ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по дисциплине

«Дискретная математика с элементами математической логики»

для обучающихся по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование и программой дисциплины «Дискретная математика с элементами математической логики».

Составитель: Шляхова Н.И.

Рассмотрено на заседании методического объединения общеобразовательного цикла, протокол № 6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол № 6 от «26 » мая 2022 г.

Содержание

Содержание практических работ позволяет освоить практические приемы составления таблиц истинности для формул алгебры логики, практические приемы выполнения равносильных преобразований формул алгебры логики и логики предикатов, научиться решать логические задачи методами алгебры логики, решать задачи на РКС (релейно-контактные схемы), применять средства языка логики предикатов для записи и анализа математических предложений, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; применять математические методы для решения профессиональных задач; овладеть техникой равносильных преобразований логических формул, методами распознавания тождественно истинных формул и равносильных формул, навыками решения основных задач математической логики и методами их решения.

Цели и задачи учебной дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины: ознакомление студентов с её важнейшими разделами математической логики для применения полученных знаний в решении практических задач, повышение уровня математической культуры, развития логичности и конструктивности мышления, формирования систематизированных знаний в области математической логики, представлений о проблемах оснований математики и роли математической логики в их решении; развитие логического мышления, логической культуры, логической интуиции

Процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС СПО направлен на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 2. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, не-обходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 4. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 5. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 9. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 10. Пользоваться профессиональной документационной на государственном и иностранном языке.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 13. Демонстрирующий умение эффективно взаимодействовать в команде, вести диалог, в том числе с использованием средств коммуникации.

Практическая работа № 1. Начальные понятия теории множеств

1.1 Операции над множествами.

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия **множества**. Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Объекты, которые образуют множество, будем называть **элементами** множества и обозначать малыми буквами латинского алфавита.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{ a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Пример. Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$. Если какое-либо множество A включено в другое множество B, то используется запись $A \subset B$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример. 1. Множество корней уравнения $\sin x = 2$ является пустым.

2. Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда $a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Множество считается заданным, если каким-либо образом указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств (при этом в обоих случаях при задании множеств используют фигурные скобки).

Примеры задания множеств. 1. Множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде: $M = \{0, 1, \ldots, 9\}$ или $M = \{x \mid x \text{ – целое}, \quad 0 \le x \le 9\}$, где справа от вертикальной черты указывают свойство элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде: $M = \{x \mid x \text{ – чётное число}\}$.

2. Если R – множество точек числовой прямой, то R^n – множество точек n-мерного арифметического пространства; в частности, R^2 – множество точек плоскости, R^3 – множество точек пространства трех измерений.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном этого множества и обозначать $B(M)$, а множество M будем называть универсальным (универсумом или пространством) и обозначать 1 или U. Множество M (универсальное) не должно быть у́же объединения рассматриваемых множеств, т. е. оно должно быть равно или содержать объединение рассматриваемых множеств.

Пример. Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $B(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$B(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Мы видим, что множество $B(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Приведем стандартные обозначения для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

N – множество натуральных чисел (иногда его начинают с 1, иногда с 0; обычно это оговаривается);

P – простые числа;

Z – множество целых чисел (положительные, отрицательные и 0);

R – множество действительных чисел.

Очевидное соотношение: $N \subseteq Z \subseteq R$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих на примере пространства или множества U, определив в нём 4 операции над множествами A и B: объединение, пересечение, разность, дополнение.

1.2. Операции над множествами

Объединением A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A$ и / или $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cup B$ – множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \cap B$ – множество чисел, которые делятся и на 2, и на 3: $A \cup B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Разностью (относительным дополнением) множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A, но не являются элементами множества B:

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Пример. 1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$. Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример.1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 5\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Дополнением $\overline{M}$ множества M является множество

$\overline{M} = \{m_i \mid m_i \notin M\}$.

Пример. Заданы множества $A = \{1, 2, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 6\}$ на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Выполнить операции $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Решение. В результате выполнения заданных операций получим следующие множества: $\overline{A} = \{3, 7\}$; $\overline{B} = \{1, 5, 7\}$.

Для конечных множеств существует понятие: мощность множества A – число его элементов. Обозначают мощность множества $|A|$.

Пример. $A = \{1, 2, 5, 6\}$, тогда мощность множества $|A| = n(A) = 4$; $|\varnothing| = 0$; $|\{\varnothing\}| = 1$.

Также справедливы следующие формулы: для любых множеств A и $B \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то есть учитываются общие для обоих множеств элементы.

Пример. $A = \{1, 2, 3\}$ $|A| = 3$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|B| = 5$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|A \cup B| = 5$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ $|A \cap B| = 3$, то есть получим равенство: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $5 = 3 + 5 - 3$.

Для конечного множества M мощность его булеана $|B(M)|$ равна $2^{|M|}$.

1.2 Применение диаграмм Эйлера-Венна при решении практических задач

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используются диаграммы Эйлера-Венна. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга (рис. 1).

С помощью диаграмм Эйлера-Венна удобно иллюстрировать операции над множествами. Результирующее множество каждой операции выделено штриховкой.

