ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по учебной дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

для обучающихся по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Составитель: Шляхова Н.И.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД», протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26 » мая 2022 г.

Оглавление

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» играет важную роль в воспитании научного мировоззрения, содействует развитию логического мышления, способствует формированию математической культуры и является частью общечеловеческой культуры.

Цель освоения дисциплины: Выработка навыков математического мышления; навыков использования математических методов и основ математического моделирования, математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:

- понимание и восприятие основных понятий теории вероятностей и математической статистики;
- формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;
- формирование минимума фундаментальных математических знаний в области теории случайных событий и случайных величин;
- применение основных понятий, идей и методов теории вероятностей и математической статистики для решения базовых задач;
- применение вероятностных методов решения базовых математических задач в практической деятельности;
- использование статистических методов для сбора и анализа результатов экспериментов и диагностики в профессиональной деятельности;
- обучение студентов построению математических моделей случайных явлений, изучаемых естественными науками, физико-техническими и инженерно-физическими дисциплинами, анализу этих моделей;
- привитие студентам навыков интерпретации теоретико-вероятностных конструкций внутри математики и за ее пределами, заложить понимание формальных основ дисциплины и выработать у студентов достаточный уровень вероятностной интуиции, позволяющей им осознанно переводить неформальные стохастические задачи в формальные математические задачи теории вероятностей.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документационной на государственном и иностранном языке.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 13. Демонстрирующий умение эффективно взаимодействовать в команде, вести диалог, в том числе с использованием средств коммуникации.

Практическое занятие № 1 Элементы комбинаторики. Случайные события. Классическое определение вероятности. Основы теории вероятностей.

1. Теоретическая часть

Решение задач на вычисление вероятностей по классической схеме часто облегчается использованием формул комбинаторики.

Правило произведения. Если нужно выполнить одно за другим k - действий, причем

первое действие можно выполнить n_1 способами,

второе действие - n_2 способами,

…

k-е действие - n_k способами, тогда общее число способов выполнить все k действий равно $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пусть некоторый объект A можно выбрать n способами, а объект B можно выбрать m способами, тогда и объект A и объект B (пару) можно выбрать числом способов $N = n \cdot m$.

Правило суммы. Пусть множество A разбито на k непересекающихся подмножеств, т.е. $A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$. Тогда общее число способов выбрать элемент или из подмножества B_1, или из B_2, или …, или из B_k определяется по формуле

$$N = n(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k) = n(B_1) + n(B_2) + ... + n(B_k).$$

Если из множества A можно выбрать элемент n способами, из множества B - m способами, тогда общее число способов выбрать элемент из множества A или элемент из множества B определяется по формуле $N = n + m$.

1. *Число перестановок.*

Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эти элементы меняются местами. Тогда общее число способов поменять их местами $N = P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

2. *Число сочетаний.*

Пусть имеется n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из этих элементов наудачу выбирается m элементов. Причем, порядок следования элементов не учитывается. Тогда общее число способов выбрать из n элементов m элементов равно числу сочетаний из n по m: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Определение. *Числом сочетаний* из n элементов по m называется количество таких соединений элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

3. Число размещений.

Пусть из общей совокупности элементов производится выборка. Она выборка может быть произведена двумя способами:

1. Выборка с возвращением. Пусть имеется $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов. Наудачу берется один элемент, описываются свойства взятого эле-

мента и этот элемент снова возвращается в совокупность и так поступают m раз. Тогда общее число способов взять m элементов из n равно числу размещений с повторениями из n по m: $\overline{A_n^m} = n^m$.

2. Выборка без возвращения. Пусть имеется $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементов. На удачу берется m элементов. Причем порядок следования элементов учитывается. Тогда общее число способов взять m элементов из n равно числу размещений из n по m: $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Определение. *Числом размещений* из n элементов по m называется общее число таких соединений элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом или порядком следования элементов. Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда.

В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A)=\frac{2}{5}$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства).

Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Операции над событиями

Определение. События А и В называются равными, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. Объединением или суммой событий A_k называется событие А, которое означает появление хотя бы одного из событий A_k.

$$A=\bigcup_k A_k$$

Определение. Пересечением или произведением событий A_k называется событие А, которое заключается в осуществлении всех событий A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

Определение. Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

$$C = A \setminus B$$

Определение. Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А не происходит.

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие.

Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

2. Задачи к практическому занятию

1. Секретный замок состоит из четырех дисков, каждый из которых разделен на десять секторов. Найти вероятность, что преступник откроет сейф с первой попытки.
2. Имеется 3 волчка с шестью, восьмью, десятью гранями. Найти вероятность, что при падении у всех трех волчков появится цифра 1.
3. На полке лежат книги. Из них 10 томов Тургенева, 5 томов Гоголя, 8 томов Достоевского. Наудачу выбрана одна книга. Найти вероятность того, что это том Тургенева или Гоголя.
4. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?
5. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места?
6. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?
7. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется: а) хотя бы один туз; б) ровно один туз; в) не менее двух тузов; г) ровно два туза.
8. Для награждения победителей школьной олимпиады по математике куплено 10 различных книг (книги равноценные). Сколькими способами эти книги можно распределить между победителями олимпиады, если участник, занявший 1-е место должен получить 5 книг; победитель, занявший 2-е место – 3 книги, а участник, занявший 3-е место – 2 книги?
9. Десять различных книг нужно расставить на двух книжных полках так, чтобы на каждой полке стояло не менее 4 книг. Порядок расположения книг на полке не учитывается. Сколькими способами это можно сделать?

