ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по дисциплине

"Элементы высшей математики"

для обучающихся по специальности

09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальностям 09.02.07 Информационные системы и программирование и программой дисциплины «Элементы высшей математики».

Составитель: Шляхова Н.И.

Рассмотрено на заседании методического объединения общеобразовательного цикла, протокол № 6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол № 6 от «26 » мая 2022 г.

г.

Дисциплина «Элементы высшей математики» играет важную роль в воспитании научного мировоззрения, содействует развитию логического мышления, способствует формированию математической культуры и является частью общечеловеческой культуры.

Методические указания представляют собой разработку практических занятий по учебной дисциплине «Элементы высшей математики». Практические занятия представляют собой занятия по выполнению различных заданий, образцы которых были даны на теории. В итоге у каждого обучающегося должен быть выработан определенный профессиональный подход к решению каждой задачи.

Методические указания предназначены для обучающихся и содействуют выработке умений и навыков применения знаний, полученных на теории и в ходе самостоятельной работы.

Цель освоения дисциплины: Выработка навыков математического мышления; навыков использования математических методов и основ математического моделирования, математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:

1.Овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в профессиональной деятельности.

2.Интеллектуально развивать обучающихся, формировать качества мышления, характерные для математической деятельности и необходимые человеку для полноценного функционирования в обществе;

3.Формировать представление о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса.

4.Развивать чувства точности, экономности, информативности речи, формировать умения выразить мысль, отобрав для этого подходящие языковые средства.

На практических занятиях реализуются следующие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 13. Демонстрирующий умение эффективно взаимодействовать в команде, вести диалог, в том числе с использованием средств коммуникации.

Оглавление

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Операции над матрицами, вычисление определителей

Теоретическая часть

Определение: матрицей размера $m \times n$называетсяпрямоугольная таблица чисел $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots . & a_{mn} \end{pmatrix}$, состоящая из m– строк и n −столбцов.

Определение: если $m = n$, то матрица называется квадратной матрицей n −го порядка.

<u>Обозначение:</u>кратко матрицы обозначают $A = (a_{ik}), i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}$.

Определение: матрица А' называется транспонированной кA, если она получена из A заменой строк столбцами.

Обозначим через M- множество матриц размера $m \times n$.

Определение: две матрицы $A, B \epsilon M$называются равными, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е. $a_{ik} = b_{ik}$для $i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}$.

Определение: суммой матриц $A + B$называется матрица Cтакая, что любой элемент c_{ik}этой матрицы равен сумме соответствующих элементов матриц A и B. Т.е. $A + B = C$,

$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}$.

Замечание: сложение матриц коммутативно и ассоциативно.

Определение: произведением матрицы A на число λ называется матрица Dтакая, что любой ее элемент равен произведению числа λ на соответствующий элемент матрицы A.

$D = \lambda \cdot A, d_{ik} = \lambda \cdot a_{ik}, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}$.

Определение: матрица 0 называется нулевой, если все ее элементы равны 0.

Замечание: $A + 0 = 0 + A = A$.

Рассмотрим матрицы: A размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ и B размера $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$.

Определение: произведением матриц $A \cdot B$ назовем матрицу C размера $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}$,элементы которой определяются по правилу: $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$,

$i = \overline{1,m}, k = \overline{1,p}$. Т.е. элемент c_{ik} равен сумме произведений элементов i −ой строки матрицы A на соответствующие элементы k −го столбца матрицы B.

Замечание: умножение матриц некоммутативно, даже если определены оба произведения $A \cdot B$и $B \cdot A$. Умножение матриц ассоциативно.

Пример: вычислить $A \cdot B - B \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-1)\cdot 1+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 2+1\cdot 1\\ 2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 0+1\cdot 2+(-1)\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-0 & -1-2 & 1-(-1)\\ 3-6 & 2-1 & 0-1\\ 3-1 & 4-1 & -3-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

Определение: определителем квадратной матрицы порядка nназывается алгебраическая сумма $n!$членов, каждый из которых равен произведению элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A. Знак члена определителя определяется $(-1)^s$, где $s-$ число инверсий в перестановке вторых индексов элементов, если первые индексы элементов идут в естественном порядке.

Обозначение:D, λ

$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots. & a_{2n}\\ a_{n1} & a_{n2}\dots. & a_{nn}\end{vmatrix}$, $D=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)}(-1)^s\cdot a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot\dots\cdot a_{n\alpha_n}$, где суммирование ведется по всем перестановкам $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$ из чисел 1,2,…,n; s- число инверсий в перестановке $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n)$.

Определение: инверсией в перестановке называется такое взаимное расположение двух чисел, когда большее число стоит впереди меньшего.

Замечание: для определителей 2-го и 3-го порядков есть более простые определения.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Пример 1: $\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-4\cdot(-3)=-2+12=10.$

Пример 2: $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot 2+2\cdot 4\cdot 5+(-2)\cdot(-3)\cdot 3-5\cdot 1\cdot 3-(-2)\cdot 2\cdot 2-(-3)\cdot 4\cdot(-1)=-2+40+18-15+8-12=37$

Свойства определителей:

1. значение определителя не изменится, если его матрицу транспонировать (равноправие строк и столбцов определителя);

Дальнейшие свойства сформулированы для строк определителя, но они будут верны и для его столбцов.

2. если в строке определителя есть общий множитель, то его можно вынести за знак определителя;
3. если поменять местами две строки определителя, то он изменит только знак;
4. определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на любое число, отличное от нуля;
5. Если все элементы какой-либо строки определителя равны сумме двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей. У одного из них элементами этой строки являются первые слагаемые, а у другого – вторые, все остальные элементы – без изменения;
6.определитель равен нулю, если имеет нулевую строку; две равные строки; какая-либо строка является линейной комбинацией других строк;
7. определитель, у которого все элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны 0, равен произведению диагональных элементов;
Определение: минором элемента a_{ik} назовем определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из данного определителя вычеркиванием i −ой строки и k −го столбца.
Обозначение:M_{ik}
Определение: алгебраическим дополнением элемента a_{ik} назовем его минор со знаком $(-1)^{i+k}$. Обозначение: A_{ik}. $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$
8. если все элементы $i-$ ой строки, кроме a_{ik}, равны 0, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение $D = a_{ik} \cdot A_{ik}$.

9. определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения $D = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$. Эта операция называется разложением определителя по строке.

10. сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна 0. $a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0$

3. Содержание работы
Вариант 1.
Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель и, используя формулы тригонометрии упростить его

$$\begin{vmatrix} sin\alpha & cos\alpha & 1 \\ sin\beta & cos\beta & 1 \\ sin\gamma & cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Вариант 2</u>.

Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель и, используя формулы тригонометрии упростить его

$$\begin{vmatrix} 2sin\alpha cos\alpha & 2sin^2\alpha - 1 \\ 2cos^2\alpha - 1 & 2sin\alpha cos\alpha \end{vmatrix}$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 8 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

<u>Вариант 3</u>.

Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a^0 & b^0 & c^0 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 11 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & -6 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Вариант 4</u>.

Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Не вычисляя, показать, что определитель равен 0

$$\begin{vmatrix} 2(1+a) & a & d \\ 2(1+b) & b & d \\ 2(1+c) & c & d \end{vmatrix} = 0$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Вариант 5</u>.

Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель и, используя формулы тригонометрии упростить его

$$\begin{vmatrix} sin2\alpha & a & sin\alpha cos\alpha \\ sin2\beta & b & sin\beta cos\beta \\ sin2\gamma & c & sin\gamma cos\gamma \end{vmatrix} = 0$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

<u>Вариант 6</u>.

Задача 1. Выполните действия с матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Задача 3. Вычислить определитель и упростить его

$$\begin{vmatrix} 2a + sin\alpha & a & sin\alpha \\ 2b + sin\beta & b & sin\beta \\ 2c + sin\gamma & c & sin\gamma \end{vmatrix} = 0$$

Задача 4. В результате применения каких из свойств определителей 3-го порядка были получены следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы

Теоретическая часть

Определение квадратная матрица порядка nназывается обратимой или невырожденной, если для нее существует квадратная матрица порядка n такая, что их произведение равно единичной матрице $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Определение: матрица B называется обратной к матрице A. Обозначение: A^{-1}.

Определение: матрица A обратима тогда и только тогда, когда ее определитель $\neq 0$.

Обратную матрицу можно найти:

а) по формуле

$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot A^*$, где A^*- *матрица присоединенная к матрице* A.

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots. & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \dots. & A_{nn} \end{pmatrix}$, A_{ik} −алгебраические дополнения элементов a_{ik}матрицы А.

Пример: Найти матрицу обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:$D = -3 \neq 0$, т.е. A^{-1} существует

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7 A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

б) с помощью элементарных преобразований

Замечание: **элементарными преобразованиями матрицы** называются:

1) перестановка строк (столбцов) матрицы;

2) умножение элементов строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$;

3) прибавление элементов одной строки (столбца) к соответствующим элементам другой строки (столбца);

4) вычеркивание нулевой строки (столбца) матрицы.

Замечание: суть метода элементарных преобразований над *строками* матрицы. К исходной квадратной матрице A_n справа через разделительную вертикальную черту приписывают единичную матрицу E того же порядка, что и A, и таким образом получают расширенную матрицу (A|E). Далее, с помощью элементарных преобразований над *строками* приводят матрицу (A|E сначала к ступенчатому виду (A_1|B), где A_1 – верхняя треугольная матрица, а затем к виду (E|A^{-1}). Таким образом, имеет место преобразование: (A|E)$\Rightarrow$(E|A^{-1}).

Пример. Дано: A=$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Методом элементарных преобразований над *строками* найти обратную матрицу A^{-1}.