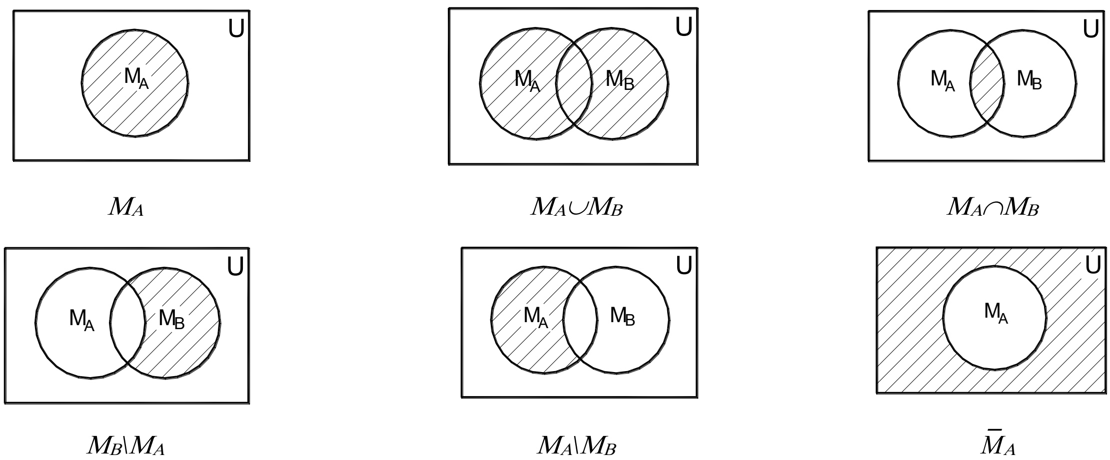


Рис. 1. Представление операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Пример. Рассмотрим операцию дополнения множества, являющегося пересечением множеств M_A и M_B. Необходимо доказать, что её результат совпадает с объединением дополнений этих множеств:

Решение. $M = \overline{M_A \cap M_B} = \bar{M}_A \cup \bar{M}_B$.

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества (основные тождества алгебры множеств):

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$).

1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$).

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$).

2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$).

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$).

3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$).

4. $A \cup \varnothing = A$ (свойство нуля).

4′. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5. $A \cup \overline{A} = U$ (свойство дополнения).

5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

6. $A \cup A = A$.

6′. $A \cap A = A$.

7. $A \cup U = U$ (свойство единицы).

7′. $A \cap U = A$.

8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана).

8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана).

9. $A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения).

9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения).

10. $\overline{\overline{A}} = A$ (инволюция).

11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Примеры. 1. Рассмотрим предположение о том, что произвольные множества A и B попарно эквивалентны: 1) $A \subset B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

Решение. Докажем, что из первого предположения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subset A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subset A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, т. к. $A \subset B$ и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предположения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предположения следует первое. Так как $A \subset A \cup B$, а по условию третьего предположения $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

Задания к практическому занятию:

1. Записать множество М целых чисел x, которые делятся на три и находятся в интервале $3 \le x \le 15$. Записать двумя способами.

2. Записать множество A целых чисел x, которые делятся на 2 и на 3 и находятся в интервале $20 \le x \le 25$. Записать двумя способами.

3. Принадлежит ли x множеству M, если:

а) $M = \{2, 6, 8, \ldots, 50\}$; $x = 35$;

б) $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots, 100\}$; $x = 23$;

в) $M = \{-2, 2, -4, 4, \ldots, 120\}$; $x = -30$.

4. Записать приведенные множества с указанием свойств их элементов.

5. Доказать неравенство: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \ne \{1, 2, 3\}$.

6. Какие из следующих выражений являются истинными и какие ложными:

а) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; б) $1 \in \{\{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

6. Привести примеры таких множеств A, B, C, чтобы были истинными следующие высказывания:

а) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \notin C$;

б) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \in C$.

7. Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны:

а) $\{x \in R | x^2 - 5x + 4 = 0\}$;

б) $\{x \in N | x^2 - 5x + 4 > 0\}$;

в) $\{x \in N | x^2 / 24\}$.

8. Равны ли множества:

а) $\{x \in R | x^2 - 2x - 2 = 0\}$ и $\{x \in Q | x^2 - 2x - 2 = 0\}$;

б) $\{x \in Z | 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in Z | 4/x \wedge 15/x\}\{x \in Z | 20/x \wedge 30/x\}$.

9. Перечислить элементы следующих множеств:

а) $\{x \in R | x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in R | x^2 + 1 = 0\}$;

в) множество всех корней уравнения $x^2 + 6x + 9 = 0$.

10. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств:

а) $\{x | x \subseteq \{1\}\}$;

б) $\{x | x \subseteq \{1, 2\}\}$;

в) $\{x | x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$;

г) $\{x | x \subseteq \varnothing\}$.

1) Сколько элементов в множестве $\{1,\{1\},2,\{1,\{2,3\}\},\varnothing\}$?

2) Определите мощность множества, состоящего из:

a) букв слова «математика»;

b) букв слова «перпендикулярные»;

c) цифр числа «635252»;

d) цифр числа «1010111».

3) Найдите более простое описание множеств (перечисляющее их элементы):

a) A={x | x – целое и $x^2+4x=12$};

b) B={x | x – название дня недели, не содержащее буквы “е”};

c) A={n^2 | n – целое}.

4) Перечислите элементы следующих множеств:

a) A={x | $x\in Z$ и $10\leq x\leq 17$};

b) C={x | $x\in Z$ и $6x^2+x-1=0$};

c) B={x | $x\in Z$ и $x^2<24$};

d) D={x | $x\in R$ и $6x^2+x-1=0$}.

5) Привести примеры таких множеств A, B, C, D, что:

a) $A\subset B$, $B\subset D$, $D\subset C$, $A\not\subset D$, $B\not\subset C$;

b) $A\subset B$, D; $B\subset C$, $C\subset D$;

c) $A\subset B$, $B\subset C$, $C\subset D$;

d) $A\subset C$, $B\subset C$, $A\subset B$;

e) $A\subset C$, $B\subset C$, $A\subset B$, $B\subset C$;

f) A={B}, $B\subset A$.