10. Из карточек с цифрами 1, 2, 3, …, 9 наудачу взяли 3 карточки. Найти вероятность, что из этих, взятых трех карточек, составлено число 123 (событие А).
11. Сколькими способами можно расставить шесть различных книг на одной полке?
12. На окружности выбраны 10 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
13. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные 5-значные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4, 5 одновременно.
14. Даны цифры от 1 до 9. Сколько существует способов составить 3-х- значное число, если все цифры должны быть различны.
15. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.
16. Из кубиков составлено слово «КНИГА». Ребёнок, не умеющий читать, смешал все кубики. Какова вероятность того, что он повторно сложит исходное слово.
17. В урне 5 синих, 6 красных, 10 зеленых и 15 желтых шаров. Один шар взяли. Найти вероятность того, что этот шар будет синий или желтый.
18. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причём неизвестно какая. После перевозки из ящика наудачу извлекается 1 деталь, которая оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь.
19. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?
20. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета.
21. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?
22. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.
23. На пяти одинаковых карточках написаны буквы л, м, о, о, т. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово молот?
24. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

25. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?
26. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

Решение задач на расчёт количества выборок.

Цель: *Закрепить знания студентов по теме «Элементы комбинаторики» в процессе решения упражнений*.

1. Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$
2. Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$
3. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$
4. Вычислить A_8^4; C_{10}^4
5. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
6. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так,чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?\Решить уравнение $C_x^6 = 210$
7. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$
8. Упростить $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
9. Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$
10. Вычислить A_{13}^5; C_8^4
11. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?
12. Сколько флажков 3 разных цветов можно составить из 5 флажков разного цвета?
13. Решить уравнение $C_x^2 = 153$Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$
14. Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$
15. Вычислить A_{25}^2; C_{36}^5
16. Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может выбрать из своего состава председателя собрания и секретаря
17. Сколькими способами можно выбрать 3х дежурных, если в классе 30 человек?
18. Решить уравнение $C_{x-2}^2 = 21$

19. Вычислить $\frac{7!+5!}{6!}$

20. Упростить $\frac{1}{(n-1)!}$

21. Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{5!}$

22. Вычислить A_{13}^{5}; C_{10}^{8}

23. Сколько вариантов распределения 3х путевок в санаторий различного профиля можно составить для 5 претендентов?

24. Решить уравнение $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$

3. Вопросы.

1. Привести определение выборки, упорядоченной выборки.
2. Привести формулы размещения с повторениями и без повторений.
3. Привести формулы сочетания с повторениями и без повторений.
4. Привести формулы перестановки с повторениями и без повторений.
5. Дать формулировку правила произведения.
6. Привести классификацию событий.
7. Дать классическое определение вероятности.
8. Привести определение относительная частота. Статистическое определение вероятности события.
9. Привести определение геометрической вероятности.

Практическое занятие № 2. Теорема сложения и произведения вероятностей. Формула полной вероятности. Теорема Байеса.

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Следствие 1: *Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.*

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Следствие 2: *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Определение. Событие А называется независимым от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется условной вероятностью события В.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Теорема. (Умножения вероятностей) *Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.*

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились.

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

Если в результате испытания может появиться *n* событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A)=1-q_1q_2...q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ - две осечки подряд

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ - две осечки подряд

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна

$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Фактически эта формула полной вероятности уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Доказательство.

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий, то событие А можно представить в виде следующей суммы:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Т.к. события $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события AH_i тоже несовместны. Тогда можно применить теорему о сложении вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При этом $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Окончательно получаем: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$

Теорема доказана.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$;

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Формула Бейеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i / A)$.

Теорема. *Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется формулой Бейеса.

Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $P(H_i) = p$, то формула Бейеса принимает вид:

$$P(H_i / A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}$$

величины.

Задачи к практическому занятию:

Вычисление вероятностей сложных событий.

1.В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого-0,1,второго-0,15, третьего-0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

2.Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

3. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

4.Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого -0.7, второго-0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

5.Отдел технического контроля проверяет на стандартность по двум параметрам серию изделий. Было установлено, что у 8 из 25 изделий не выдержан только первый параметр, у 6 изделий -только второй, а у 3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берется одно из изделий. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

6.От здания аэровокзала к трапам самолётов отправились два автобуса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса к трапам равна 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы один из автобусов прибудет вовремя.

Вопросы для повторения:

1. Чем отличается нахождение вероятностей для зависимых и независимых событий.
2. Опишите суть испытаний Бернулли.
3. Приведите формулу полной вероятности.
4. Приведите формулу теорему Байеса.
5. Приведите формулу для нахождения вероятностей событий по схеме Бернулли.

Практическая работа № 3.Вычисление вероятностей в схеме Бернулли

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие А наступило ровно m раз.

Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик)

Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью $P(A) = p$, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны.

Если в результате n опытов событие А наступает ровно m раз, то остальные n-m раз это событие не наступает. Событие А может появиться m раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по m. Это количество сочетаний находится по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей:

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной

Цель: *Закрепить навыки вычисления вероятностей в схеме Бернулли*

1. Вероятность работы автомата в некоторый момент времени равна p. Имеется n независимых работающих автоматов.
   Найти вероятность того, что:
   а) в данный момент работает ровно m автоматов
   б) не работают все автоматы
   в) работают все автоматы
   г) работает более m автоматов
   д) работает менее m автоматов
   е) работает не менее m автоматов

№ п/п	**p**	**n**	**m**
1.	0,55	7	4
2.	0,62	6	2
3.	0,7	8	5
4.	0,8	5	3
5.	0,45	10	6
6.	0,1	7	3
7.	0,05	5	2
8.	0,2	6	4
9.	0,07	8	3
10.	0,08	4	2
11.	0,45	5	2
12.	0,52	6	3
13.	0,57	4	2
14.	0,48	7	4
15.	0,5	8	3
16.	0,2	8	3
17.	0,4	6	4
18.	0,67	6	2
19.	0,9	8	5
20.	0,72	9	6
21.	0,3	9	4
22.	0,4	10	5
23.	0,5	11	6
24.	0,6	12	7
25.	0,8	10	8
26.	0,7	9	7
27.	0,6	8	6

28.	0,5	7	5
29.	0,3	7	4
30.	0,5	5	2

2. На конвейер за смену поступает n изделий. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна равна p. Найти вероятность того, что стандартных деталей на конвейер за смену поступило ровно m.