Решение. (A|E) $=\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle^{-1} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle^{-2}_{-1} \sim \sim$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle_{-1} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle^{-1}_{-1} \sim$$

$$\sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle^{-2} \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots . & a_{mn} \end{pmatrix}$ размера $m \times n$с действительными элементами. Столбцы матрицы можно рассматривать как -мерные векторы, а строки – как n-мерные векторы.

Определение: строчечным рангом матрицы называется ранг ее векторов-строк

Определение: столбцовым рангом матрицы называется ранг векторов-столбцов.

Замечание: эти ранги совпадают, поэтому можно говорить просто о ранге матрицы.

Определение: ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Замечание: С помощью элементарных преобразований матрицу всегда можно привести к ступенчатому виду.

Пример. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

Решение. Элементарными преобразованиями приведем матрицу A к ступенчатому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}_{-4}^{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix}_{-5}^{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 36 \end{pmatrix}_{-6}^{-3} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \Rightarrow r(B) = 3. \text{ Так как } A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B) = 3.$$

Ответ: r(A) = 3

Содержание работы

<u>Вариант 1:</u>

Задача 1. Докажите, что данная матрица имеет обратную и найдите её. Выполните проверку.

а) $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -9 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

Задача 2. Найти ранг матрицы

A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; r(A)=?

Вариант 2:

Задача 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, причем $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. Докажите, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Задача 2. Найти ранг матрицы

A= $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; r(A)=?

Вариант 3:

Задача 1. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы. Выполните проверку

Задача 2. Найти ранг матрицы

A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; r(A)=?

Вариант 4:

Задача 1. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы. Выполните проверку.

Задача 2. Найти ранг матрицы

A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; r(A)=?

Вариант 5:

Задача 1. Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ имеет обратную. Найдите элементы обратной матрицы. Выполните проверку.

Задача 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};\ r(A)=?$$

Вариант 6:

Задача 1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,найти обратнуюи выполните проверку.

Задача 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ r(A)=?$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса

Теоретическая часть

Определение: системой mлинейных уравнений с nнеизвестными $x_1, x_2, \dots x_n$над полем Pназывается система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},\text{где } a_{ik}, b_i \epsilon P$$

Определение: решением системы линейных уравнений называется упорядоченная совокупность nчисел поля P $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, которая является решением каждого уравнения системы.

Определение: система линейных уравнений с n неизвестными называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение и несовместной, если решений нет.

Определение: две системы линейных уравнений с n неизвестными называется равносильными, если множества их решений совпадают.

Определение: элементарными преобразованиями системы уравнений называются такие преобразования, которые приводят ее к равносильной системе.

Теорема: элементарными преобразованиями системы уравнений являются:

1) перемена местами уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на число, отличное от нуля;

4) исключение из системы уравнения с нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом.

Замечание: решение систем линейных уравнений **методом Гаусса** заключается в приведении ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Определение: ведущим коэффициентом уравнения называется первый отличный от нуля коэффициент.

Замечание: система линейных уравнений называется ступенчатой, если

1) уравнения с нулевыми коэффициентами расположены ниже всех уравнений, имеющих ненулевые коэффициенты;

2) если $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \dots, a_{rk_r}$- ведущие коэффициенты уравнений, то $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Пример: решить систему уравнений методом Гаусса (1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

Решение: с помощью элементарных преобразований приведем систему уравнений к ступенчатому виду. Первое уравнение умножим на (-2) и прибавим ко второму, затем умножим его на (-3) и прибавим к третьему. Получим систему уравнений

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -x_2 - 2x_3 = -6 \\ -2x_2 - 8x_3 = -12 \end{cases}$, которая равносильна системе уравнений (1).

Умножим второе уравнение системы (2) на (-2) и прибавим к третьему уравнению. Получим систему уравнений

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -x_2 - 2x_3 = -6 \\ -4x_3 = 0 \end{cases}$, которая равносильна системе (2), а значит и системе (1).

Система уравнений (3) имеет ступенчатый вид. Причем число ее уравнений равно числу неизвестных. Говорят, что система уравнений (3) имеет вид «треугольника». Из третьего уравнения находим, что $x_3 = 0$, из второго уравнения, что $x_2 = 6$, из первого, что $x_1 = -5$
Ответ: система уравнений имеет единственное решение (-5,6,0).

Замечание: вместо преобразования системы уравнений можно преобразовывать строки ее расширенной матрицы, т.е. матрицы элементами которой являются коэффициенты и свободные члены системы уравнений.

б) ***Формулы Крамера***

Дана система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

$A = (a_{ik}), ik = \overline{1,n}$ – матрица системы уравнений.$D = |A|$- определитель матрицы A.

Замечание: если $D \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера: $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$, где D_i- определитель, который получается из определителя D заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример: решить систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

Решение:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 2 + 60 + 9 + 16 - 15 = 50 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 24 - 6 + 27 + 6 + 8 = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 - 2 + 45 + 6 + 12 - 15 = 34$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 2 + 20 + 3 + 16 - 15 = 4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}; x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}; x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

Ответ: $(\frac{1}{25}; \frac{17}{25}; \frac{2}{25})$.

Замечание: если $D = 0$, а из определителей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ хотя бы один не равен нулю, то система уравнений несовместна.

Содержание работы

Вариант 1:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_3 + 3x_4 = 29 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Задача 2.Решите систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

Вариант 2:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = -14 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

Задача 2.Решите систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$$

Вариант 3:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

Задача 2.Решите системy уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -7 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Вариант 4:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Задача 2.Решите системy уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

Вариант 5:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 3.Решите системy уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 11 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3 - y - 2z = -5 \end{cases}$$

Вариант 6:

Задача 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера и выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_3 + 9x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Задача 2.Решите системy уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x - 6y + 3z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Тема: Приложения скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

Скалярное произведение векторов.

Определение. **Скалярным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4,\quad \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

$\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};\qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \dfrac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7};\qquad \varphi = \arccos\dfrac{2}{7}.$

<u>Пример.</u> Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4,\quad |\vec{b}| = 6,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3.$

$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot16 - 28\cdot4\cdot6\cdot\dfrac{1}{2} +$

+ 12·36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.

<u>Пример.</u> Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,

$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50};$ $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

cosφ = $\frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50};$ $\varphi = \arccos\frac{17}{50}.$

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1$.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1,\quad |\vec{b}| = 2,\quad |\vec{c}| = 3,\quad \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{\pi}{3}.$

$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a}\cdot\vec{a} + 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 14\vec{a}\cdot\vec{c} + 15\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 21\vec{b}\cdot\vec{c} +$

$+ 20\vec{c}\cdot\vec{a} + 24\vec{b}\cdot\vec{c} + 28\vec{c}\cdot\vec{c} = 10\,\vec{a}\cdot\vec{a} + 27\vec{a}\cdot\vec{b} + 34\vec{a}\cdot\vec{c} + 45\vec{b}\cdot\vec{c} + 18\vec{b}\cdot\vec{b} + 28\vec{c}\cdot\vec{c}$ = 10 +

+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

Векторное произведение векторов.

Определение. **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

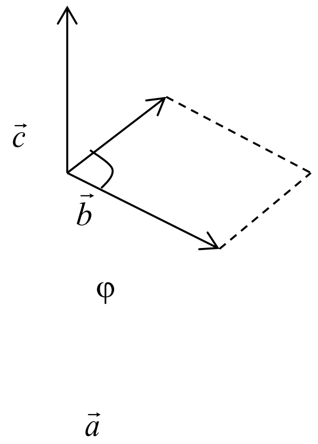
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$\sin\varphi \ge 0; \quad 0 \le \varphi \le \pi$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



<u>Свойства векторного произведения векторов:</u>

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>Пример.</u> Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и

$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

$\vec{a}$ = (2, 5, 1); $\vec{b}$ = (1, 2, -3)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC}=(0-2;1-2;0-2)=(-2;-1;-2)$$
$$\overrightarrow{AB}=(4-2;0-2;3-2)=(2;-2;1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-1-4)-\vec{j}(-2+4)+$$

$$+\vec{k}(4+2)=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}.\qquad S_{\Delta}=\frac{\sqrt{65}}{2}\ (\text{ед}^2).$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a}\wedge\vec{b} = 30^0$.

$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$

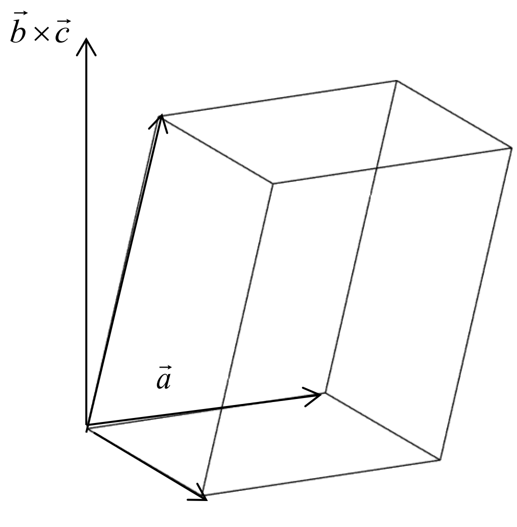
$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4$ (ед^2).

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$).

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



$\vec{c}$

$\vec{b}$

<u>Свойства смешанного произведения</u>:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

6)Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов:
$$\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$$
$$\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

Объем пирамиды
$$V = \frac{1}{6} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$
$$= \frac{1}{6}(22 + 30 + 68) = 20(ed^3)$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}$ / 2 (ед^2)

Т.к. V = $\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}=\dfrac{4\sqrt{510}}{17}$. (ед)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

<u>Уравнение линии на плоскости.</u>

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение. Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр t.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

<u>Уравнение прямой на плоскости.</u>

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$\boxed{Ax + By + C = 0,}$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных A,B и С возможны следующие частные случаи:

$C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат

$A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ { $By + C = 0$}- прямая параллельна оси Ох

$B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ { $Ax + C = 0$} – прямая параллельна оси Оу

$B = C = 0$, $A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Оу

$A = C = 0$, $B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$(3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: $3x – y + C = 0$. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: $3 – 2 + C = 0$, следовательно $C = -1$.

