением** матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. АВ $\neq$ ВА даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение АВ=ВА выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \ \ O \cdot A = O,$$

где О – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения АВ и (АВ)С, то определены ВС и А(ВС), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения А(В+С) и (А+В)С, то соответственно:

$A(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение АВ определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение АВ , то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T, \text{ где}$$

индексом Т обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц det (AB) = detA·detB.

Понятие det(определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>Определение</u>. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u>Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u>Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример.</u>Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Задания для практической подготовки

1. Даны матрицы $A_{2\times 3}, B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

2. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times 4} \cdot B_{4\times 5} = C_{m\times n}$; б) $A_{2\times 3} \cdot B_{m\times n} = C_{2\times 6}$; в) $A_{2\times m} \cdot B_{n\times 3} = C_{2\times 3}$.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$; д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1};з) B^{-1}.

4. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1}; ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

5. Найти:

а)$3A+2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

б)$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 3\\3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n$.

6.Найти значение многочлена $f(A)$, если:

а) $f(X)=3X^2-4$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $f(X)=X^2-3X+1$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $f(X)=3X^2-2X+5$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\2 & -4 & 1\\3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое матрица?
2. Какая матрица называется единичной?
3. Дайте понятие диагональной матрицы.
4. Как определяется сложение и вычитание матриц? В каких случаях возможны эти операции?
5. Опишите алгоритм произведения матриц.

Практическое занятие № 10. Определители(детерминанты) матрицы.

Определение.Определителем квадратной матрицы A= $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\dots & \dots & \dots & \dots\\a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

detA = $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}$, где

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки иj-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$\det A = \det A^T$;

Свойство2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найтиdet (АВ).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2;   det B = 15 – 2 = 13;   det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,   det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

-152 = -26.

Задания к практической подготовки

1.Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\ б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};\ в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix};\ г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix};\ д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=0;\ б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix}=0;\ в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0;$$

$$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0.$$

3. Решить неравенства:

$$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix}>0;\ б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix}<0;\ в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix}\ge 5;\ г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix}\le 14.$$

4. Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix};\ б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix};\ в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix};\ г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\ д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\ е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};\ з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\ к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$$

$$л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};\ м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};\ н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ответы:1. а)7; б)26; в)0; г)0; д)30. **2**. а)5; б)2; в)2;

г) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in z.$ **3**. а) $(3;+\infty)$; б) $(-10;+\infty)$; в) $(-\infty;-3]$; г)[-1;7]. **4**. а)-24; б)-40; в)-9; г)57; д)-5; е)1; ж)1; з)55; и)30; к)48; л)0; м)-1004; н)150.

Вопросы к занятию

1. Что такое обратная матрица?
2. Дайте определение минора матрицы?
3. Дайте определение алгебраического дополнения матрицы.
4. Что такое ранг матрицы и каково его значение?

5. Какие матрицы называют эквивалентными?
6. Правило нахождения определителя.

Практическое занятие № 11. Обратная матрица. Ранг матрицы.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5)транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы:

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение.Алгебраическим дополнением минора матрицы называется егодополнительный минор умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы. В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \; i=(1,n),\; j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \qquad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы А.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

det A = 4 - 6 = -2.

M_{11}=4; M_{12}= 3; M_{21}= 2; M_{22}=1

x_{11}= -2; x_{12}= 1; x_{21}= 3/2; x_{22}= -1/2

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обратных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

<u>Пример.</u>Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

<u>Пример.</u>Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Базисный минор матрицы.

Ранг матрицы.

Как было сказано выше, минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

Определение. В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} = 2.$$

Пример:Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример.Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема.*В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*
Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Задание к практической подготовки

1. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а)$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; в)$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти ранг матрицы:

а)$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в)$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Вопросы к занятию

1. Что такое обратная матрица?
2. Дайте определение минора матрицы?
3. Дайте определение алгебраического дополнения матрицы.
4. Что такое ранг матрицы и каково его значение?
5. Какие матрицы называют эквивалентными?
6. Правило нахождения определителя.