№ п/п	n	P	m
1.	300	0,75	240
2.	400	0,8	330
3.	625	0,8	510
4.	150	0,6	75
5.	100	0,9	96
6.	192	0,75	150
7.	600	0,6	375
8.	400	0,9	372
9.	144	0,8	120
10.	100	0,85	92
11.	220	0,55	140
12.	350	0,6	260
13.	300	0,9	280
14.	500	0,75	390
15.	250	0,65	190
16.	180	0,72	140
17.	420	0,83	380
18.	250	0,67	210
19.	600	0,84	570
20.	200	0,67	150
21.	1100	0,31	371
22.	1000	0,12	145
23.	900	0,43	427
24.	800	0,74	602
25.	700	0,23	185
26.	600	0,60	390
27.	500	0,27	156
28.	400	0,45	173
29.	300	0,58	209
30.	200	0,32	82

Вопросы для повторения:

6. Чем отличается нахождение вероятностей для зависимых и независимых событий.
7. Опишите суть испытаний Бернулли.
8. Приведите формулу полной вероятности.
9. Приведите формулу теорему Байеса.
10. Приведите формулу для нахождения вероятностей событий по схеме Бернулли.

Практическая работа № 4. Решение Схема Бернулли. Расчёт по приближённым формулам.

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Локальная формула

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико причём велики также вероятности p успеха и q неудачи, то для всех m справедлива приближённая формула:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (4.6)$$

Вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли равно m.

Значение функции $\boldsymbol{\varphi(x)}$ можно найти в специальной таблице . Там содержатся значения только для $\boldsymbol{x \geq 0}$. Но функция $\boldsymbol{\varphi(x)}$-чётная, т.е. $\boldsymbol{\varphi(-x) = \varphi(x)}$.
Если $\boldsymbol{x > 5}$, то полагают $\boldsymbol{\varphi(x) \approx 0}$

Интегральная формула

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико причём велики также вероятности p успеха и q неудачи, то для всех m_1 и m_2 справедлива приближённая формула (4.7):

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ \Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли заключено в диапазоне $[m_1; m_2]$.
Значение функции $\boldsymbol{\Phi_0(x)}$ можно найти в специальной таблице. Там содержатся значения только для $\boldsymbol{x \geq 0}$. Но функция $\boldsymbol{\Phi_0(x)}$-нечётная, т.е. $\boldsymbol{\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)}$.
Если $\boldsymbol{x > 5}$, то полагают $\boldsymbol{\Phi_0(x) \approx 0.5}$

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА

Локальная формула

Пусть число испытаний n по схеме Бернулли велико, а вероятность успеха в одном испытании мала, причём мало также произведение $\lambda = n \cdot p$. Тогда $P_n(m)$ определяют по приближенной формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad m = 0..n \qquad (4.8)$$

Вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли равно m.

Значения функции $P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$ можно посмотреть в специальной таблице.

Интегральная формула

Пусть число испытаний n по схеме Бернулли велико, а вероятность успеха в одном испытании мала, причём мало также произведение $\lambda = n \cdot p$.
Тогда $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ определяют по приближенной формуле:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (4.9)$$

Вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли заключено в диапазоне $[m_1; m_2]$.

Значения функции $P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$ можно посмотреть в специальной таблице и затем просуммировать по диапазону.

Таблица (Рекомендации по применению приближённых формул, выбор осуществляется по числам λ и m)

Формула	Формула Пуассона	Формула Муавра-Лапласа	Качество оценки
n<10	$\lambda \le 2$	$\lambda > 2$	оценки грубы
$10 \le n \le 20$	$\lambda \le 3$	$\lambda > 3$	используются для грубых прикидочных расчётов
$20 \le n \le 100$	$\lambda \le 5$	$\lambda > 5$	используются для прикладных инженерных расчётов
$100 \le n \le 1000$	$\lambda \le 10$	$\lambda > 10$	используются для любых инженерных расчётов
n>1000	$\lambda \le \frac{1}{2}\sqrt{n}$	$\lambda > \frac{1}{2}\sqrt{n}$	очень хорошее качество оценок

Можно посмотреть в кач-ве примеров к задачам 1.7 и 1.8 Д.з.
Расчёт по формуле Пуассона.
Задача (формула Пуассона).

Условие:
Вероятность искажения одного символа при передаче сообщения по линии связи равна **0.001.** Сообщение считают принятым, если в нём отсутствуют искажения. Найти вероятность того, что будет принято сообщение, состоящее из **20** слов **по 100** символов каждое.

Решение:
Обозначим через ***A*** событие вероятность которого требуется найти в задаче.
Переформулируем задачу в терминах схемы Бернулли
$n = 2000$ **-количество символов в сообщении**
успех: символ не искажается
$p = 0.001$ -вероятность успеха
m=0
$P_{2000}(0) - ?$ **(Вопрос задачи в терминах схемы Бернулли)**
Вычислим $\lambda = np = 2$. **См. рекомендации по применению приближенных формул** ($\lambda \le \frac{1}{2}\sqrt{2000}, n = 2000$): для расчёта нужно применить **формулу Пуассона**

$$P(A)=P_{2000}(0)=\frac{\lambda^0}{0!}\cdot e^{-\lambda}=e^{-\lambda}=e^{-2}\approx 0.13534$$

Вероятности для формулы Пуассона по λ и m можно найти в специальной таблице.

Условие:
Телефонная станция обслуживает 1000 абонентов. Вероятность того, что в течении минуты какому-либо абоненту понадобится соединение, равна 0,0007. Вычислить вероятность того, что за минуту на телефонную станцию поступит не менее 3 вызовов.

Решение:
Переформулируем задачу в терминах схемы Бернулли
$n=1000$
успех: поступление вызова
$p=0.0007$ -вероятность успеха
[3; ∞] –диапазон, в котором должно лежать число успехов

Вычислим $\lambda=np=0.7$. См. рекомендации по применению приближенных формул ($0<\lambda<15, n=1000$): для расчёта нужно применить формулу Пуассона для диапазона

A={ поступит не менее трёх вызовов}-событие, вероятность которого треб. найти в задаче
$\overline{A}=${поступит менее трёх вызовов} Переходим к доп. событию, т.к. его вероятность подсчитать проще.