6) Укажите все подмножества данных множеств:

a) {0,1}

b) {0,1,2};

c) {a,b,c};

7) {Δ,◊,□};Изобразите на числовой прямой пересечение, объединение и разность следующих множеств: $X_1=\{x|x\in R$ и $x^2-1\leq 0\}$ и $X_2=\{x|\ |x|<1\}$.

8) Выполните все известные вам операции над заданными множествами:

a) A={1,2,3,4}; B={1,3,5}; C={5,6}.

b) A={a,b,d}; B={b,d,e,h}; U={a,b,c,d,e,f,g,h}.

c) A={2,4,6,8}; B={3,6,9}; C={1,2,3,…,10}.

Выразите операцию разности двух множеств и симметрической разности двух множеств через операции объединения, пересечения и разности.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте понятие множества, пустого и универсального множества. Отношение принадлежности элемента множеству, равенство множеств. Примеры.
2. Перечислите основные операции над множествами.
3. Понятие декартово произведение множеств. Примеры.
4. Способы задания множеств. Примеры.

Практическая работа № 2. Формулы логики. Составление таблиц истинности. Равносильные преобразования. Упрощение формул логики.

Цель работы: знать основные понятия алгебры высказываний, законы алгебры Буля, уметь составлять таблицы истинности для высказываний, преобразовывать формулы с помощью равносильных преобразований, решать булевы уравнения.

Краткие теоретические сведения.

Математическая логика – это раздел математики, посвященный анализу методов рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т.е. исследуется формализация рассуждений? Это разновидность формальной логики, т.е. науки, которая изучает умозаключения с точки зрения их формального строения.

Основное неопределяемое понятие математической логики это *высказывание.* Под *высказыванием* понимают предложение, которое может принимать только два значения «истина» или «ложь». Обозначаются высказывания малыми латинскими буквами: a, b, ,…,x,…. или большими латинскими буквами A, B, C…

В математической логике не рассматривается смысл высказываний, определяется только их логическое значение – «истина» или «ложь». Известному немецкому математику и логику Эрнесту Шредеру пришло в голову предложить в качестве знака для обозначения ложного суждения цифру 0, что, конечно, привело к обозначению истины цифрой 1.

Исчисление высказываний – вступительный раздел математической логики, в котором рассматриваются логические операции над высказываниями.

Предикат – логическая функция от n переменных, которая принимает значения истинности или ложности.

Исчисление предикатов – раздел математической логики, объектом которого является дальнейшее изучение и обобщение исчисления высказываний.

Теория булевых алгебр (булевых функций) положена в основу точных методов анализа и синтеза в теории переключательных схем при проектировании компьютерных систем.

<u>Примеры.</u>

1. «Река Кола впадает в Кольский залив» – высказывание (истинное).
2. «Число32 кратно 3» – высказывание (ложное).
3. «Может быть, сегодня пойдет снег» – не высказывание.

4. «$5x - 9 = 7$» – не высказывание (неопределенное высказывание или высказывательная форма).

С помощью простых высказываний можно составлять более сложные, соединяя простые высказывания союзами «и», «или», связками «не», «следует» и др. Операции над высказываниями можно описывать при помощи некоторого математического аппарата.

Основные логические операции над высказываниями.

Отрицанием высказывания x называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание x ложно. Отрицание обозначается $\overline{x}$ или $\neg x$ (читается: «не x»).

Логические операции можно задавать при помощи *таблиц истинности*, показывающих соответствие значений истинности высказываний. Для высказываний x и $\overline{x}$ эта таблица имеет вид:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y. Конъюнкция обозначается: $x \wedge y$, или x & y (читается: «x и y»). Таблица истинности для $x \wedge y$ имеет вид:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкцией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны. Дизъюнкция обозначается $x \vee y$ (или $x+y$) (читается: «x или y»). Таблица истинности для $x \vee y$ имеет вид:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний x и y называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно. Импликация обозначается: $x \to y$ (читается: «x влечет y» или «из x следует y»). Высказывание x называется *посылкой импликации*, а высказывание y – *следствием*. Таблица истинности для $x \to y$ имеет вид:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией (эквивалентностью) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают. Эквиваленция обозначается: $x \leftrightarrow y$, или $x \sim y$ (читается: «x эквивалентно y» или «x тогда и только тогда, когда y»). Таблица истинности для $x \leftrightarrow y$ имеет вид:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Множество высказываний с введенными для них логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания основными законами этих действий называется *алгеброй Буля*. Алгебра Буля— исторически первый раздел математической логики, разработанный ирландским логиком и математиком Дж. Булем (George Boole (1815—1864) — английский математик и логик. Профессор математики Королевского колледжа Корка). в середине XIX в. Буль применил алгебраические методы для решения логических задач и сформулировал на языке алгебры некоторые фундаментальные законы мышления

Законы алгебры Буля.

Коммутативные законы:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$;

$x \vee y \equiv y \vee x$; **Ассоциативные законы:**

2.

1. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;
2. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;

Дистрибутивные законы:

1. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

Идемпотентные законы:

1. $x \wedge x \equiv x$;
2. $x \vee x \equiv x$;

Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

1. $x \wedge 0 \equiv 0$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \wedge 1 \equiv x$;
4. $x \vee 1 \equiv 1$;

Законы операции «черта»:

1. $\overline{\overline{x}} \equiv x$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \vee 1 \equiv 1$;
4. $\overline{x} \wedge x \equiv 0$;
5. $\overline{x} \vee x \equiv 1$;

Законы Де Моргана (Augustus de Morgan (1806- 1871) — шотландский математик и логик; профессор математики в Университетском колледже Лондона):

1. $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
2. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Сложением по модулю два (альтернативной дизъюнкцией, логи́ческим сложе́нием, исключа́ющим «ИЛИ», строгой дизъюнкцией) двух высказываний x и y называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и yпринимают разные значения. Дизъюнкция обозначается $x \oplus y$ (читается: «или x, или y»). Таблица истинности для $x \oplus y$ имеет вид:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	*0*	*0*

***Стрелка Пирса* – это отрицание дизъюнкции.**

Стрелка Пирса обозначается X ↓ Y. Читается «ни X, ни Y».