Практическое занятие № 13. Решение систем линейных уравнений. Метод Крамера.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$x_i = \Delta_i/\Delta$, *где*

$\Delta = detA$, *а* Δ_i *– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца iстолбцом свободных членов* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}..a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}..a_{1n} \\ a_{21}..a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}..a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}..a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}..a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; Δ_1= $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; Δ_2= $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; Δ_3= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$;

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$;

<u>Пример.</u>Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix}$ = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix}$ = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задание для практической подготовки

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

Вопросы к занятию

1. Что такое система линейных уравнений?
2. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
3. Сколько решений имеет система линейных уравнений?
4. В чем суть метода Крамера?
5. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
6. В каких случаях система уравнений может быть решена и чтоназывается ее решениями?

Практическое занятие № 13. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать: $A \cdot X = B$.

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$; $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$;

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$;

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19$; $M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$;

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}$; $a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}$; $a_{13}^{-1} = \frac{1}{30}$;

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}$; $a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}$; $a_{23}^{-1} = \frac{16}{30}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$;

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}$; $a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}$; $a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30}$;

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.Метод Крамера.(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Задание для практической подготовки

Решить системы уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1-3x_2-3x_3=9, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=8, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=11, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3. \end{cases}$

Вопросы к занятию

1. Что такое система линейных уравнений?
2. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
3. Сколько решений имеет система линейных уравнений?
4. В чем суть матричного метола метода?
5. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
6. В каких случаях система уравнений может быть решена и чтоназывается ее решениями?
7. Что такое матрица переменных?
8. Что такое матрица коэффициентов?
9. Что такое матрица свободных коэффициентов?

Практическая работа № 14. Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ 3x+y+z=5 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases}$$

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 13y + 7z = 14 \\ 7y = 0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ y + \frac{7}{13}z = \frac{14}{13} \\ -\frac{49}{13}z = -\frac{98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z = -\frac{98}{13} : \left(-\frac{49}{13}\right) = 2$$

$$y = \frac{14}{13} - \frac{7}{13} \cdot 2 = 0$$

$x = -3 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 1$

Таким образом, $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2.$

Определение. Если $b_1, b_2, \ldots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Задания для практической подготовки

Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1-x_2+5x_3=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=4, \\ -x_1+x_2+x_3=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=3, \\ 2x_1-x_2+7x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3=-3, \\ x_1+2x_2+4x_3=9, \\ 2x_1+7x_2-x_3=0, \\ 3x_1+8x_2-x_3=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=2, \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4=-1, \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4=-4, \\ 7x_1-4x_2-7x_3-5x_4=-7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=6, \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=7. \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2, \\ 7x_1-2x_2+x_4=3, \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=7, \\ 3x_1-8x_2+2x_3-x_4=5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5=3, \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4+3x_5=1, \\ 5x_1+9x_2+4x_3+7x_4+5x_5=8; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3=-5, \\ 2x_1-x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1-4x_2+3x_3=10, \\ 8x_1-9x_2+4x_3=17. \\ 7x_1-x_2+2x_3=5; \end{cases}$ о) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1, \\ 2x_1+5x_2+6x_3-5x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3. \end{cases}$

Вопросы к занятию

1. Что такое система линейных уравнений?
2. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
3. Сколько решений имеет система линейных уравнений?
4. В чем суть метода Гауса?
5. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
6. В каких случаях система уравнений может быть решена и чтоназывается ее решениями?
7. Опишите алгоритм решения методом Гауса.

Практическое занятие № 15. Основные понятия теории вероятностей

Построение теории вероятностей начинается с описания множества Ω всевозможных исходов ω, которые могут произойти в результате каждого испытания. Множество Ω называется ***пространством элементарных исходов***, его точки (элементы) ω – элементарными исходами или элементарными событиями. Любое подмножество А пространства Ω (совокупность элементарных исходов ω) называется событием; пространство Ω также является событием, но имеющим особое название достоверного события. Говорят, что произошло событие А, если в испытании наблюдается элементарный исход ω ∈ А.