Итого: искомое уравнение: $3x – y – 1 = 0$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ = k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$
$$y-2=x-1$$
$$x-y+1=0$$

<u>Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.</u>

Если общее уравнение прямой Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$\boxed{y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}}$$

и обозначить $-\frac{A}{B}=k; \quad -\frac{C}{B}=b; \quad т.е. \quad y=kx+b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

$Ax + By + C = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}(1, -1)$ и проходящей через точку A(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0$, т.е. $A = B$.

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1$, $y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$x + y - 3 = 0$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С $\neq$ 0, то, разделив на –С, получим:

$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ или

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где

$a=-\frac{C}{A};\quad b=-\frac{C}{B}$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а b – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример. Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, а = -1, b = 1.

<u>Нормальное уравнение прямой.</u>

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$ –

нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu\cdot C < 0$.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример. Дано общее уравнение прямой 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

$$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0;$$

$\cos\varphi = 12/13$; $\sin\varphi = -5/13$; $p = 5$.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}; \qquad 3x-2y=0.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\boxed{tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.}$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравнений этих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку

перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$ представляется уравнением:

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)}$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка М(x_0, y_0), то расстояние до прямой Ах + Ву + С =0 определяется как*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки М на заданную прямую. Тогда расстояние между точками М и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$A(x – x_0) + B(y – y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$,

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$
$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример. Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника А(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Тема: Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенности

Теоретическая часть

Предел рациональной функции

Определение: Целой рациональной функцией $P_n(x)$ называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a\epsilon R$$

Теорема 1.Предел целой рациональной функции при $x \to a$, равен значению этой функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

Задача.Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$

Решение.функция $x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ целая рациональная, значит по теореме 1 предел функции равен значению функции в точке $x = 1$. Имеем

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

Предел дробно-рациональной функции

Определение: дробно-рациональной функцией $R(x)$ называется функция вида $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ –целые рациональные функции.

Теорема 2: предел дробно-рациональной функции при $x \to a$, если при этом знаменатель не обращается в нуль, равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}, Q_m(a) \neq 0$

Задача. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+3x-4}{x^2-2}$.

Решение. Так как в точке $x = \frac{1}{2}$ знаменатель $(x^2 - 2) \neq 0$,то по теореме 2 предел равен значению функции в точке $x = \frac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+3x-4}{x^2-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2} = \frac{9}{7}$.

Определение: функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Определение: функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Теорема 3: отношение функции, имеющий конечный предел при $x \to a$, не равный нулю, к функции бесконечно малой при $x \to a$ есть величина бесконечно большая.

Задача. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-6}{x-1}$

Решение.предел знаменателя в точке $x = 1$ равен нулю, поэтому теорема 2 не применима. Найдем отдельно предел числителя и предел знаменателя при $x \to 1$.

$\lim\limits_{x\to 1} x^3 + 2x - 6 = -3$, $\lim\limits_{x\to 1} x - 1 = 0$.

Предел числителя конечен, предел знаменателя равен нулю, используя теорему 3, получим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x-6}{x-1} = \infty$.

Раскрытие неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

*Замечание:*этим термином обозначается предел отношения двух бесконечно малых функций. Процесс вычисления предела называется раскрытием неопределенности. Для этого удобно числитель и знаменатель разложить на множители.

Задача. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$.

Пределы на бесконечность

Определение: предел целой рациональной функции при$x\to\infty$равен $\lim\limits_{x\to\infty}P_n(x)=\infty$.

Теорема 4: отношение функции, имеющий конечный предел при$x\to\infty$ к функции бесконечно большой, есть величина бесконечно малая.

Задача. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}$

Решение. Предел числителя равен 5, предел знаменателя равен∞,т.е. имеем отношение конечного предела к функции бесконечно большой, поэтому, применив теорему 4 получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}=0$.

Замечание: неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ означает отношение двух бесконечно больших функций. Для ее раскрытия делят на старшую степень.

Задача. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^4+2x^3-7}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2\backslash x+3\backslash x^2}{x^2+2x-7\backslash x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}=0$

Предел дробно-рациональной функции при$x\to\infty$ равен

1) 0, если степень числителя ниже степени знаменателя;

2) отношению коэффициентов при старших степенях x, если степени числителя и знаменателя равны;

3)∞, если степень числителя выше степени знаменателя.

Содержание работы

Вариант 1.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3+2x^2-3x+7)$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+5)^3}{(4x-2)^2}$

Задача 4.$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}cos3x$

Задача 5.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{4x}$

Вариант 2.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-x^2}{x-3}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-5)^2}{(2x+1)^3}$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} tg2x$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{4x}$

Вариант 3.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+4x-8)$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x(x+3)}{x^2-9}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x-2)^2}{(2-3x)^2}$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} cos\frac{x}{2}$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin5x}$

Вариант 4.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x)+5$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5-2x)^3}{(3x+1)^3}$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} ctg2x$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{2x}$

Вариант 5.

Задача 1. $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3+x}{x}$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+5)^2}{(3x+1)^2}$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} sin2x$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{7x}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

Тема: Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Теоретическая часть

Определение: если функция $y = f(x)$при $x = a$имеет разрыв, то для выяснения характера разрыва следует найти предел функции $f(x)$при$x \to a$слева и справа.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных вида разрывов:

1) разрыв Iрода – в этом случае существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$;

2) разрыв IIрода – в этом случаехотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ не существует или бесконечен.

Задача. Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y = \frac{x}{x-3}$; 2) $y = 3^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1) Данная функция определена при всех значениях x, кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3} = +\infty$$

Следовательно, функция $\frac{x}{x-3}$ в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв, т.е. $x = 3$ – точка разрыва IIрода.

2) Здесь функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Найдем левый и правый пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to -0} 3^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x\to +0} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Так как при x, стремящемся к нулю справа, функция имеет бесконечный предел, то $x = 0$точка разрыва IIрода.

3. Содержание работы

Задача. Найти точки разрыва и исследуйте их характер для следующих функций:

1) $y=\frac{5}{2x-1}$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

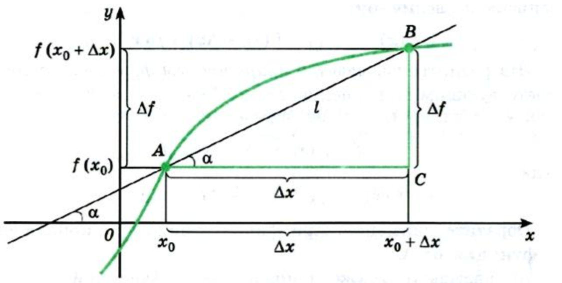
4) $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$; 5) $y=\frac{x-1}{x^2-3x-10}$; 6) $y=1+2^{1/(x-2)}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

Тема: Вычисление производных сложных функций

Теоретическая часть

Определение: Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 - это предел отношения приращения функции Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$:



$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначения: y', $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$.

Правила дифференцирования:

1. $(u+v)'=u'+v'$
2. $(u\cdot v)'=u'v+v'u$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$
4. $(Cf(x))'=C(f(x))'$

Формулы дифференцирования:

1. $(kx+b)' = k$
2. $x' = 1$
3. $C' = 0, (C = const)$
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
12. $(e^x)' = e^x$
13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
18. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Сложная функция – это функция от функции $f(x) = f(g(x))$.

Производная сложной функции:

$$\boxed{(f(g(x)))' = f' \cdot g'}$$

Пример 1: Найти производную сложной функции:

1. $f(x) = (2x+1)^4$, $f'(x) = 4(2x+1)^3 \cdot (2x+1)' = 8(2x+1)^3$
2. $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

3. $f(x)=tg\frac{x}{4}$, $f'(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$

Пример 2: Найти производную функции $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$, если $x_0=0$:

$$f(x)'=3\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(0)'=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Содержание работы

Вариант №1	Вариант №2
1. Найдите производные функций:	
а) $f(x)=4^{-x}+4x^3$	*а)* $f(x)=3x^2-2^{-x}$
б) $f(x)=2e^x-e^{-2x}$	*б)* $f(x)=e^{2x}-2e^x$
в) $f(x)=2\ln(x+1)$	*в)* $f(x)=3\ln(x-2)$
2. Найдите $f'(x_0)$, если:	
а) $f(x)=(4x+3)^6,\quad x_0=-1$	*а)* $f(x)=(3x-2)^5,\quad x_0=1$
б) $f(x)=\sqrt{x^2-8},\quad x_0=3$	*б)* $f(x)=\sqrt{5-x^2},\quad x_0=-2$
в) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad x_0=\frac{\pi}{8}$	*в)* $f(x)=\frac{1}{4}\cos 4x,\quad x_0=\frac{\pi}{16}$
г) $f(x)=\sin 3x-tgx,\quad x_0=0$	*г)* $f(x)=\cos 4x+ctgx,\quad x_0=\frac{\pi}{2}$
д) $f(x)=(3x-5)^3+\frac{1}{(3-x)^2},\quad x_0=2$	*д)* $f(x)=\frac{1}{(2x+7)^4}-(1-x)^3,\quad x_0=-3$
3. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:	
а) $f(x)=\left(x^2-6x+5\right)^2$	*а)* $f(x)=\left(x^2-2x-3\right)^2$
б) $f(x)=\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}$	*б)* $f(x)=4\sin\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{8}$

Полное исследование функции.