Введена в рассмотрение Чарльзом Пирсом (Charles Peirce) в 1880—1881 г.г. Таблица истинности для стрелки Пирса имеет вид:

x	y	$x \downarrow y$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

***Штрих Шеффера* – это отрицание конъюнкции.**

Введена в рассмотрение Генри Шеффером в 1913 г. (в отдельных источниках именуется как Пунктир Чулкова)

Штрих Шеффера обозначается x|y, задаётся следующей таблицей истинности:

x	y	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Формулами алгебры логики называются выражения, полученные из переменных x, y,… посредством применения логических операций: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний x, y,….

Если в формулу алгебры логики вместо переменных x, y,… подставить конкретные высказывания, то получится высказывание, имеющее логическое значение «1» или «0».

Пример.

Высказывание x: «Волга впадает в Каспийское море» – истинное ($x = 1$),

высказывание y: «Число 16 кратно 3» – ложное ($y = 0$),

тогда формула $A = x \vee y$ будет иметь логическое значение «1»: $A = 1$ (см. таблицу истинности для $x \vee y$).

На основе таблиц истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для различных формул алгебры логики.

Две формулы алгебры логики называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы переменных (элементарных высказываний). Равносильность формул будем обозначать знаком «≡».

Равносильность логических формул можно установить при помощи их таблиц истинности.

Пример. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли равносильными формулы $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ и $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

Решение. Составим таблицы истинности для каждой из формул *A* и *B*.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

x	y	$\bar{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Ответ: данные формулы являются равносильными.

Другой способ доказательства равносильности логических формул – их упрощение с использованием ***равносильных преобразований*.**

2. Выражения одних логических операций через другие:

12) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$; 13) $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;

14) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$; 15) $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: Сначала выполняем действия в скобках, затем отрицание, затем выполняется конъюнкция. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

Пример. Упростить логическую формулу: $\bar{x} \wedge \bar{y} \to x \vee (x \wedge y)$.

Решение. Используем основные равносильности.

$$\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee \big(x \vee (y \wedge x)\big) \equiv$$

$$\equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee x \equiv \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \vee x \equiv$$

$$\equiv x \vee y \vee x \equiv x \vee x \vee y \equiv x \vee y.$$

Ответ: $x \vee y$.

<u>Пример:</u> Являются ли эквивалентными следующие высказывания:

$x \wedge (y \mid z)$ и $(x \wedge y)(x \wedge z)$

Решение.

Составим таблицы истинности для каждого высказывания.

x	y	z	y|z	$x \wedge (y \mid z)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$(x \wedge y)(x \wedge z)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0

Значения x и y в пятом и восьмом столбцах не совпадают.

Вывод: данные высказывания не являются эквивалентными

Задания к практическому занятию:

Составить таблицу истинности для следующих формул:

1) $x \vee \bar{y}$

2) $x \wedge \bar{y}$

3) $x \to (x \vee y)$

4) $x \to (x \wedge y)$

5) $(x \vee y) \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$

6) $x \to (y \vee z)$

7) $x \to (y \to z)$

8) $(x \to y) \to z$

9) $x \sim (y \sim z)$

10) (x~y)~z

11) $(x \vee (y \vee z)) \to (\bar{x} \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}))$

12) $(x \to \overline{(y \wedge z)}) \to (x \to (y \vee z))$

13) $(x \sim \overline{(y \vee z)}) \sim (x \sim (y \vee z))$

14) $(x \vee \bar{y}) \to ((y \wedge \bar{z}) \to (x \vee (y \sim z)))$

15) $((x \sim y) \sim ((z \to (\bar{x} \vee \bar{y})) \to \bar{z})) \sim (x \vee y)$

16) $(x \sim y) \to (((y \sim z) \to (z \sim x)) \to (x \sim z))$

Вопросы для повторения:

1. Что понимают в математической логике под высказыванием?
2. Какие действия выполняются над высказываниями?
3. Что называют алгеброй Буля?
4. Законы алгебры Буля.

Практическое занятие № 3 Доказательство законов алгебры логики.

В логике высказываний известно много общезначимых формул, которые также называются *законами логики высказываний*. Основными законами являются следующие:

- законы идемпотентности:
    - $x \wedge x = x$
    - $x \vee x = x$
- $x \wedge 1 = x$
- $x \vee 1 = 1$
- $x \wedge 0 = 0$
- $x \vee 0 = x$
- $x \wedge \neg x = 0$ – закон противоречия
- $x \vee \neg x = 1$ – закон исключения третьего
- $\neg\neg x = x$ – закон снятия двойного отрицания
- законы поглощения
    - $x \wedge (y \vee x) = x$
    - $x \vee (y \wedge x) = x$

Доказательство этих и последующих законов элементарно осуществляется с помощью построения таблиц истинности или простейших логических рассуждений.