Определение.*Событием* называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение.*Полной группой событий* называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. ***Достоверным событием*** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются ***равновозможными,*** если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

События и действия над событиями. Алгебра событий

Определение.*Вероятностью события А* называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов (m) опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта (n), образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. ***Относительной частотой события*** А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A) = \frac{2}{5}$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Операции над событиями

Определение. События А и В ***называются равными***, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение.*Объединением или суммой событий*A_k называется событие А, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

Определение.*Пересечением или произведением событий*A_kназывается событие А, которое заключается в осуществлении всех событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение.*Разностью событий* А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение.*Дополнительным к событию* А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А не происходит.

Определение.*Элементарными исходами опыта* называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

Количество подмножеств данного конечного множества

Выясним, сколько всего подмножеств имеет множество А с $N(A) = n$.

Теорема 2.

Число всех подмножеств множества из n *элементов равно* 2^n, *т.е.*

$N(M(A)) = 2^n$

Доказательство: Перенумеруем элементы множества А и для каждого подмножества В $\subset M(A)$ построим последовательность длины n из нулей и единиц по следующему правилу: на k –ом месте пишем 1, если элемент

$a \in B$, и пишем 0, если $a \notin B$.

Итак, каждому подмножеству будет соответствовать своя последовательность из нулей и единиц. Например, пустому множеству Ø соответствует последовательность из одних нулей, а самому множеству А –последовательность из одних единиц. Ясно, что справедливо и обратное утверждение: каждой последовательности из множества Р последовательностей длины n из нулей и единиц соответствует одно подмножество В $\subset M(A)$. Таким образом, между множествами

$M(A)$ и Р установлено взаимно однозначное соответствие. Следовательно, эти множества эквивалентны и как конечные множества имеют одинаковое количество элементов, т.е. $N(M(A)) = N(P)$. Но $N(P) = N(\{0;1\}\ 2^n) = 2^n$ в силу формулы , поэтому и $N(M(A)) = 2^n$. Теорема 2 доказана.

Задачи к практической подготовке

1. Бросают два кубика: красный и синий. Считая все комбинации цифр на красном и синем кубике равновозможными, определите вероятность того, что цифры на красном и синем кубике, будут одинаковы.
2. В том же опыте (бросание красного и синего кубика) подсчитывают сумму очков, выпавших на обоих кубиках. Какая из сумм будет наиболее вероятной?
3. Наудачу выбирают число от 1 до 20. Считая все варианты равновозможными, определите вероятность того, что выбранное число:

а) четно;

б) делится на 3;

в) делится на 2 и на 3;

г) не делится ни на 2 ни на 3;

д) имеет сумму цифр, делящуюся на 3.

4. Секретный замок состоит из четырех дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Найти вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки.

5.Имеется 3 волчка с шестью, восьмью, десятью гранями. Найти вероятность, что при падении у всех трех волчков появится цифра 1.

6. На полке лежат книги. Из них 10 томов Тургенева, 5 томов Гоголя, 8 томов Достоевского. Наудачу выбрана одна книга. Найти вероятность того, что это том Тургенева или Гоголя.

7. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

8. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?

9. Буквы в слове МИША смешали и затем вложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША И МАМА?

Вопросы к занятию

1. Что такое событие?
2. Как определяется вероятность события?
3. Какие события называют совместными?

4. Какие события называют несовместными?

Практическое занятие № 16. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема(сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

<u>Следствие 1:</u> Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

<u>Следствие 2:</u> Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Определение.Событие A называетсянезависимым от события B, вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называетсязависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Определение.Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется условной вероятностью события B.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема.(Умножение вероятностей). Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$$

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности.

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2..A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)..P(A_n/A_1A_2..A_{n-1})$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события.