Теоретическая часть.

Схема исследования функции и построения графика:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Задача. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f)=R$.
2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

   Наклонных асимптот так же нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^3-3x}{x}=\infty$.
3. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-(x^3-3x)=-f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.
4. Точки пересечения графика с осью OX: $\begin{cases} y=0 \\ x=0,\pm\sqrt{3} \end{cases}$;

   Точки пересечения графика с осью OY: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.
5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

   $f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0, x=\pm1$

   Функция возрастает на $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; функция убывает на $[-1;1]$.

   $x=-1$ - точка максимума, $x=1$ - точка минимума.

   Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	*-1*	$(-1;1)$	*1*	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	*возраст.*	*2*	*убывает*	*-2*	*возраст.*
		макс.		*мин.*	

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

   $f''(x)=6x,\ f''(x)=0 \Rightarrow x=0$

   Функция вогнута на $[0,+\infty)$, выпукла на $(-\infty,0]$.

   $x=0$ - точка перегиба.

   Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	*0*	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	-	*0*	+
$f(x)$	*вогнута*	*0*	*выпукла*
		перегиб	

Содержание работы

Вариант №1

1. Найдите критические точки функции:

   а) $f(x)=x^4-2x^2-3x$

   б) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$

2. Исследуйте функцию на выпуклость:

   $f(x)=x^4-4x^3-18x^2+x-3$

Вариант №2

1. *а)* $f(x)=2+18x^2-x^4$

   б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$

2. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-5x+3$

3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x)=x^3-3x^2$ $\qquad$ $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x$

Тема: Построение графиков

Теоретическая часть.

Схема исследования функции и построения графика:

8. Найти область определения функции $D(f)$.
9. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
10. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
11. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
12. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
13. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
14. Построить график функции.

Задача.Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x$ и построить ее график:

Решение:

7. $D(f)=R$.
8. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

   Наклонных асимптот так же нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x}{x}=\infty$.
9. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-(x^3-3x)=-f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.
10. Точки пересечения графика с осью *OX:* $\begin{cases} y=0 \\ x=0,\pm\sqrt{3} \end{cases}$;

    Точки пересечения графика с осью *OY:* $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.
11. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

    $f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-3=0, x=\pm1$

    Функция возрастает на $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; функция убывает на $[-1;1]$.

    $x=-1$ - точка максимума, $x=1$ - точка минимума.

    Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	*-1*	$(-1;1)$	*1*	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	*возраст.*	*2*	*убывает*	*-2*	*возраст.*
		макс.		*мин.*	

12. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

    $f''(x)=6x,\ f''(x)=0\Rightarrow x=0$

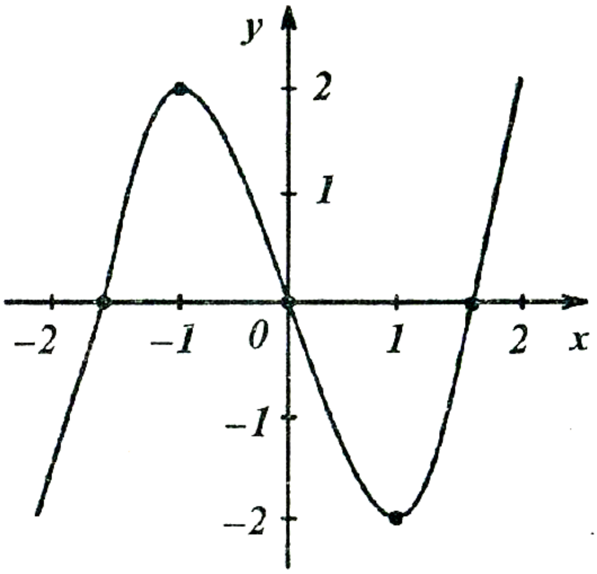
    Функция вогнута на $[0,+\infty)$, выпукла на $(-\infty,0]$.

    $x=0$ - точка перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	*0*	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	-	*0*	+
$f(x)$	*вогнута*	*0*	*выпукла*
		перегиб	

13. Построим график функции:



Содержание работы

Вариант №1	**Вариант №2**

1.Найдите критические точки функции:

а) $f(x)=x^4-2x^2-3x$ *а)* $f(x)=2+18x^2-x^4$

б) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$ *б)* $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$

2.Исследуйте функцию на выпуклость:

$f(x)=x^4-4x^3-18x^2+x-3$ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-5x+3$

3.Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x)=x^3-3x^2$ $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+4x$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

Тема: Производные и дифференциалы высших порядков. Правило Лопиталя

Теоретическая часть

*Определение 1:*Производная второго порядка – это производная от производной первого порядка: $y''=\left(y'(x)\right)'$.

Определение 2:Производная *n*-го порядка – это производная от производной $(n-1)$порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Задача:Найти производную четвертого порядка от функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$:

Решение:

$f'(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)' = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = \left(3x^2 - 4x\right)' = 6x - 4$

$f'''(x) = \left(6x - 4\right)' = 6$

$f^{(IV)}(x) = \left(6\right)' = 0$

*Определение:*дифференциалом функции$y = f(x)$(или дифференциалом первого порядка) называется произведение производной этой функции $f'(x)$на произвольное приращение аргумента Δx: $dy = f'(x)\Delta x$

Замечание: дифференциал аргумента равен приращению аргумента: $dx = \Delta x$. Поэтому дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = f'(x)dx$$

Определение: дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = f''(x)dx^2$, т.е. дифференциал второго порядка функции$y = f(x)$равен произведению второй производной этой функции на квадрат дифференциала аргумента.

Задача. Найти дифференциалы второго порядка следующих функций

1) $y = lnsin^2 2x$, 2) $y = e^{-x}$.

Решение. 1) $y' = \frac{1}{sin^2 2x} \cdot 2sin2xcos2x \cdot 2 = 4ctg2x$;

$y'' = -4 \cdot \frac{1}{sin^2 2x} \cdot 2 = -\frac{8}{sin^2 2x}$; $d^2y = y''(x)dx^2 = -\frac{8dx^2}{sin^2 2x}$

2) $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$; $d^2y = y''(x)dx^2 = e^{-x}dx^2$

Содержание работы

Вариант 1.

1. найти производные второго порядка

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

$y = x^2\sqrt{1 - x^2}$

$y = x\ln(x + 1)$

2. найти производную -го порядка

$y = xe^x$

$y = 5^x$

$y = \frac{1}{3x + 5}$

3. В момент времени $t = 1$найдите скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону: $s = sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$.

4. найдите дифференциалы первого порядка следующих функций

$y = \ln cos^2 x$

$y = arccosx^2$

5. найдите дифференциалы второго порядка следующих функций

$y = \ln tg2x$

$y = arccosx$

6. вычислите дифференциал функции $y = \ln cos^2 x$ при $x = \frac{\pi}{4}$и $dx = 0{,}01$

Вариант 2.

1. найти производные второго порядка

$$y = sin^2 3x$$

$$y = \frac{x+1}{2x+3}$$

$$y = \ln tgx$$

2. найти производную -го порядка

$y = \ln x$

$y = sinx$

$y = 3^x$

3. В момент времени $t = 1$найдите скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону: $s = -cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$.

4. найдите дифференциалы первого порядка следующих функций

$$y = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$y = arcctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. найдите дифференциалы второго порядка следующих функций

$y = a^{3x}$

$y = arctgx^2$

6. вычислите дифференциал функции $y = \ln tg2x$ при $x = \frac{\pi}{8}$и $dx = 0{,}03$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

Тема: Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Теоретическая часть

Формулы интегрирования:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$
7. $\int \cos xdx = \sin x + C$
8. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = arcctgx + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Задача:Найти неопределенные интегралы:

а) $\int 5x^7 dx = 5\int x^7 dx = 5 \cdot \frac{x^8}{8} + C$.

Метод подстановки или метод замены переменной.

Этот метод является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Положим $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда имеет место следующая формула: $\boxed{\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$.

Задача.Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

а) $\int \cos 3x dx = \begin{cases} 3x = t, \qquad x = \frac{t}{3} \\ dx = x'dt = \left(\frac{t}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}dt \end{cases} = \int \frac{1}{3} \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$

б) $\int \frac{6}{(3x-1)^3} dx = \begin{cases} 3x-1 = t, \qquad x = \frac{t+1}{3} \\ dx = x'dt = \left(\frac{t+1}{3}\right)' dt = \frac{1}{3}dt \end{cases} = \int \frac{6}{t^3} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{6}{3} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{t^2} + C = -\frac{1}{(3x-1)^2} + C.$

в) $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C.$

Замечание: Этот пример допускает следующий общий вывод:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C} \text{ или } \boxed{\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C}$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Чаще всего формула применяется к интегралам вида:

1. $\int P(x) \cdot e^{\alpha x} dx$, $\int P(x) \cdot \sin \alpha x dx$, $\int P(x) \cdot \cos \alpha x dx$, где $P(x)$ - многочлен, $\alpha \neq 0$.

В этих интегралах $u = P(x)$, $dv = e^{\alpha x} dx$, $dv = \sin \alpha x dx$, $dv = \cos \alpha x dx$.

2. $\int R(x)\cdot \ln x dx$, $\int R(x)\cdot arctg\alpha x dx$, $\int R(x)\cdot arcctg\alpha x dx$, где $R(x)$ - рациональная функция, $\alpha \neq 0$. В этих интегралах $dv = R(x)dx$, $u = \ln x$, $u = arctg\alpha x dx$, $u = arcctg\alpha x dx$.

Задача. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $$\int x\cdot \cos x dx = \begin{cases} u = x, & dv = \cos x dx \\ du = x' dx = dx & v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x \end{cases} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

б) $$\int \ln x dx = \begin{cases} u = \ln x, & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x} & v = \int dv = \int dx = x \end{cases} =$$

$$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

Содержание работы

Вариант 1.