Следующая группа законов представляет взаимосвязь между логическими операциями:

- $(x \equiv y) = (x \to y) \wedge (y \to x)$
- $x \to y = \neg x \vee y$

- законы Де Моргана
  - $\neg (y \vee x) = \neg y \wedge \neg x$
  - $\neg (y \wedge x) = \neg y \vee \neg x$

Замечательным следствием приведенных выше законов является следующий факт. Любую логическую формулу можно заменить равносильной ей, но содержащую только две логические операции: конъюнкцию или отрицание или дизъюнкцию или отрицание. Дальнейшее исключение логических операций, очевидно, невозможно, то есть приведенные пары представляют минимальный базис для построения правильно построенных формул. Однако существует операция, с помощью которой можно представить любую логическую связку. Эта операция получила название «штрих Шеффера» и определяется следующим образом:

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

На основании этого определения можно ввести следующие законы, выражающие взаимосвязь операции «штрих Шеффера» и других логических связок:

- $\neg x = x \mid x$
- $x \wedge y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

Также следует отметить, что $x \mid y = \neg (x \wedge y)$.

К основным законам алгебры логики также относятся следующие:

- коммутативные законы
  - $x \wedge y = y \wedge x$
  - $x \vee y = y \vee x$
- дистрибутивные законы
  - $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  - $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- ассоциативные законы
  - $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
  - $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

Еще одним важным законом алгебры логики является ***закон двойственности.*** Пусть формула A содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Для операции конъюнкции двойственной считается дизъюнкция, а для дизъюнкции – конъюнкция. Тогда по определению формулы A и A^* называются двойственными, если формула A^* получается из A путем замены в ней каждой операции на двойственную. Например, для формулы $(x \vee y) \wedge z$ двойственной формулой будет $(x \wedge y) \vee z$. Для двойственных формул справедлива следующая теорема: если формулы A и B равносильны, то равносильны и двойственные им формулы, то есть $A^* = B^*$. Данную теорему оставим без доказательства.

С помощью законов логики можно осуществлять равносильные преобразования. Такие преобразования используются для доказательств, приведения формул к заданному виду, упрощения формул.

Под сложностью формул обычно понимается количество символов, используемых для ее записи. То есть формула α проще формулы β, если α содержит меньше букв и логических операций. Например, для формулы $(\neg (x \vee y) \rightarrow x \vee y) \wedge y$ можно записать следующую цепочку преобразований, приводящих ее к более простому виду:

$(\neg\neg (x \vee y) \vee x \vee y) \wedge y = (x \vee y \vee x \vee y) \wedge y = (x \vee y) \wedge y = y.$

Задание к практическому занятию: Применяя таблицы истинности, доказать тождественную истинность формул:

21) $\mathbf{x \sim x}$

22) $\mathbf{x \vee \overline{x}}$

23) $\mathbf{\overline{(x \wedge \overline{x})}}$

24) $\mathbf{\overline{\overline{x}} \sim x}$

25) $\mathbf{x \rightarrow (y \rightarrow x)}$

26) $\mathbf{\overline{x} \rightarrow (x \rightarrow y)}$

27) $\mathbf{((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y}$

28) $\mathbf{((x \rightarrow y) \wedge \overline{y}) \rightarrow \overline{x}}$

29) $\mathbf{((x \vee y) \wedge \overline{x}) \rightarrow y}$

30) $\mathbf{((x \vee \vee y) \wedge x) \rightarrow y}$

31) $\mathbf{(x \rightarrow y) \sim (y \rightarrow x)}$

32) $\mathbf{((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)}$

33) $\mathbf{(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \wedge y) \rightarrow z)}$

34) $\mathbf{((x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z)}$

35) $\mathbf{(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))}$

Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул:

36) $\mathbf{x \vee y \equiv y \vee x}$

37) $\mathbf{x \wedge y \equiv y \wedge x}$

38) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$	39) $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$
40) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \vee z)$	41) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
42) $\overline{(x \vee y)} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$ 43) $\overline{(x \wedge y)} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$	**Законы де Моргана.**
44) $x \vee x \equiv x$ 45) $x \wedge x \equiv x$	**Законы идемпотентности.**
46) $x \vee 0 \equiv x$	47) $x \wedge 1 \equiv x$
48) $\bar{\bar{x}} \equiv x$	49) $x \sim y \equiv y \sim x$
50) $x \sim (y \sim z) \equiv (x \sim y) \sim z$	51) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y$
52) $x \sim y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$	

При записи формул принимают следующие соглашения об упрощении записи формул:

1). Операции располагаются по старшинству (от **«сильных»** к **«слабым»**) а $\rceil \wedge \vee$

2). Знак конъюнкции опускается.

Учитывая соглашения о порядке выполнения операций, опустить «лишние» скобки и знак «∧» в формулах:

53) $x \wedge (y \wedge (x \vee \bar{y}))$

54) $(x \wedge y) \vee ((y \wedge z) \vee ((\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z})))$

55) $((x \vee y) \vee z) \to ((x \wedge \bar{y}) \vee z)$

56) $((x \vee y) \wedge (x \vee (y \wedge z))) \to ((\bar{x} \wedge \bar{y}) \to \bar{z}$

57) $((x \vee y) \vee (x \vee ((y \wedge (x \vee z)) \wedge (y \to z))) \sim z)$

58) $((x \vee y) \to (x \wedge y)) \vee ((\bar{x} \wedge y) \wedge (x \vee \bar{y}))$

59) $((x \vee y) \wedge z) \to (((x \wedge y) \vee z) \sim (\bar{x} \vee \bar{y}))$

60) $(x \wedge (y \vee z)) \wedge ((x \to (y \to z)) \sim (x \wedge y))$

Преобразовать формулы так, чтобы они содержали только операции «∨», «∧» и «⌉» :

$x \sim y$

$(x \to y) \sim (y \to z)$

$x \sim y) \to (y \to z)$

$(x \sim y) \to (y \sim z)$

$(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)$

$((x \sim y) \vee (y \sim z)) \to (x \sim y \sim z)$

$x \sim y \sim z \sim v$

$(x \to y) \sim (z \to (x \sim \bar{z}))$

Практическая работа № 4. Приведение формул к совершенным нормальным формам по таблицам истинности.