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A)=1-q_1q_2..q_n$$

Здесь событие A обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

Пример2. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

❍

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие A, появление хотя бы одной червонной карты – событие B. Таким образом нам надо определить вероятность события $C = A + B$.

Кроме того, события A и B – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$. ●

Пример 3. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

.

Вероятность появления только одного события

Пример 4. Пусть даны три независимых события A_1, A_2, A_3, их вероятности соответственно равны p_1, p_2, и p_3. Найти вероятность появления только одного события.

❍ Пусть:

событие B_1 - появилось только событие A_1 (A_2 и A_3 не появились)

$$B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$$

событие B_2 - появилось только событие A_2 (A_1 и A_3 не появились)

$$B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$$

событие B_3 - появилось только событие A_3 (A_1 и A_2 не появились)

$$B_3 = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$$

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1, A_2, A_3, будем искать вероятность

$P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$ так как события $B_1, B_2,$ B_3 несовместны.

События $A_1, A_2,$ A_3 - независимы $\Rightarrow \overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ - независимы.

Обозначим $P(\overline{A_1})=q_1$, $P(\overline{A_2})=q_2$, $P(\overline{A_3})=q_3$.

Тогда $P(B_1+B_2+B_3)=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3$, т.е.

P(появления только одного события) = $p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3$.●

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие A может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1,H_2,\ldots,H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1),P(H_2),\ldots,P(H_n)$ и условные вероятности наступления события A при наступлении события H_i :

$P(A/H_1),P(A/H_2),\ldots,P(A/H_n)$.

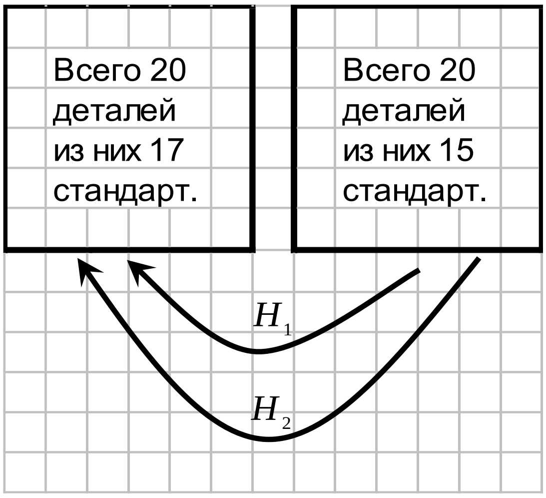
Теорема.Вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1,H_2,\ldots,H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события A.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

Пример 5. В двух ящиках содержатся по 20 деталей, причем в первом 17 стандартных деталей, а во втором 15 стандартных деталей. Из второго ящика наудачу извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из первого ящика, окажется стандартной.

❍ Опыт можно разбить на два этапа:первый - перекладывание детали,
второй - выбор детали.

Гипотезы:



H_1 - переложена стандартная деталь;

H_2 - переложена нестандартная деталь.

$$P(H_1)=\frac{15}{20},\ \ P(H_2)=\frac{5}{20}.$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{18}{21},\ \ P_{H_2}(A)=\frac{17}{21}.$$

$$P(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{18}{21}+\frac{17}{21}\cdot\frac{5}{20}=\frac{71}{84}\approx 0{,}8452.$$ ●

Пример 6. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

❍

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2=0{,}4^2=0{,}16;$

- для второго стрелка: $p_2^2=0{,}6^2=0{,}36;$

- для третьего стрелка: $p_3^2=0{,}8^2=0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p=\frac{1}{3}p_1^2+\frac{1}{3}p_2^2+\frac{1}{3}p_3^3=\frac{1}{3}(0{,}16+0{,}36+0{,}64)=\frac{29}{75}.$$ ●

Формула Байеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие A, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, \ldots, H_n$ относительно события A, то есть условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется формулой Байеса.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Пример 7. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру равна 0,6, ко второму равна 0,4. Вероятность того, что деталь будет признана стандартной первым контролером равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что ее проверил первый контролер.