1. вычислите интегралы методом замены

1) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$

2) $\displaystyle\int \frac{z^2 dz}{1+z^3}$

3) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

4) $\displaystyle\int x cos(x^2+1)\, dx$

5) $\displaystyle\int \frac{e^{\varphi} d\varphi}{\sqrt{1-e^{2\varphi}}}$

6) $\int \frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}$

2. вычислите интегралы методом интегрирования по частям

1) $\int \arcsin x\,dx$

2) $\int e^{x}\cos x\,dx$

3.найдите интеграл

$\int \frac{x^{2}+x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$

<u>Вариант 2.</u>

1. вычислите интегралы

1) $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1}$

2) $\int xe^{-x^{2}}dx$

3) $\int \frac{cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$

4) $\int \frac{dz}{z\sqrt{1-ln^{2}z}}$

5) $\int \frac{x^{2}dx}{1+x^{6}}$

6) $\int \frac{x^{2}dx}{cos^{2}x^{3}}$

2. вычислите интегралы методом интегрирования по частям

1) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int e^{x}\sin x\,dx$

3. найдите интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}-x^{-\frac{1}{2}}}{x\sqrt{x}}dx$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

Тема: Вычисление определенных интегралов

Теоретическая часть

Определение: Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Интегральная сумма $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i - произвольная точка существующего отрезка.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(x)$ - подынтегральная функция,

x - переменная интегрирования.

Теорема: Если $F(x)$ - первообразная функция для непрерывной функции $y=f(x)$, т.е. $F(x)'=f(x)$. То имеет место формула: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$

Определение: Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для $y=f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Задача: Вычислить:

а) $\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3-2^3 = 19$

б) $\int_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi+\cos 0 = 2$

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3.Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *(свойство аддитивности).*

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

6. Если функция $f(x) \ge 0$ всегда на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

7. Если $f(x) \le g(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Задача: Вычислить:

а) $\int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx = 3\int_0^3 xdx - \int_0^3 x^2dx = 3 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5.$

Основные способы вычисления определенного интеграла:

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Метод подстановки или замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

Задача. Вычислить:

а) $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx$. На отрезке $\left[-4, -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx = \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} 4xdx + \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{2dx}{x^2} = \left.\left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\right|_{-4}^{-\frac{1}{2}} = -28.$$

б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x} = t$. Отсюда находим новые пределы интегрирования: $t_1 = 1$ при $a = 0$ и $t_2 = 4$ при $b = 5$. Подставляя, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \begin{cases} \sqrt{1+3x} = t, \\ 1+3x = t^2, \\ x = \dfrac{t^2-1}{3}, \\ dx = \dfrac{2t}{3}dt \end{cases} = \int_1^4 \frac{\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt}{3\cdot t\cdot 3} = \frac{2}{9}\int_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\cdot\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^4 - \left.\frac{2}{9}\cdot t\right|_1^4 = 4.$$

в) Интегрируем по частям.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2xdx = \begin{cases} u = \arccos 2x, \\ du = -\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \\ dv = dx, \\ v = x \end{cases} = \left[\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\right] = \left.\left(x\cdot\arccos 2x\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(1-4x^2\right)}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left.\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

Содержание работы

Вариант №1 **Вариант №2**

Вычислите:Вычислите:

1. $\int_2^3 x^3dx$ 2. $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$ 1. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 2. $\int_2^{\frac{4}{5}} \frac{dx}{x^3}$

3. $\int_0^3 (x^2+4x-1)dx$ 4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{2}{x^3}+8\right)dx$ 3. $\int_0^2 (3x^2-2x+4)dx$ 4. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \left(3-\frac{1}{x^2}\right)dx$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ 5. $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int_1^2 (1-x)^3 dx$ 8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{x}{2}dx$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$ 8. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(3x+5)^3}$

9. $\int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+3x^2\right)dx$ 10. $\int_0^4 e^{0,5x-1}dx$ 9. $\int_3^6 \left(4x-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)dx$ 10. $\int_{-4}^4 e^{0,25x+1}dx$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

Тема: Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных

Теоретическая часть

*Определение:*переменная величина zназывается функцией двух переменных величин xи y, если каждой паре допустимых значений xи y соответствует единственное значение z.

Обозначение: $z = f(x, y)$.

Определение: частной производной функции$z = f(x, y)$**по переменной** $\boldsymbol{x}$называется производная этой функции при постоянном значении переменной y.

Обозначение:$\frac{\partial z}{dx}$ или z'_x

Определение: частной производной функции$z = f(x, y)$**по переменной** $\boldsymbol{y}$называется производная этой функции при постоянном значении переменной x.

Обозначение:$\frac{\partial z}{dy}$ или z'_y.

Замечание: частная производная функции нескольких переменных по одной переменной определяется как производная этой функции по соответствующей переменной при условии, что остальные переменные считаются постоянными.

Определение: полным дифференциалом функции$z = f(x, y)$в некоторой точке $M(x; y)$ называется выражение

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вычисляются в точке$M(x;y)$, а $dx=\Delta x, dy=\Delta y$.

Задача.Вычислить значение частной производной функции $z=\frac{x-y}{x+y}$в точке $M(-2;3)$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$$

В полученные выражения подставим значения $x=-2$ и $y=3$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=z'_x(-2;3)=\frac{2\cdot 3}{(-2+3)^2}=6$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=z'_y(-2;3)=-\frac{2\cdot(-2)}{(-2+3)^2}=4$$

Задача. Вычислить полный дифференциал функции $z=x^3-2x^2y^2+y^3$в точке $M(1;2)$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-4xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-4x^2y+3y^2$$

Вычислим значения частных производных в точке $M(1;2)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M=z'_x(1;2)=3\cdot 1^2-4\cdot 1\cdot 2^2=-13$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M=z'_y(1;2)=-4\cdot 1^2\cdot 2+3\cdot 2^2=4$$

Согласно формуле, получим $dz=-13dx+4dy$.

Содержание работы

Вариант1.

1. найдите частные производные следующих функций

1) $z=x^3-3x^2y+4x^3y^2-y^3$

2) $z=\frac{3x}{y}$

2. вычислите значения частных производных функций в заданных точках:

1) $z=\frac{x-2y}{x+y}$в точке $M(2;-1)$

2) $z=e^{\frac{3x}{y}}$в точке $M(1;1)$

3. вычислите полные дифференциалы функций в заданных точках:

1) $z = \frac{y}{x+y}$в точке $M(2;-1)$

2) $z = \sin(x^2 + 2y)$при $x = 1, y = 2, dx = 0{,}1$ и $dy = 0{,}2$

Вариант2.

1. найдите частные производные следующих функций

1) $z = \frac{y-3x}{x+4y}$

2) $z = e^{-\frac{x}{y}}$

2. вычислите значения частных производных функций в заданных точках:

1) $z = \ln(x^2 + y^2)$в точке $M(2;-2)$

2) $z = \frac{y}{x} + x$в точке $M(1;-2)$

3. вычислите полные дифференциалы функций в заданных точках:

1) $z = e^{\frac{x}{2y}}$при $x = 2, y = 1, dx = 0{,}2$ и $dy = 0{,}1$

2) $z = \ln(2x + y)$в точке $M(1; 0)$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

Тема: Вычисление частных производных и дифференциалов высших порядков

Теоретическая часть

Замечание: частные производные являются функциями 2х переменных и могут в свою очередь иметь частные производные, которые называются частными производными 2го порядка от функции$z = f(x; y)$.

Обозначение:$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Определение:Частные производные z''_{xy} и,z''_{xy} отличающиеся порядком дифференцирования, называются смешанными частными производными второго порядка.

Обозначение:$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Задача. Найти частные производныевторого порядка функции $z = sin(x^2 + 4y) - y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot cos(x^2 + 4y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4 \cdot cos(x^2 + 4y) - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(2x \cdot cos(x^2 + 4y)\big) = 2cos(x^2 + 4y) + 2x \cdot (-sin(x^2 + 4y) \cdot 2x)$$
$$= 2cos(x^2 + 4y) - 4x^2 sin(x^2 + 4y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(4 \cdot cos(x^2 + 4y) - 2y) = -16\sin(x^2 + 4y) - 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(2x \cdot cos(x^2 + 4y)\big) = -2x \cdot \sin(x^2 + 4y) \cdot 4 = -8x \cdot \sin(x^2 + 4y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (4 \cdot cos(x^2 + 4y) - 2y) = -4 \cdot \sin(x^2 + 4y) \cdot 2x = -8x \cdot \sin(x^2 + 4y)$$

Замечание:можно определить производные еще более высоких порядков. Так, для функции$z = f(x;y)$ можно написать восемь частных производных третьего порядка: $z'''_{xxx}; z'''_{xxy};\ z'''_{xyx};\ z'''_{xyy};\ z'''_{yxx};\ z'''_{yxy};\ z'''_{yyx};\ z'''_{yyy}$. .

Замечание:аналогично определяются частные производные высших порядков для функции с любым числом независимых переменных.

Определение: дифференциалом 2го порядка функции$z = f(x;y)$ называется дифференциал от дифференциала 1го порядка.

Обозначение:$d^2z = d(dz)$

Замечание:$d^3z = d(d^2z), \dots, d^nz = d(d^{n-1}z)$.

$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 z$, где квадрат понимается как повторное дифференцирование;

$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^3 z$; $d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^n z$

Содержание работы

Задача 1. Найти частные производные третьего порядка $z = x^3 + x^2y + y^3$.

Задача2. Найти частные производные второго порядка $z = arctg\frac{y}{x}$.