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{2}\frac{0.7^k}{k!}e^{-0.7}=0.49659+0.34761+0.12166$ (расчёт слагаемых см. специальная таблица)

Таким образом,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.03414$$

Задача (локальная формула Муавра-Лапласа)

Условие
Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.8. Определить вероятность того, что при 400 выстрелах произойдёт ровно 300 попаданий.
Решение:
Переформулируем задачу в терминах схемы Бернулли
n=400 –число испытаний
m=300 –число успехов
успех- попадание
p=0.8

$P_{400}(300)-?$ (Вопрос задачи в терминах схемы Бернулли)

$\lambda = np = 320$

См. рекомендации по применению приближенных формул $(\lambda \le 20{,}100 \le n \le 1000)$ => для расчёта нужно применить локальную формулу Муавра-Лапласа

Предварительный расчёт:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 8$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 320}{8} = -2.5$$

$$P_{400}(300) = \frac{\varphi(-2.5)}{\sqrt{8}} \approx \frac{0.01753}{8} \approx 0.0022$$

Значение функции $\varphi(x)$ можно найти в таблице . Там содержатся значения только для $x \ge 0$. Но функция $\varphi(x)$-чётная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Если $x > 5$, то полагают $\varphi(x) \approx 0$

<u>Задача (интегральная формула Мувра-Лапласа)</u>

Найти вероятность того, при 600 подбрасываниях игральной кости выпадет от 90 до 120 шестёрок.

Переформулируем задачу в терминах схемы Бернулли

n=600 –число испытаний

успех – выпадение 6

p=1/6 -кость предполагается правильной

[90,120]-диапазон для числа успехов

q=5/6

$$\lambda = np = 600\frac{1}{6} = 100$$

См. рекомендации по применению приближенных формул $(\lambda > 20{,}100 \le n \le 1000)$ => для расчёта нужно применить интегральную формулу Муавра-Лапласа

Предварительный расчёт:

$$x1 = \frac{90 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \approx -1.10 \qquad x2 = \frac{120 - 600 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} \approx 2.19$$

Обозначим через А –событие, о котором спрашивается в задаче

$$P(A) = \Phi_0(x2) - \Phi_0(x1) = \Phi_0(2.19) - \Phi_0(-1.10) \approx 0.48575 + 0.36433 = 0.85007$$

Значение функции $\Phi_0(\mathrm{x})$ можно найти в специальной таблице. Там содержатся значения только для $x \ge 0$. Но функция $\Phi_0(\mathrm{x})$-нечётная, т.е. $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.

Если $x > 5$, то полагают $\Phi_0(x) \approx 0.5$

<u>ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ СХЕМА</u>

Проводим независимые испытания, в каждом из которых мы различаем m вариантов.

p_1 – вероятность получить первый вариант при одном испытании

p_2 – вероятность получить второй вариант при одном испытании

…………..

p_m – вероятность получить m-ый вариант при одном испытании

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$p_1, p_2, \ldots, p_m$ не меняются от опыта к опыту
Последовательность описанных выше испытаний называется полиномиальной схемой. (при m=2 полиномиальная схема превращается в биномиальную), т.е. изложенная выше биномиальная схема –это частный случай более общей схемы, называемой полиномиальной).

Рассмотрим следующие события

$A(n_1,n_2,\ldots,n_m)$={ в n испытаниях описанных выше n_1 раз появился вариант 1, n_2 раз появился вариант 2, ….., и т. д. , n_m раз появился вариант m}
Формула для расчёта вероятностей по полиномиальной схеме

$$P\{A(n_1,n_2,\ldots,n_m)\} = P(n_1,n_2,\ldots,n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots.n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \qquad (4.10)$$

Задача на полиномиальную схему

Условие
Игральную кость бросают 10 раз. Требуется найти вероятность того, что «6» выпадет 2 раза, а «5» выпадет 3 раза.

Решение:
Обозначим через *A* событие вероятность которого требуется найти в задаче.
Переформулируем задачу в терминах полиномиальной схемы:
n=10 –число испытаний
m=3 – число вариантов, которые мы различаем в каждом испытании
1 вариант-выпадение 6
$p_1=1/6$ $n_1=2$
2 вариант-выпадение 5
$p_2=1/6$ $n_2=3$
3 вариант-выпадение любой грани, кроме 5 и 6
$p_3=4/6$ $n_3=5$

P(2,3,5)-? (вероятность события, о котором говорится в условии задачи)
Проведём расчёт по формуле для полиномиальной схемы:

$$P(A) = P(2,3,5) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^5 \approx 0.043$$

Задача на полиномиальную схему
Условие

Найти вероятность того, что среди 10 случайным образом выбранных человек у четырёх дни рождения будут в первом квартале, у трёх – во втором, у двух – в третьем и у одного – в четвёртом.

Решение:

Обозначим через A событие вероятность которого требуется найти в задаче.
Переформулируем задачу в терминах полиномиальной схемы:
n=10 –число испытаний =числу людей
m=4 – число вариантов, которые мы различаем в каждом испытании
1 вариант-рождение в 1 квартале
$p_1=1/4$ $n_1=4$
2 вариант-рождение во 2 квартале
$p_2=1/4$ $n_2=3$
3 вариант- рождение в 3 квартале
$p_3=1/4$ $n_3=2$
4 вариант- рождение в 4 квартале
$p_4=1/4$ $n_4=1$
P(4,3,2,1)-? (вероятность события, о котором говорится в условии задачи)
Предполагаем, что вероятность родиться в любом квартале одинакова и равна 1/4. Проведём расчёт по формуле для полиномиальной схемы:

$$\boldsymbol{P(A) = P(4,3,2,1) = \frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\approx 0.012}$$

Задача на полиномиальную схему (образец к задаче 1.9 Д.з)

Условие

В урне 30 шаров : 10 белых, 5 зелёных, 8 синих и 7 жёлтых (шары различаются только цветом). Из урны случайным образом выбирают 10 шаров с возвращением. Найти вероятность того, что среди выбранных шаров будет:3 белых, 2 зелёных, 4 синих и 1 жёлтый.