Цель работы: знать, что такое ДНФ и КНФ, уметь приводить формулы алгебры логики к СДНФ и СКНФ и минимизировать их с помощью законов алгебры логики.

Краткие теоретические сведения.

Определение. Формула называется тождественно-истинной (тавтологией), если для любых наборов переменных она принимает значение И.

Определение. Формула называется тождественно тождественно-ложной, если для любых наборов переменных она принимает значение Л.

В алгебре высказываний используют две нормальные формы: дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы формулы (ДНФ и КНФ).

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Каждая формула, не равная тождественно Л, может быть приведена СДНФ, которая является единственной с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Каждая формула, не равная тождественно И, может быть приведена к СКНФ, которая является единственной с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы (СДНФ) это равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, обладающая свойствами:

1. Каждое логическое слагаемое формулы содержит все высказывания, входящие в формулу.

2. Все логические слагаемые формулы различны

3. Ни одно логическое слагаемое не содержит высказывание и его отрицание

4. Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одно и то же высказывание дважды.

4.1 Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

1) Отметить те строки , в последнем столбце которых стоят 0:

2)Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =0, то в дизъюнкцию включают саму эту переменную, если =1, то ее отрицание:

3)Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию.

Пример. Построить таблицу истинности для высказывания: $(x \mid \bar{y}) \to (y \oplus z)$, построить СНДФ, СКНФ, найти минимальную ДНФ.

Решение.

Строим таблицу истинности- таблицу, с помощью которой устанавливается истинностное значение сложного высказывания при данных значениях входящих в него простых высказываний.

x	y	z	$\bar{y}$	$x \mid \bar{y}$	$y \oplus z$	
1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

По таблице составляем дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). ДНФ в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции нескольких конъюнктов.

4.2 Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

1)Отметить те строки , в последнем столбце которых стоят 1:

2)Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке =1, то в конъюнкцию включают саму эту переменную, если =0, то ее отрицание:

3)Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 1. В данном случае – это 2-ая, 3-ая, 4-ая, 6-ая и 7-ая строки.

Для каждой строки составляем конъюнкцию: если значение переменной равно 0. то берем ее отрицание, а если 1, то берем саму переменную. Затем составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций:

$$f\left(x,y,z\right)=(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z).$$

Выбираем в таблице строки, в которых булева функция принимает значение 0. В данном случае – это 1-ая, 5-ая, и 8-ая строки:

$$f\left(x,y,z\right)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)$$

ДНФ называется минимальной, если она содержит наименьшее число букв среди всех ДНФ ей равносильных.

Метод Квайна основывается на применении двух основных соотношений.

Соотношение склеивания :

$\left(a\wedge b\right)\vee\left(\overline{a}\wedge b\right)=b$; $\left(a\vee b\right)\wedge\left(\overline{a}\vee b\right)=b$

Соотношение поглощения:

$a\wedge(a\vee b)=aa\vee(a\wedge b)=a$

Используя соотношение склеивания получаем:

$(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})=\overline{y}\wedge\overline{z}$,

$(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)=x\wedge y$. Отсюда,

$(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)=(\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y)$- сокращенная ДНФ.

Вопросы:

1) Что такое ДНФ?
2) Чем отличается ДНФ от СДНФ?
3) Как составить ДНФ по таблице истинности?

Задачи к практическому занятию.

Построить таблицу истинности, найти СНДФ, найти минимальную ДНФ.

для высказывания:

Часть 1. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Привести к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

1) $\mathbf{x \to (y \to z)}$
2) $\mathbf{(x \vee y \vee z)(x \to y)}$
3) $\mathbf{x \sim y}$
4) $\mathbf{x \sim y \sim z}$
5) $\mathbf{(x \sim y)(y \sim z) \to (x \sim z)}$
6) $\mathbf{\overline{xy} \vee (x \to y)}$
7) $\mathbf{(x \vee y)(y \vee z) \to (x \vee z)}$
8) $\mathbf{x \vee \vee y}$
9) $\mathbf{(x \to y) \sim (\overline{x \to (y \to z))}}$
10) $\mathbf{(x \sim y)(y \sim z)(z \sim x)}$

Часть 2. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Привести к конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

11) $\mathbf{x \vee yz}$
12) $\mathbf{x \vee yz \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}}$
13) $\mathbf{x \to yzv}$
14) $\mathbf{xy \sim \overline{x}\overline{y}}$
15) $\mathbf{x \vee y \sim x \sim z}$
16) $\mathbf{xy \vee yz \vee \overline{z}}$
17) $\mathbf{x \to yz}$
18) $\mathbf{x \sim yz}$
19) $\mathbf{x \sim y \sim z}$
20) $\mathbf{x \vee \vee(y \vee \vee z)}$.