Задача3. Найтиd^2z, d^3zфункции $z = y\ln x$.

Задача 4. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$от функции $z = xcosy$, если $x = uv, y = 3u - v$

Задача5.Найти производную $\frac{du}{dt}$от функции $u = z^2 + y^2 + zy, y = e^x, z = sint$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14

Тема: Дифференциальные уравнения. Общие и частные решения.

Теоретическая часть

Определение: дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию yи ее производные или дифференциалы.

Обозначение:$F(x,y,y')=0, F(x,y,y'')=0, F\left(x,y,y',y'',..,y^{(n)}\right)=0.$

Определение: дифференциальным уравнением называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Определение: порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Определение: решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Определение: общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Замечание: общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Определение: частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. *Замечание:* значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Определение: дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

*Определение:*дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx$$

Далее проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx$$

<u>Задача.</u> Найти общее решение уравнения $x(1+y^2)dx=ydy$.

<u>Решение.</u> Разделив переменные, имеем

$$xdx=\frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx=\int\frac{ydy}{1+y^2};\ \ \frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln C$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2=\ln[C(1+y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.

<u>Задача.</u> Найти частное решение уравнения $s\ tgt\ dt+ds=0$, удовлетворяющее начальным условиям $s=4$при $t=\frac{\pi}{3}$.

<u>Решение.</u> Разделив переменные, имеем $tgt\ dt+\frac{ds}{s}=0.$

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = \ln C;\ -\ln cost + \ln s = \ln C$$

или $\ln s = \ln C + \ln cost, \quad s = Ccost$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = {}^{\pi}/_{3}$и $s = 4$в выражение для общего решения:

$$4 = Ccos\left(\frac{\tilde{\pi}}{3}\right), \text{или } 4 = {}^{C}/_{2}, \text{откуда } C = 8$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеем вид $s = 8cost$.

Содержание работы

Вариант 1.

1. Найти общие решения уравнений

1)$xydx = (1 + x^2)dy$

2) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$

3) $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}; y = 2$ при $x = 0$

2) $(1 + y)dx = (1 - x)dy; \quad y = 3$ при $x = -2$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = {}^{1}/_{2y}$.

Вариант 2.

1. Найти общие решения уравнений

1)$y^2dx + (x - 2)dy = 0$

2) $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$

3) $\sqrt{1 - x^2}dy - x\sqrt{1 - y^2}dx = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}; y = 4$ при $x = 0$

2) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0; \quad y = 1$ при $x = 1$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 4)$ для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

Тема: Уравнения с разделяющимися переменными

Теоретическая часть

Определение: дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию yи ее производные или дифференциалы.

Обозначение:$F(x, y, y') = 0, F(x, y, y'') = 0, F\left(x, y, y', y'', .., y^{(n)}\right) = 0$.

Определение: дифференциальным уравнением называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Определение: порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Определение: решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Определение: общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Замечание: общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Определение: частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. *Замечание:* значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Определение: дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

*Определение:*дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$$

Далее проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

<u>Задача.</u> Найти общее решение уравнения $x(1 + y^2)dx = ydy$.

<u>Решение.</u> Разделив переменные, имеем

$$xdx = \frac{ydy}{1 + y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1 + y^2}; \ \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \frac{1}{2}\ln C$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C(1 + y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.

<u>Задача.</u> Найти частное решение уравнения $s\ tgt\ dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив переменные, имеем $tgt\,dt + \frac{ds}{s} = 0.$
Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = \ln C;\ -\ln cost + \ln s = \ln C$$

или $\ln s = \ln C + \ln cost, \quad s = Ccost$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = {}^{\pi}/_{3}$и $s = 4$в выражение для общего решения:

$$4 = Ccos\left(\frac{\tilde{\pi}}{3}\right),\text{или } 4 = {}^{C}/_{2}\,,\text{откуда } C = 8$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеем вид $s = 8cost$.

Содержание работы

Вариант 1.

1. Найти общие решения уравнений
1)$xydx = (1 + x^2)dy$
2) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$
3) $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям
1) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}; y = 2$ при $x = 0$
2) $(1 + y)dx = (1 - x)dy; \quad y = 3$ при $x = -2$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = {}^{1}/_{2y}$.

Вариант 2.

1. Найти общие решения уравнений
1)$y^2dx + (x - 2)dy = 0$
2) $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$
3) $\sqrt{1 - x^2}dy - x\sqrt{1 - y^2}dx = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям
1) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}; y = 4$ при $x = 0$

2) $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0; \quad y = 1$ при $x = 1$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 4)$ для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью Oy.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16

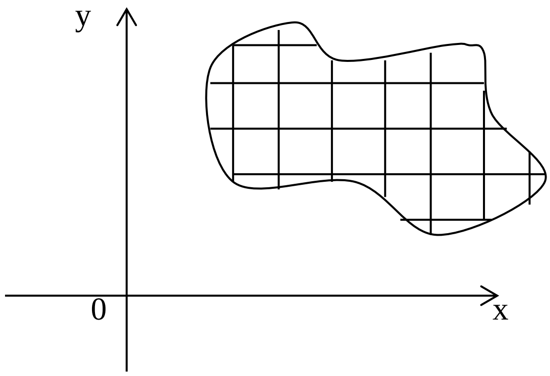
Тема: Приложение двойных интегралов.

Кратные интегралы.

Как известно, интегрирование является процессом суммирования. Однако суммирование может производится неоднократно, что приводит нас к понятию кратных интегралов. Рассмотрение этого вопроса начнем с рассмотрения двойных интегралов.

Двойные интегралы.

Рассмотрим на плоскости некоторую замкнутую кривую, уравнение которой $f(x, y) = 0$.



Совокупность всех точек, лежащих внутри кривой и на самой кривой назовем замкнутой областью Δ. Если выбрать точки области без учета точек, лежащих на кривой, область будет называется незамкнутой область Δ.

С геометрической точки зрения Δ - площадь фигуры, ограниченной контуром.

Разобьем область Δ на n частичных областей сеткой прямых, отстоящих друг от друга по оси x на расстояние Δx_i, а по оси y – на Δy_i. Вообще говоря, такой порядок разбиения наобязателен, возможно разбиение области на частичные участки произвольной формы и размера.

Получаем, что площадь S делится на элементарные прямоугольники, площади которых равны $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

В каждой частичной области возьмем произвольную точку $P(x_i, y_i)$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

где f – функция непрерывная и однозначная для всех точек области Δ.

Если бесконечно увеличивать количество частичных областей Δ_i, тогда, очевидно, площадь каждого частичного участка S_i стремится к нулю.

<u>Определение:</u> Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x, y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum_{\Delta}\sum f(x, y)\Delta y\Delta x$$

<u>Условия существования двойного интеграла.</u>

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) ограничена в замкнутой области Δ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно – гладких линий, то двойной интеграл* $\iint_{\Delta} f(x, y)d\Delta$ *существует.*

<u>Свойства двойного интеграла.</u>

1) $\iint_{\Delta}[f_1(x, y) + f_2(x, y) - f_3(x, y)]dydx = \iint_{\Delta} f_1(x, y)dydx + \iint_{\Delta} f_2(x, y)dydx - \iint_{\Delta} f_3(x, y)dydx$

2) $\iint\limits_{\Delta} kf(x,y)dydx = k\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx$

3) Если $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = \iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dydx + \iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dydx$$

4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx = f(x_0, y_0)\cdot S$$

5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx \geq 0$.

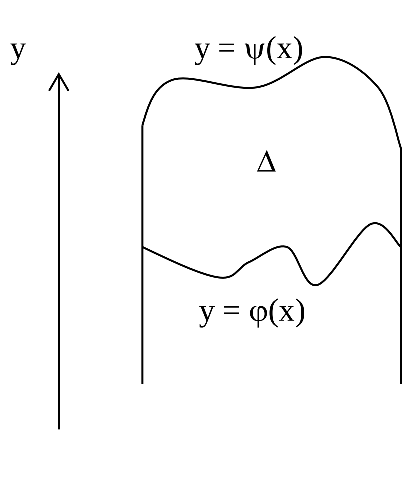
6) Если $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)dydx \leq \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)dydx$.

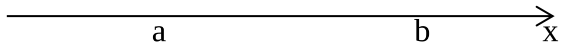
7) $\left|\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dydx\right| \leq \iint\limits_{\Delta} |f(x,y)|dydx$.

<u>Вычисление двойного интеграла.</u>

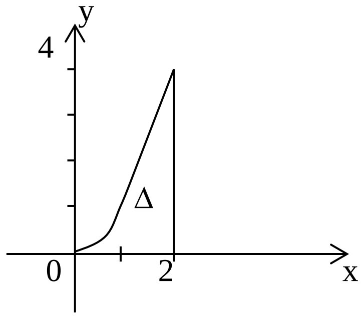
<u>Теорема.</u> *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями x = a, x = b, (a < b), y = φ(x), y = ψ(x), где φ и ψ - непрерывные функции и φ ≤ ψ, тогда*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$





Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)dxdy$, если область Δ ограничена линиями: y = 0, y = x^2, x = 2.

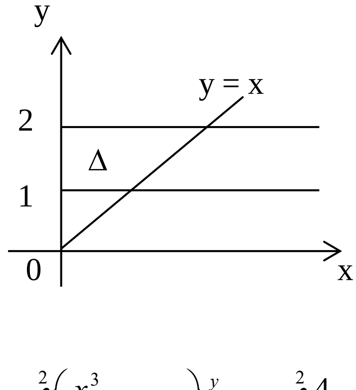


$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{x^2}(x-y)dy=\int\limits_0^2(xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x^2}=\int\limits_0^2(x^3-\frac{x^4}{2})dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^2=$$
$$=4-3{,}2=0{,}8$$

Теорема. *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy$, если область Δ ограничена линиями y = x, x = 0, y = 1, y = 2.