Решение:

Обозначим через A событие вероятность которого требуется найти в задаче.
Переформулируем задачу в терминах полиномиальной схемы:
n=10 –число испытаний = числу выбранных шаров
m=4 – число вариантов, которые мы различаем в каждом испытании
1 вариант- выбор белого шара
$p_1=1/3$ $n_1=3$
2 вариант- выбор зелёного шара
$p_2=1/6$ $n_2=2$
3 вариант- выбор синего шара
$p_3=4/15$ $n_3=4$
4 вариант- выбор жёлтого шара
$p_4=7/30$ $n_4=1$
P(3,2,4,1)-? (вероятность события, о котором говорится в условии задачи)
p_1, p_2, p_3, p_4 не меняются от опыта к опыту так как выбор производится с возвращением
Проведём расчёт по формуле для полиномиальной схемы:

$$P(A) = P(3,2,4,1) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{30}\right)$$

Вопросы для повторения.

1. В каких случаях принято использовать локальную теорему Муавра-Лапласа и Пуассона.
2. Приведите формулы Муавра Лапласа и Пуассона.

Практическое занятие № 5.Случайные величины. Числовые характеристики дискретных Случайных величин.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным.

Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.

Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице.

Биноминальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину Х.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется биноминальным.

Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в которых появление события А имеет вероятность p. Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность появления события А в каждом испытании мало ($p \leq 0{,}1$), то для нахождения вероятности появления события А k раз находится следующим образом.

Сделаем важное допущение – произведение np сохраняет постоянное значение:

$$np = \lambda$$

Практически это допущение означает, что среднее число появления со-

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

бытия в различных сериях испытаний (при разном n) остается неизменным.

Формула распределения Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Если известны числа λ и k, то значения вероятности можно найти по соответствующим таблицам распределения Пуассона.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание существует, если ряд, стоящий в правой части равенства, сходится абсолютно.

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.

$$M(C) = C$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Это свойство справедливо для произвольного числа случайных величин.

4) Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

Это свойство также справедливо для произвольного числа случайных величин.

Пусть производится *n* независимых испытаний, вероятность появления события А в которых равна *p*.

<u>Теорема.</u> *Математическое ожидание M(X) числа появления события А в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Однако математическое ожидание не может полностью характеризовать случайный процесс. Кроме математического ожидания надо ввести величину, которая характеризует отклонение значений случайной величины от математического ожидания.

Определение. Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

<u>Пример.</u> Закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2

p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$$

Тогда

$[X\text{-}M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375$$

На практике применяется другой способ.

Вычисление дисперсии

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$$

$$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливость этого равенства вытекает из свойства 2.

Теорема. *Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в каждом испытании.*

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Теорема. *Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$$

1. ДСВ X задана рядом распределения:

X	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

. Найти ее числовые характеристики.

2. Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,6, случайная величина X – число принятых радиосигналов. Составить закон распределения СВ X. Найти математическое ожидание; дисперсию; среднее квадратическое отклонение.
3. Завод отправил на базу 2 000 изделий. Вероятность повреждения в пути равна 0,0003.Найти вероятность того, что будет повреждено 0, 1, 2, 3, 4 изделий. Найти математическое ожидание; дисперсию; среднее квадратическое отклонение этой случайной величины. Определить вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие.
4. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель равна 0,6. Составить закон распределения и найти числовые характеристики СВ X – числа произведенных выстрелов.
5. В группе из 21 студентов 5 девушек. Из этой группы наудачу выбирают трех студентов. Найти закон распределения и числовые характеристики ДСВ X – числа девушек среди отобранных.

6. Игральная кость брошена 3 раза Написать закон распределения числа появления шестерки.
7. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, описанной в задаче первой.

8. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004.Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдёт на пяти веретенах.
9. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0.4. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.
10. В магазин привезли 20 коробок с обувью, причем в 7-ми из них обувь белого цвета. Наудачу отобрали 3 коробки. Написать закон распределения дискретной случайной величины X- числа коробок с обувью белого цвета среди отобранных.
11. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,4. Написать закон распределения случайной величины X - числа попаданий в цель при семи выстрелах.
12. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, описанной в задаче первой.
13. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.
14. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины X - числа дополнительных вопросов , которые задаст преподаватель студенту.
15. В партии из 24 изделий шесть - дефектных. Произвольным образом выбрали пять изделий. Написать закон распределения дискретной случайной величины X- числа дефектных изделий из избранных.
16. Электронный блок состоит из шести независимо работающих элементов, вероятность отказа которых равна 0,12. Составить закон распределения случайной величины X - числа отказов элементов блока.
17. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, описанной в задаче первой.
18. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени равна 0,002. Найти вероятность того, что за указанное время откажут три элемента.
19. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле , равна 0,8. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнется

Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

20. В корзине пять белых и три черных шара. Наудачу извлекают четыре шара. Составить закон распределения случайной величины X - числа белых шаров среди выбранных. Найти числовые характеристики полученной случайной величины.

Вычисление характеристик ДСВ; вычисление (с помощью свойств) характеристик функций от ДСВ.

Цель: *Закрепить навыки вычисления характеристик дискретной случайной величины и характеристик функций от ДСВ.*

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	4	7	12
p	0,08	0,35	0,22	0,35

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z,. если известны математические ожидания X и Y:

$Z=3X+2Y+8$ $M(X)=3$ $M(Y)=4$

3. В комнате установлены 4 независимо работающих светильника. Вероятность перегорания лампочки при включении 0,2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X- числа перегоревших лампочек при одном одновременном включении светильников.

4. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	2	3	5
p	0,6	0,2	0,1	0,1

Y	4	7	8
p	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание суммы X+Y двумя способами:

а) составив законы распределения X+Y; б) пользуясь свойством 4.

5. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	2	3	5
p	0,6	0,2	0,1	0,1

Y	4	7	8
p	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание произведение X*У двумя способами:

а) составив законы распределения X*Y; б) пользуясь свойством 3.

6. *Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)=2,3$; $M(X^2)=5,9$. Найти вероятности соответствующие возможным значениям X.

Вопросы для повторения:

1. Что называют «Законом распределения дискретной случайной величины.»
2. Математические операции над случайными величинами.
3. Раскройте понятие: «Числовые характеристики дискретных случайных величин.»

Практическое занятие № 6 Функция и плотность распределения. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

1. Теоретическая часть

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений.

Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально.

Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов?

Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин.

Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. $X < x$, обозначим через F(x).

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют интегральной функцией.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента *x*.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Свойства функции распределения..

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1$$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

Плотность распределения

Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

Определение. Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют дифференциальной функцией. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.

Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина Х примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше.

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью ОХ, кривой распределения f(x) и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x) \geq 0$$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от -∞ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример. Задана непрерывная случайная величина *x* своей функцией распределения *f(x)*.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент А, найти функцию распределения, определить вероятность того, что случайная величина *x* попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Найдем коэффициент А.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x < -\dfrac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$

3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int\limits_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения *f(x)*. Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [*a*,*b*].

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Определение. Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

$$f(M_0) = \max.$$

Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двухмодальным или многомодальным.

Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Определение. ***Медианой M_D*** случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам.

Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k.

$\alpha_k = M[X^k]$.

Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$.

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$.

$\mu_k = M[(X - m_x)^k]$

Для дискретной случайной величины: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для непрерывной случайной величины: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx$.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется коэффициентом асимметрии.

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая эксцессом.

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты:

Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$.

Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$.

Абсолютный центральный момент первого порядка называется средним арифметическим отклонением.

Задачи к практическому занятию:

Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения.

Цель: *Закрепить навыки вычисления вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения*

1. Найти дифференциальную функцию распределения и числовые характеристики случайной величины, заданной интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 2; \\ \dfrac{(x-2)^2}{4}, \ 2 \le x \le 4; \\ 1, \ \text{x} > 4. \end{cases}$$

2. Для оценки состояния деловой активности промышленных предприятий различных форм собственности были проведены выборочные бизнес-обследования и получены следующие результаты:

Интервалы значений показателя деловой активности, бал.	0-8	8-16	16-24	24-32
Число предприятий (акционерные общества откры-	10	15	8	5

того типа)				

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее значение показателя деловой активности, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Объясните полученные результаты.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=2x в интервале (0,1); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.

4. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=cosx в интервале (0;π/2); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y=\phi(X)=X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

5. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1/(\Pi\sqrt{c^2-x^2})$ в интервале (-c,c); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.

6. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x+0,5 в интервале (0;1); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y= X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

3. Вопросы.

1. Чем отличаются Непрерывные случайные величины и дискретные случайные величины?
2. Что такое плотность вероятности.
3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
4. Равномерный закон распределения.
5. Показательный (экспоненциальный) закон распределения.
6. Нормальный закон распределения.

Практическое занятие № 7. Выборочная и генеральная совокупности. Типы выборок. Статистические оценки.

1. Теоретическая часть

Математическая статистика занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые явления, на основе результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – это разработки методологи сбора и группировки статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.

Вторая задача состоит в разработке методов анализа полученных статистических данных. Этот анализ включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятности, оценку параметров известного распределения, а также связей между случайными величинами.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и, в сою очередь, служит основой для обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

В математической статистике вводятся понятия генеральной и выборочной совокупностей.

Понятие генеральной совокупности связано с понятием полного поля элементарных событий. Это поле событий может быть конечным или бесконечным. Полное поле событий может меняться в зависимости от организации опытов.

Рассмотрим n объектов, каждый из которых имеет свое значение измеряемого параметра. Можно измерить указанный параметр на всех объектах и, обработав полученные результаты, вычислить некоторые обобщенные характеристики, например среднее значение параметра. Общее количество объектов в данном случае и составляет генеральную совокупность.

В некоторых случаях неудобно или невозможно получить результаты измерений на всех объектах и поэтому выбирают определенную часть из этой совокупности (выборку), которую называют выборочной совокупностью. Обрабатывая результаты измерений выборки, получают ее обобщенные характеристики, с помощью которых оценивают параметры генеральной совокупности. В этом случае число объектов выборки не превышает общего числа объектов генеральной совокупности.

Однако ситуация меняется, если после проведения выборки и измерения объект вновь возвращается в генеральную совокупность. В этом случае число объектов выборки может быть сколь угодно велико.

Возможные значения случайной величины в генеральной совокупности также могут составлять бесконечное множество. Например, в некотором пункте измеряется температура воздуха. Это непрерывная случайная величина, так как она может меняться на сколь угодно малую величину. Такая генеральная совокупность представляет собой бесконечное множество значений. Выборку здесь также можно проводить сколь угодно раз.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число ее объектов.

Повторной называют выборку, при которой объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

В некоторых случаях результаты выборки зависят не только от ее объема, но и от способа отбора объектов.

Иногда такой отбор отражает, а иногда и не отражает соотношения в генеральной совокупности. Например, проводится социологический опрос населения. Результаты опроса будут зависеть от того, в каком месте он проводится, среди каких групп. Если выборка правильно отражает соотношения в генеральной совокупности, то ее называют репрезентативной (представительной).

Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пусть из генеральной совокупности объема N выбрано n объектов. Исследуется признак X со значениями: $x_1, x_2, \ldots x_k$;

с частотами вариантов: $n_1, n_2, \ldots n_k$.

Событие $X < x_1$;

$X < x_2$ имеет относительную частоту этого события n_1/n;

$X < x_3$ имеет относительную частоту этого события $(n_1+n_2)/n$

и т.д.