Построить таблицу истинности и привести СДНФ и СКНФ

1. $(\overline{z} \vee x) \Leftrightarrow (\overline{z} \,|\, (y \vee \overline{x}))$
2. $((A \vee B) \wedge B) \Rightarrow \overline{A}$
3. $x \,|\, (y \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x|y) \vee (x|z)$
4. $(\overline{z} \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\overline{z} \,|\, (y \oplus \overline{x}))$
5. $\overline{(x|\overline{y}) \oplus (z \to \overline{x})}$
6. $(\overline{A \Rightarrow B}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{A}) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \oplus \overline{B}) \vee A$
7. $((A \vee B) \oplus \overline{B}) \Rightarrow A$

8. $\left(A\vee B\wedge \overline{A}\right)\Leftrightarrow \overline{A}$

9. $\left(x\wedge y\right)\vee\left(x\wedge z\right)\Rightarrow x\oplus\left(y\vee z\right)$

10. $(x\vee \bar{y})\to\overline{(z\leftrightarrow \bar{x})}$

4.3 Минимизация нормальных форм. Карты Карно

Зачем минимизировать схемы? Обычно на предприятиях микросхемы производятся огромными тиражами. Если сэкономить хотя бы один элемент, то весь тираж удешевляется ощутимо.

Минимальная или сокращенная ДНФ получается из совершенной нормальной формы удалением некоторых элементарных конъюнкций.

	$\overline{x_1}$	x_1
$\overline{x_2}$		
x_2		

Логическая функция на карте Карно представлена совокупностью клеток, заполненных единицами (1) или пустотами (0), если известны ее значения при всем наборе аргументов, т.е. известна таблица истинности или СДНФ. При $n = 3$ карты Карно имеют вид таблицы с $2^3 = 8 = 2 \cdot 4$ клетками.

Для представления булевой функции таком виде необходимо сначала представить ее в совершенном виде и только затем минимизировать.

Карты Карно являются одним из наиболее удобных способов минимизации. Это специальные таблицы, дающие возможность упростить процесс поиска минимальной формы булева выражения с помощью графического представления для $n\leq 6$. Они имеют вид прямоугольника, разделенного на 2^n клеток, в каждой из которых — двоичный n-мерный набор значений функции F из таблицы истинности. Для $n = 2$ карта Карно имеет вид таблицы, состоящей из $2^2 = 4$ клеток.

Для построения минимальной ДНФ производится «склеивание» единиц. Склеиваются только соседние клетки, которые отличаются значением только одной переменной. Процесс сводится к объединению в группы единичных клеток карт Карно. При этом общие переменные сохраняются, а различные опускаются.

Алгоритм «склеивания» с помощью карт Карно.

Нанести единицы на карту Карно.

1. Объединить соседние единицы контурами, охватывающими *2^m* клеток, где m = 0, 1, 2, При этом может оказаться, что единица попадает одновременно в два контура. Если контур охватывает более одной пары единиц одновременно, то предпочтительнее его не дробить на пары, а рассматривать как единый целый контур, например квадрат.
2. Провести упрощения, т.е. исключить члены, дополняющие друг друга до 1 внутри контура, следя за тем, чтобы переменные внутри контура были связаны операцией конъюнкции.
3. Объединить оставшиеся члены (по одному в каждом контуре) функцией дизъюнкцией.
4. Записать полученное упрощенное булево выражение в ДНФ.

Примеры решения задач

1. Найдите минимальную ДНФ для булевой функции с помощью карт Карно.

$$f(x,y,z)= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee xy\bar{z}$$

<u>Решение.</u> Нанесем единицы на карту (рис. 28) и обведем их сначала попарно двумя контурами. Такое действие соответствует заключению в скобки слагаемых $(\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz)$ *и* $(xy\bar{z} \vee xyz)$. Вынося за скобки одинаковые конъюнкции согласно распределительному закону, в скобках получаем дизъюнкцию противоположных значений одной из переменных. В данном примере этому шагу соответствуют конъюнкции $\bar{x}y(\bar{z} \vee z)$ *и* $xy(\bar{z} \vee z)$.. Поэтому объединение двух соседних единиц всегда приводит к закону инверсии, согласно которому дизъюнкция противоположных значений переменной равна 1.

Поэтому при записи ответа после применения карты Карно переменные, заключенные в общий контур, связываются конъюнкцией (как и общий множитель при вынесении за скобки), а такие отдельные конъюнкции, т.е. различные контуры, объединяются между собой дизъюнкцией.

Если записать полученный результат, то, очевидно, к нему вновь можно применить то же правило: $f(x,y,z) = \bar{x}y \vee xy = y$.

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
z		1	1	
$\bar{z}$		1	1	

Рис. 28

Однако в данном примере удобнее рассмотреть целиком весь квадрат из четырех единиц и сравнить переменные, записанные на горизонтальных и вертикальных клетках. Очевидно, общие множители сохранятся после упрощения (ведь их можно было вынести за скобки), а инвертируемые уйдут согласно закону инверсии.

Задачи для самостоятельного решения

2. Найдите минимальную ДНФ для булевой функции с помощью карт Карно.

a) $f(xyzt) = x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}t;$

b) $f(x_1x_2x_3x_4) = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4;$

c) $f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4;$

d) $f(x_1x_2x_3x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4;$

e) $f(x_1x_2) = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2;$

f) $f(x_1x_2x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3;$

g) $f(xyzt) = \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}t \vee \bar{x}\bar{y}zt \vee \bar{x}yz;$

Вопросы для повторения

1. Понятие булева функция. Булевы функции от двух переменных, их таблицы истинности.
2. Способы задания булевых функций. Определения эквивалентных формул. Примеры.
3. Основные тождества булевой алгебры. Примеры их использования.

Практическая работа № 5 Классы Поста.

5.1 Понятие замкнутых классов

Пусть дано множество функций *F={f1, f2, ...}*. Замыканием этого множества называют множество [F], полученное из данного с помощью операции суперпозиции.

Множество функций К называют ***замкнутым классом***, если K=[K].