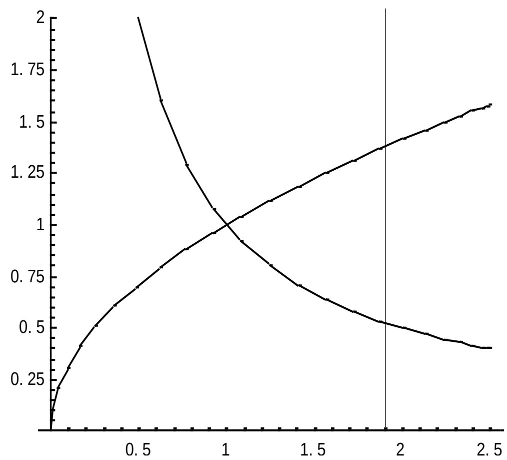


$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)dxdy=\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^x(x^2+y^2)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y dy=\int\limits_1^2\frac{4}{3}y^3dy=\frac{4}{12}y^4\Big|_1^2=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=5$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy$, если область интегрирования Δ ограничена линиями x = 0, x = y^2, y = 2.

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)dx=\int_0^2 (x^3-yx^2+yx)\Big|_0^{y^2}dy=$$
$$=\int_0^2(y^6-y^5+y^3)dy=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{244}{21}$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy$, если область интегрирования ограничена линиями xy=1, y = $\sqrt{x}$, x = 2.



$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy=\int_1^2 dx\int_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x dy=\int_1^2\frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\left[\frac{x\ln x}{2}-\frac{\ln x}{2x^2}\right]dx$$

1. $$\int x\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4};$$
$$\int_1^2 x\ln x dx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

2. $$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\left\{\begin{matrix} \ln x=t; & x=e^t; \\ dt=\frac{1}{x}dx; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{txdt}{x^2}=\int\frac{tdt}{x}=\int e^{-t}tdt=\left\{\begin{matrix} u=t; & du=dt; \\ dv=e^{-t}dt; & v=-e^{-t};\end{matrix}\right\}=-te^{-t}+$$

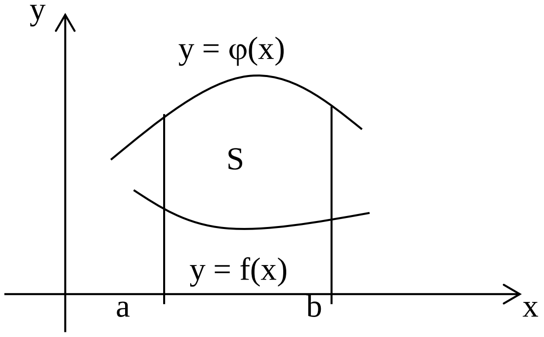
$$+\int e^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x};$$

$$\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx=\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}+1=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2};$$

3. $\iint\limits_{\Delta} y\ln x dxdy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

1) Вычисление площадей в декартовых координатах.

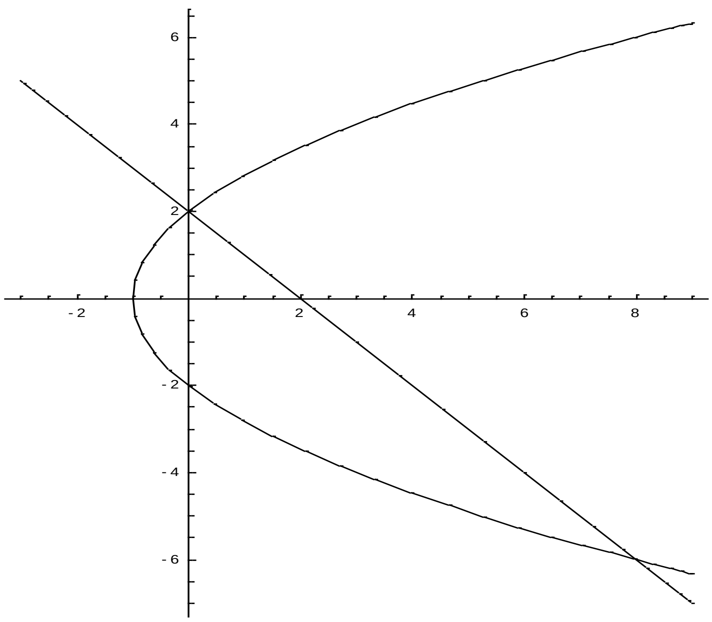


Площадь S, показанная на рисунке может быть вычислена с помощью двойного интеграла по формуле:

$$S = \int_a^b \int_{f(x)}^{\varphi(x)} dydx$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от $x = \frac{y^2 - 4}{4}$ до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

$$S = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dxdy = \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4}\right) dy = \int_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4}\right) dy = \frac{1}{4} \int_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Bigg|_{-6}^{2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 36}{2} - 12 \cdot 6\right)\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(88 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

Тема: Исследование сходимости знакочередующихся рядов.

Теоретическая часть

Определение: если $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$-бесконечная числовая последовательность, то выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n +..$ называется числовым рядом.

Определение: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости: если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не существует или не равно нулю, то ряд расходится.

Достаточный признак сходимости (Признак Даламбера): Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

1) если $q < 1$ – ряд сходится
2) если $q > 1$ – ряд расходится
3) если $q = 1$ – вопрос о сходимости или расходимости не решается.

<u>Задача.</u> Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$на сходимость по признаку Даламбера.

<u>Решение.</u> Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Таким образом, ряд сходится.

Определение: числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n +..$называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Определение: числовой ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_n +..$ называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

Замечание: Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремится к нулю при$n \to \infty$, то ряд сходится.
Определение: знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.
Замечание: если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется условно (неабсолютно) сходящимся. Из расходимости ряда в общем случае не следует расходимость ряда.

Замечание: для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.
Замечание: Для решения вопроса об абсолютной или условной сходимости знакочередующегося ряда необходимо рассмотреть ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.
Замечание: если при исследовании этого ряда с помощью одного из признаков сходимости (признака Даламбера, признака сравнения рядов) ряд окажется сходящимся, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно; если же ряд окажется расходящимся, то знакочередующийся ряд сходится условно.
Задача. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

Решение. 1) члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2) Используя признак Лейбница, получим $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \cdots$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$, т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (q = \frac{1}{2})$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Содержание работы

Вариант 1.

Задача 1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{4n-1}$

Задача 2.Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{1/4}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 3^n}$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовые ряды по признаку Даламбера

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{3})^n}$

Вариант 2.

Задача 1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{6n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$

Задача 2.Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(4n-1)^2}$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовые ряды по признаку Даламбера

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{n+1}$

Тема: Исследование рядов на абсолютную и условную сходимость

Теоретическая часть

Определение: если $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$-бесконечная числовая последовательность, то выражение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n +$.. называется числовым рядом.

Определение: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости: если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не существует или не равно нулю, то ряд расходится.

Достаточный признак сходимости (Признак Даламбера): Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – положительный ряд и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

1) если $q < 1$ – ряд сходится
2) если $q > 1$ – ряд расходится
3) если $q = 1$ – вопрос о сходимости или расходимости не решается.

Задача. Исследовать числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$на сходимость по признаку Даламбера.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Таким образом, ряд сходится.

Определение: числовой ряд $u_1+u_2+\cdots+u_n+..$называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Определение: числовой ряд $u_1+u_2+\cdots+u_n+..$ называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

Замечание: Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член u_n стремится к нулю при$n\to\infty$, то ряд сходится.

Определение: знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Замечание: если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд расходится, то данный ряд называется условно (неабсолютно) сходящимся. Из расходимости ряда в общем случае не следует расходимость ряда.

Замечание: для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

Замечание: Для решения вопроса об абсолютной или условной сходимости знакочередующегося ряда необходимо рассмотреть ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.

Замечание: если при исследовании этого ряда с помощью одного из признаков сходимости (признака Даламбера, признака сравнения рядов) ряд окажется сходящимся, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно; если же ряд окажется расходящимся, то знакочередующийся ряд сходится условно.

Задача. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

Решение. 1) члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2) Используя признак Лейбница, получим $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\cdots$ и $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, т.е. ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (q=\frac{1}{2})$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Содержание работы

Вариант 1.

Задача 1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{4n-1}$

Задача 2.Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{1/4}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot 3^n}$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовые ряды по признаку Даламбера

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{3})^n}$

Вариант 2.

Задача 1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}$

Задача 2.Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(4n-1)^2}$

Задача 3. Исследовать на сходимость числовые ряды по признаку Даламбера

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{n+1}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №18

Тема: Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряд. Ряды Фурье

Теоретическая часть

Определение: рядом Тейлора для функции$f(x)$называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

Определение:Если $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, называемый рядом Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Для разложения функции$f(x)$в ряд Маклорена необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке $x=0$,т.е. $f(0), f'(0), f''(0), \dots f^{(n)}(0)$;

2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу;

3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ $(a_n\neq 0, n=1,2,3,\dots)$

Для разложения функции$f(x)$в ряд Тейлора необходимо:

1) вычислить значения функции и ее последовательных производных в точке$x=a$,т.е. $f(a), f'(a), f''(a), \dots f^{(n)}(a)$;

2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и ее последовательных производных в формулу;

3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ $(a_n\neq 0, n=1,2,3,\dots)$

Задача. Разложить в ряд Маклорена функцию$f(x)=e^x$.

Решение. Вычислим значения функции и ее производных при $x=0$; имеем $f(x)=e^x$, $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x; f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

Подставив эти значения в формулу, получим разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Промежуток сходимости найдем по формуле:

$$a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}; \ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{n!} = n+1$$

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}|n+1| = \infty$

Полученный ряд сходится к функции $f(x) = e^x$ при любых значениях x, так как в любом промежутке функция $f(x) = e^x$ и ее производные по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом.