Таким образом, в общем случае $X < x$ есть функция от x. Эту функцию обозначают: $F^*(x)$ и называют эмпирической функцией распределения выборки.

<u>Определение</u>: Эмпирической функцией распределения выборки называется функция $F^*(x)$, которая для каждого значения признака x определяет относительную частоту события $X < x$, т.е.

$F^*(x) = n_x / n$,

где n_x – число наблюдений, при которых значения вариант оказываются меньше, чем x; n – объем выборки.

Эта функция служит для приближенного представлении о теоретической функции распределения случайной величины.

Основные свойства

1. Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0; 1];
2. $F^*(x)$ – неубывающая функция,
   т.е. из того, что $x_2 > x_1$ следует $F^*(x_2) \geq F^*(x_1)$.
3. Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $\tilde{o} \leq \tilde{o}_1$;
   если x_k – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x > x_k$;
   $$(F^*(x) = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1).$$

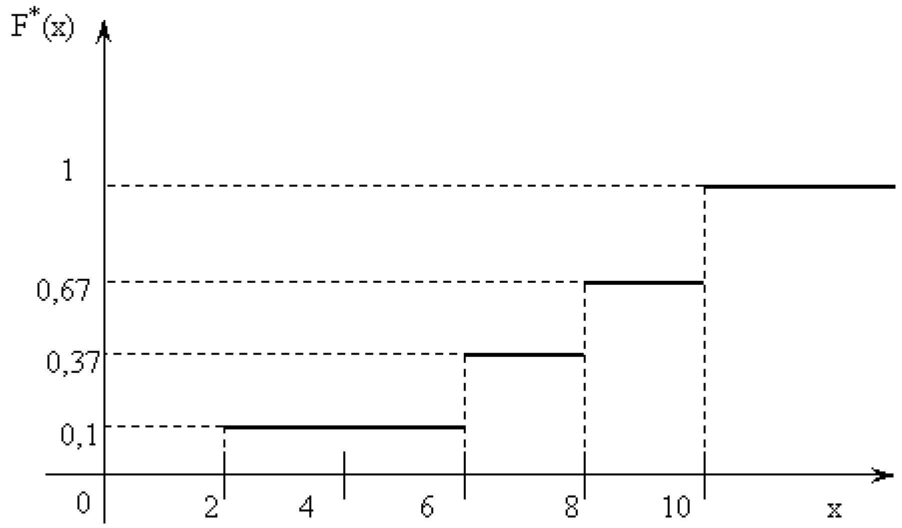
Пример. Построить эмпирическую функцию распределения по данной выборке

x_i	2	6	8	10
n_i	6	16	18	20

Решение. Объем выборки $n = 6+16+18+20 = 60$. Составим функцию, используя формулу $F^*(x)$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \quad если \quad x \le 2; \\ \dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10}, \, если \; 2 < x \le 6, \\ \dfrac{6+16}{60} = \dfrac{11}{30}, \, если \; 6 < x \le 8, \\ \dfrac{6+16+18}{60} = \dfrac{2}{3}, \, если \; 8 < x \le 10, \\ 1, \quad если \quad x > 10. \end{cases}$$

Построим график эмпирической функции распределения.



Полигон частот и гистограмма

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_i; n_i)$. По оси абсцисс откладывают точки x_i, а по оси ординат – соответствующие значения n_i (частоты). Точки $(x_i; n_i)$ соединяют отрезками прямых. Если вместо частот n_i брать относительные частоты $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$, то можно построить полигон относительных частот, соединив точки $(x_i; p_i)$ отрезками прямых (рис. 2).

В тех случаях, когда рассматривается непрерывная случайная величина, которая может принимать любые, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга значения, строится не полигон, а гистограмма. Для этого интервал, в котором заключены все значения случайной величины, разбивается на несколько частичных интервалов длиной h каждый. На интервалах подсчитывается сумма частот вариант, попавших в i-й интервал, и составляется отношение n_i / h.

Гистограммой называется ступенчатая фигура (рис. 3), состоящая из прямоугольников, снованиями которых служат отрезки длиной h, а высоты равны n_i / h. Величина n_i / h называется плотностью частоты.

Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Одной из центральных задач математической статистики является задача оценки теоретического распределения случайной величины на основе выборочных данных. При этом предполагается, что закон распределения генеральной совокупности известен, но неизвестны его параметры, такие, например, как математическое ожидание, дисперсия. Требуется найти приближенные значения этих параметров, т.е. получить их статистические оценки.

Чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Обозначим через θ^* оценку некоторого теоретического параметра θ закона распределения случайной величины X. Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, \dots x_n,$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, \dots X_n$, получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку θ^* как функцию этих случайных величин: $\theta^* = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Это значит, что оценка тоже является случайной величиной.

Если для оценки некоторого параметра θ взять несколько (k) выборок, то в общем случае получим столько же различных случайных оценок $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$. Математическое ожидание случайной величины θ^*, имеющей отмеченные реализации, может как совпадать, так и не совпадать с оцениваемым параметром θ.

Несмещенной называется статистическая оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, т.е. $M(\theta^*) = \theta$.

Смещенной называется статистическая оценка θ^*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру.

Так же как и для любой случайной величины, оценка θ^* может иметь большой или небольшой разброс (дисперсию) относительно математического ожидания.

Эффективной называется статистическая оценка θ^*, которая при одних и тех же объемам выборки имеет наименьшую дисперсию.

В некоторых случаях становится интересным поведение оценки при неограниченном увеличении объема выборки.

Состоятельной называется статистическая оценка θ^*, которая при увеличении объема выборки n стремится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е. $P(\theta^* = \theta / n \to \infty) = 1$.

В частности, если дисперсия оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка является состоятельной.

Выборочная средняя и выборочная дисперсия

Пусть проведена выборка объема n.

Выборочной средней $\overline{x_{\hat{a}}}$ называется среднее арифметическое значений выборки.