❍Гипотезы: H_1 - деталь проверил первый контролер;

H_2 - деталь проверил второй контролер.

Событие A- деталь признана стандартной.

$$P(H_1)=0{,}6 \; P(H_2)=0{,}4$$
$$P_{H_1}(A)=0{,}94 \; P_{H_2}(A)=0{,}98$$

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0{,}98}\approx 0{,}59$$

Как видно до испытания $P(H_1)=0{,}6$, а после $P_{А}(H_1)=0{,}59$. ●

Повторение испытаний

Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A.

Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_n(k)=0{,}6$того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно k раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям.

Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие Aнаступает с вероятностью $P(A)=p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A})=1-p$.

Обозначим A_i – наступление события A в испытании с номером i. Так как условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие Aнаступает ровно k раз, то остальные $n-k$ раз это событие не наступает. Событие A может появиться k раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по k. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли:

$$P_n(k)=\frac{k!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, то есть того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример 8. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

❍

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Так как выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в k испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_5(5)=p^5=0{,}4^5=0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_5(4)=\frac{5!}{4!\cdot 1!}p^4(1-p)=0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_5(3)=\frac{5!}{3!\cdot 2!}p^3(1-p)^2=0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P=0{,}01204+0{,}0768+0{,}2304=0{,}31744\ . \bullet$$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Пусть $k=k_0$ - число появления события A в n испытаниях, при котором $P_n(k)$ - наибольшая.

Тогда k_0 определяется из двойного неравенства:

$$np-q\le k_0<np+q$$

Если $(np-q)$ - дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0; k_0+1.

Если $(np-q)$ - целое, то существует два наивероятнейших числа k_0.

Если np - целое, то $k_0=np$.

Например,

1) $n=15$, $p=0,9$, $q=0,1$.

$$15\cdot 0,9-0,1\le k_0<15\cdot 0,9+0,9\; 13,4\le k_0<14,4\; k_0=14.$$

2) $n=24$, $p=0,6$, $q=0,4$.

$$24\cdot 0,6-0,4\le k_0<24\cdot 0,6+0,4\; 14\le k_0<15\; k_0=14;\quad k_0=15.$$

3) $n=25$, $p=0,08$, $q=0,02$.

$$2-0,02\le k_0<2+0,08\; k_0=2.$$

При больших значениях n и k в повторных испытаниях с помощью формулы Бернулли получить более или менее точный результат практически невозможно.

В этом случае, для вычисления искомой вероятности применяют асимптотические формулы.

Задания к практической подготовке

1. Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

2. Устройство состоит из четырех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы(за время t) первого, второго, третьего и четвертого элементов соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время tбезотказно будут работать только два элемента.

3. Вероятность наступления некоторого случайного события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты проводятся последовательно до наступления этого события. Определить вероятность того, что будет проведено три опыта.

4. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное (или первое,

или второе)

5. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность (или в первом, или во втором, или в третьем)

6. Два охотника соревнуются: кто подстрелит больше уток при двух выстрелах, тот и победит. Вероятность попадания первого охотника в уткуравна 0,5, второго–0,6. Какова вероятность того, что выиграет первый охотник? Считать, что при одном выстреле можно убить только одну утку.
7. Пятеро стрелков производят по одному выстрелу вмишень независимо друг от друга. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,6; 0,5; 0,8; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет ровно четыре пробоины.
8. Какова вероятность того, что из шести отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (6 из 49) 5 чисел будут выигрышными?
9. В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении.
10. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках.Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится только в одном справочнике.
11. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

Вопросы к занятию

1.Что такое событие?

2.Как определяется вероятность события?

3.Какие события называют совместными?

4.Какие события называют несовместными?

5. Как рассчитать вероятность суммы двух несовместных событий?

6. Приведите формулу полной вероятности.

7. запишите формулу Бернулли и поясните ее смысл.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2022.(среднее профессиональное образование). https://znanium.com/catalog/product/1817031

Список дополнительной литературы

1. Григорьев В.П. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.