Определение: Ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,$$

называется рядом Фурье функции$f(x)$.

Замечание: функция$f(x)$с областью определения $-\pi \le x \le \pi$может быть разложена в ряд Фурье, сходящихся к данной функции $f(x)$ при определенных условиях, называемых условиями Дирихле:

1) функция должна быть непрерывной в промежутке $-\pi \le x \le \pi$ или может иметь в указанном промежутке конечное число разрывов Iрода.

2)функция должна иметь конечное число экстремумов или не иметь их совсем.

<u>Задача.</u> Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, \ \text{при } 0 \le x \le \pi \end{cases}$

<u>Решение</u>. Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $[-\pi, \pi]$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right] = -1\cdot\frac{\sin nx^0}{n\pi}_{-\pi} + \frac{\sin nx^\pi}{n\pi}_0 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos nx^0}{n}_{-\pi} - \frac{\cos nx^\pi}{n}_0 = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos \pi n)$$

$$= \begin{cases} 0, k - \text{четное} \\ \frac{4}{\pi n}, k - \text{нечетное} \end{cases}$$

Следовательно, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2p+1)x}{2p+1} + \cdots\right]$$

Это равенство справедливо во всех точках, кроме точек разрыва.

Содержание работы

Вариант 1.

Задача 1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$.

Задача 2. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора по степеням $x + 3$функцию $f(x) = e^{-2x}$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ при $-\pi \le x \le \pi$

Вариант 2.

Задача 1. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Задача 2. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(1+5x)$.

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора по степеням $x - \frac{\pi}{3}$функцию $f(x) = \cos x$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$при $-\pi \le x \le \pi$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №19

Тема: Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Теоретическая часть

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение: комплексным числом называется число вида $z = a + bi, a, b$действительные числа, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Определение: Число a называется действительной частью комплексного числа.

Обозначение:$a = Re\ z$.

Определение: Число bi называется мнимой частью комплексного числа, b- коэффициент мнимой части.

Обозначение:$b = Im\ z$.

Определение:$\bar{z} = a - bi$называется сопряженным с$z = a + bi$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме $z_1 = a + bi$и $z_2 = c + di$.

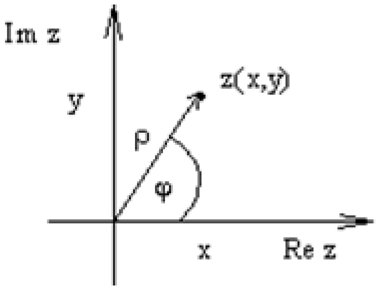
1. Сложение $z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$
3. Умножение $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac + dci + adi + bdi^2 = (ac-bd) + (bc+ad)i$
4. Деление (при делении комплексных чисел, числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac-bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

5. Возведение в степень $z_1^2 = (a+bi)^2 = \left\{\begin{matrix} \text{по формуле} \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{matrix}\right. = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

2. Геометрическая форма комплексного числа

Определение:геометрическая интерпретация комплексного числа состоит в том, что комплексному числу $z = x + yi$ставится в соответствие точка с координатами (x, y)на координатной плоскости таким образом, что действительная часть представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.



Определение: модулем комплексного числа называется абсолютная величина вектора соответствующего этому числу.

Обозначение:$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение: аргументом комплексного числа $z \neq 0$называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим данному числу.

Обозначение:$\varphi = \arg z, \arg(x + yi)$.

Алгоритм нахождения аргумента комплексного числа $\boldsymbol{z = x + yi}$:

1. Найти острый угол $\alpha = arctg\left|\frac{y}{x}\right|$.

2. Найти аргумент комплексного числа в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит вектор, соответствующий этому числу:

- I четверть $\varphi = \alpha$
- II четверть $\varphi = \pi - \alpha$
- III четверть $\varphi = \pi + \alpha$
- IV четверть $\varphi = 2\pi - \alpha$

<u>Задача.</u> Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z_1^2$, если $z_1 = 10 + 5i$и $z_2 = 3 - 4i$.

<u>Решение.</u>

$z_1 + z_2 = (10 + 5i) + (3 - 4i) = 13 - i$

$z_1 - z_2 = (10 + 5i) - (3 - 4i) = 7 + 9i$

$z_1 \cdot z_2 = (10 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 30 - 40i + 15i + 20 = 50 - 25i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(10 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{30 - 15i + 40i + 20i^2}{3^2 - (4i)^2} = \frac{10 + 55i}{25} = 0{,}4 + 2{,}2i$$

$z_1^2 = (10 + 5i)^2 = 100 + 100i - 25 = 75 + 100i$

Содержание работы

<u>Вариант1.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_2}{z_1}, z_1^2$, если $z_1 = 1 - i$и $z_2 = 4i - 2$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 4 + 4i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^9.

Задача 4. Выполните действия $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\ \frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

<u>Вариант 2.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -6 + 4i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^{10}.

Задача 4. Выполните действия $\frac{18(\cos 47° + isin\ 47°)}{9(\cos 17° + isin\ 17°)}$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$

<u>Вариант3.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 15 - 5i$ и $z_2 = 1 + 2i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 3 - 3i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^7.

Задача 4. Выполните действия $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isin\ \frac{\pi}{3}\right) \times \sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$

<u>Вариант4.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 5 + 10i$ и $z_2 = 2 - i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^5.

Задача 4. Выполните действия $\frac{20(\cos 72° + isin\ 72°)}{5(\cos 12° + isin\ 12°)}$

Задача 5. Решите уравнение $4x^2 + 4x + 5 = 0$

<u>Вариант5.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 7 - 3i$ и $z_2 = 9 + i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^8.

Задача 4. Выполните действия $3(\cos 20° + isin\ 20°) \times 2(\cos 35° + isin\ 35°)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 14x + 74 = 0$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №20

Тема: Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Теоретическая часть

Тригонометрическая форма комплексного числа

Если обозначить через rрасстояние точки (x, y)от начала координат, через φ угол наклона к положительной оси Oxвектора, идущего из начала координат в точку (x, y), то

$x = rcos\ \varphi$

$y = r\sin\varphi$

$x + yi = r(cos\ \varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая запись комплексного числа

$z = |z| \cdot (\cos\arg(z) + isinarg\ (z))$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$

1. Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$
2. Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$
3. Возведение в степень $z^n = \big(r(\cos\varphi + isin\ \varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + isin\ n\varphi)$
4. Извлечение из под корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\big(r(\cos\varphi + isin\varphi)\big)}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень}, k = 0,1, \dots .n - 1$$

Решение квадратных уравнений с комплексными числами

Замечание: одно из причин введения комплексного числа состоит в том, чтобы добиться разрешимости любого квадратного уравнения:

Значение $D = b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$D > 0$	Уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	Уравнение имеет один действительный корень $x = \frac{-b}{2a}$
$D < 0$	Уравнение имеет два различных (сопряженных) мнимых корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a}$

Задача. Записать число $z = -\sqrt{3} - i$в тригонометрической форме
Решение.

1. Находим $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

2. Находим α, $\alpha = arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

3. IIIчетверть $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

4. $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + isin\,\frac{7\pi}{6}\right)$

Задача. Найти $z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 12(\cos 225° + isin225°)$ и $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75° + isin75°)$
Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225° + 75°) + isin(225° + 75°)) = 18(cos300° + isin300°)$$
$$= 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9\sqrt{3}i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 12 \cdot \frac{2}{3}(\cos(225° - 75°) + isin(225° - 75°)) = 8(cos150° + isin150°)$$
$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i$$

Задача.Вычислить $\sqrt[4]{-81}$, если $-81 = 81(\cos\pi + isin\pi)$
Решение.$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81(\cos\pi + isin\pi)} = \sqrt[4]{-81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\,\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0{,}1{,}2{,}3$
$$z_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}$$

Задача.Решить уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$и $z^2 - 3iz + 4 = 0$во множестве комплексных чисел
Решение.

$$x^2 - 4x + 5 = 0z^2 - 3iz + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -4 < 0D = 9i^2 - 16 = -25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm ix_{1,2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} = i\text{или} - 4i$$

Содержание работы

Вариант1.
Задача 1. Найти $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_2}{z_1}, z_1^2$, если $z_1 = 1 - i$и $z_2 = 4i - 2$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 4 + 4i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^9.

Задача 4. Выполните действия $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\ \frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

<u>Вариант 2.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 1 + i$и $z_2 = -6 + 4i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^{10}.

Задача 4. Выполните действия $\frac{18(\cos 47° + isin\ 47°)}{9(\cos 17° + isin\ 17°)}$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 2x + 2 = 0$

<u>Вариант3.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 15 - 5i$и $z_2 = 1 + 2i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 3 - 3i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^7.

Задача 4. Выполните действия $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isin\ \frac{\pi}{3}\right) \times \sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + isin\ \frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$

<u>Вариант4.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 5 + 10i$и $z_2 = 2 - i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^5.

Задача 4. Выполните действия $\frac{20(\cos 72° + isin\ 72°)}{5(\cos 12° + isin\ 12°)}$

Задача 5. Решите уравнение $4x^2 + 4x + 5 = 0$

<u>Вариант5.</u>

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$,$\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 7 - 3i$и $z_2 = 9 + i$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$

Задача 3.Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^8.

Задача 4. Выполните действия $3(\cos 20° + isin\ 20°) \times 2(\cos 35° + isin\ 35°)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 14x + 74 = 0$

Список используемой литературы

Список основной литературы

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.- 400с.

Список дополнительной литературы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/615108

2. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/872363