Если все значения выборки различны, то

$$\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если же варианты $x_1, x_2, \ldots x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то

$$\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}$$

или

$$\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

В некоторых случаях выборочные значения случайной величины целесообразно разбивать на отдельные группы. В каждой группе можно найти ее среднюю.

Групповой средней $\overline{\tilde{o}_{\hat{A}i}}$ называют среднее для всей выборки.

По этим групповым средним можно найти среднее для всей выборки.

Общей средней $\bar{x}$ называют среднее арифметическое значение групповых средних.

Пример. Найти общую среднюю на основе выборки:

Группа	1		2	
Значение варианты	1	6	1	5
Частота	10	15	20	30
Объем	25		50	

Решение. Находим групповые средние:

$$\overline{\tilde{o}_{\hat{A}1}} = \frac{1 \cdot 10 + 6 \cdot 15}{25} = \frac{100}{25} = 4,$$

$$\overline{\tilde{o}_{\hat{A}2}} = \frac{1 \cdot 20 + 5 \cdot 30}{50} = \frac{170}{50} = 3{,}4.$$

Общая средняя $\bar{x} = \dfrac{4 \cdot 25 + 3{,}4 \cdot 50}{75} = \dfrac{270}{75} = 3{,}6.$

Ответ. $\bar{x} = 3{,}6$.

Для характеристики рассеяния выборочных значений относительно выборочного среднего вводится понятие выборочной дисперсии.

Выборочной дисперсией $d_{\hat{a}}$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений от выборочного среднего.

Если все значения выборки различны, то

$$d_{â} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x_{è}})^2}{n}.$$

Если значения выборки имеют соответствующие частоты, то

$$d_{â} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (x_i - \overline{x_{è}})^2}{n}.$$

Выборочным средним квадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_{â} = \sqrt{d_{â}}.$$

Анализ смещенности выборочной средней и выборочной дисперсии

Выборочная средняя $\overline{x_{â}}$ является несмещенной оценкой, а выборочная дисперсия $d_{â}$ - смещенной оценкой.

Пусть дана выборка $x_1, x_2, \dots x_n$. Будем рассматривать выборочные значения как реализации случайных величин $X_1, X_2, \dots X_n$, одинаково распределенных по закону распределения генеральной совокупности, т.е. случайной величины X. Это означает, что они имеют одно и тоже математическое ожидание M_x и дисперсию $\sigma_{õ}^2$.

Математическое ожидание выборочной дисперсии не равно оцениваемой дисперсии генеральной совокупности $\sigma_{õ}^2$. Чтобы «исправить» выборочную дисперсию, ее нужно умножить на дробь $\frac{n}{n-1}$.

В результате получим «исправленную» выборочную дисперсию

$$s^2 = \frac{n}{n-1} d_{â}.$$

Соответственно, «исправленным» выборочным квадратичным отклонением называется арифметический квадратный корень из «исправленной» выборочной дисперсии.

Теорема. Выборочная дисперсия равна среднему арифметическому квадратов значений выборки минус квадрат выборочной средней:

$$d_{â} = \overline{x^2} - \overline{x}_{â}^{2}.$$

Начальный и центральный эмпирические моменты

Эмпирическими моментами порядка k называют среднее значение k-х степеней разностей $x_i - C$:

$$M_k = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i (x_i - C)^k}{n},$$

где n_i – частота варианты; $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ - объем выборки; C – произвольное постоянное число (ложный нуль).

Различаю начальные и центральные эмпирические моменты.

Начальным эмпирическим моментом порядка k называется эмпирический момент порядка k при $C = 0$:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^k .$$

Для первого порядка

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i = \bar{x}_{\hat{a}}$$ (выборочная средняя).

Центральным эмпирическим моментом порядка k называется эмпирический момент при $\tilde{N} = \bar{\tilde{o}}_{\hat{a}}$:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_{\hat{a}})^k .$$

В частности, для второго порядка

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_{\hat{a}})^2 = d_{\hat{a}}$$ (выборочная дисперсия).

Задачи к практическому занятию

1. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данным выборки объема n=100

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

2. Найти минимальный объем выборки, при которой с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2, если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 1{,}5$.

Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчёт по заданной выборке её числовых характеристик. Выполнение интервального оценивания математического ожидания нормального распределения; интервального оценивания вероятности события.

Цель: *Закрепить навыки построения для заданной выборки ее графической диаграммы; расчёт по заданной выборке её числовых характеристик*

Вариант 1

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	3	5	8	13	15	18
n_i	4	6	7	14	10	9

Найти распределение относительных частот

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	7	9	12	15	17	20

n_i	10	12	18	30	10	20

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	3	5	8	13	15	18
n_i	4	6	7	14	10	9

4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	7	9	12	15	17	20
n_i	10	12	18	30	10	20

5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
3-5	16
5-7	6
7-9	14
9-11	24
11-13	20
13-15	8
15-17	12

6. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению ыборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
10-15	16
15-20	6
20-25	14
25-30	24
30-35	20
35-40	8
40-45	12

Вариант 2

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	6	8	10	14	17	21
n_i	10	15	30	10	10	25

Найти распределение относительных частот

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	4	7	8	12	18	22
n_i	6	2	4	10	16	12

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	6	8	10	14	17	21
n_i	10	15	30	10	10	25

4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	4	7	8	12	18	22
n_i	6	2	4	10	16	12

5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
10-15	14
15-20	8
20-25	16
25-30	40
30-35	10
35-40	6
40-45	12

6. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вари-ант интервала n_i
3-5	4
5-7	6
7-9	20
9-11	40
11-13	20
13-15	4
15-17	6

3. Вопросы.

1. Основные понятия генеральной и выборочной совокупности.
2. Типы выборок.
3. Статистическое распределение выборки.
4. Полигон. Гистограмма.
5. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки.
6. Выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин.- 3-е изд., стер.-М.: ИЦ «Академия», 2018.

Список дополнительной литературы

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов.-М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2017. (Среднее профессиональное образование).
http://znanium.com/catalog/product/760157