Например, класс {0,1} – замкнут. Замкнуты классы: {0,1,x}, $\{\bar{x}, x\}$, множество всех функций булевой алгебры. Незамкнуты классы: $\{\bar{x}\}$, $\{0, \bar{x}, x\}$, $\{x \mid y\}$.

Классы T_0, T_1, L, S, M

Класс T_0. Будем говорить, что функция $f\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ **сохраняет ноль**, если $f(0,0,\ldots,0)=0$.

В класс T_0 включим все функции, сохраняющие ноль. Чтобы выяснить, принадлежит ли функция классу T_0, нужно убедиться, что значение этой функции на нулевом наборе равно нулю.

Теорема. Класс T_0 замкнут.

Сохраняют ноль функции: $0, x, x \vee y, x \& y, x \oplus y$.

Не сохраняют ноль функции: $1, \bar{x}, x \to y, x \leftrightarrow y, x \mid y, x \downarrow y$.

Класс T_1. Будем говорить, что функция $f\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ **сохраняет единицу**, если $f(1,1,\ldots,1)=1$.

В класс T_1 включим все функции, сохраняющие единицу. Чтобы выяснить, принадлежит ли функция классу T_1, нужно убедиться, что значение этой функции на единичном наборе равно единице.

Теорема. Класс T_1 замкнут.

Сохраняют единицу функции: $1, x, x \vee y, x \& y, x \to y, x \leftrightarrow y$.

Не сохраняют ноль функции: $0, \bar{x}, x \mid y, x \downarrow y, x \oplus y$.

Класс L. В класс L включим все функции булевой алгебры, для которых полиномы Жегалкина не содержат произведения переменных, то есть полином Жегалкина имеет вид: $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, $a_i \in \{0,1\}$. Чтобы выяснить вопрос принадлежности заданной функции классу L, нужно построить полином Жегалкина и посмотреть, имеет ли он нужный вид.

Теорема. Класс L замкнут.

Принадлежат данному классу L: $1, 0, x, \bar{x}, x \oplus y, x \leftrightarrow y$.

Не принадлежат данному классу: $x \& y, x \vee y, x \mid y, x \downarrow y, x \to y$.

Класс S. Функция f называется ***самодвойственной***, если она равна своей двойственной: $f=f^*$.

В класс S включим все самодвойственные функции.

Алгоритм проверки принадлежности функции к классу S состоит в нахождении функции, двойственной к данной (этот алгоритм был рассмотрен ранее) и проверке равенства $f=f^*$.

Теорема. Класс S замкнут.

К самодвойственным функциям относятся: $x, \bar{x}, xy \vee xz \vee yz, xy \oplus xz \oplus yz$. А функции: $0, 1, x \mid y, x \downarrow y, x \oplus y, x \leftrightarrow y, x \& y, x \vee y, x \to y$ не являются таковыми.

<u>Класс М.</u> На множестве всех двоичных наборов введем частичный порядок. Будем говорить, что набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ***предшествует*** набору $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ (т.е. $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$), если $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является ***монотонной***, если для любых наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ из того, что $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})$.

В класс *M* включим все монотонные функции.

Теорема. Класс *M* замкнут.

Алгоритм выяснения факта монотонности некоторой функции неэффективен. Но если указать на два набора $\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta}$, для которых $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$, то можно сделать вывод, что заданная функция не монотонна.

Принадлежат данному классу М: $1, 0, x, \; x \& y, \; x \vee y$.

Не принадлежат данному классу: $\bar{x}, \; x \oplus y, \; x \leftrightarrow y, x \to y, x \mid y, x \downarrow y$.

Задачи для самостоятельного решения

h) Даны функции. Принадлежат ли заданные функции классам T_0, T_1, *L*, *S*, *M*?$f=(1,1,0,1,1,1,1,0)$;

i) $x_1 x_2 (x_1 \oplus x_2)$;

j) $f=(0,1,1,1,1,1,1,1)$;

3. $(x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1) \leftrightarrow x_3$.Принадлежат ли функции классам $T_0 \cup T_1, T_0 \cap T_1, T_0 \setminus T_1, T_1 \setminus T_0, \overline{T_0}, \overline{T_1}$?

a) $(x \to y)(y \downarrow z) \vee (z \to y)$

b) $((x \vee y) \to (x \mid yz)) \downarrow ((y \leftrightarrow z) \to x)$

5.2 Теорема Поста

Возникает вопрос, можно ли с помощью определенного набора логических элементов реализовать требуемую схему? На языке алгебры логики эту задачу можно сформулировать следующим образом: можно ли любую функцию выразить через имеющиеся или существует ли минимальный набор функций, с помощью которого можно выразить любую функцию? Эту задачу в 1921 году решил Пост.

Теорема. Система булевых функций F полна тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну функцию, не сохраняющую ноль, хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу, хотя бы одну не самодвойственную функцию, хотя бы одну не монотонную функцию и хотя бы одну нелинейную функцию.

Примеры решения задач

4. Выясните, полна ли система функций $\{x \to y,\ x \to \overline{y}\, z\}$?

Решение данной задачи будем оформлять в виде таблицы.

В соответствующей ячейке будем ставить *, если функция не принадлежит указанному классу.

	T_0	T_1	L	S	M
$x \to y$	*	-	*	*	*
$x \to \overline{y}\, z$	*	*	*	*	*

Получили, что в каждом столбце есть хотя бы одна звездочка, т. е. нашлась хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая единицу, хотя бы одна не самодвойственная функция, хотя бы одна не монотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция. Следовательно, по теореме Поста, система функций полна.

Задачи для самостоятельного решения

a) Пользуясь теоремой Поста, Выясните: полна ли система, является ли она базисом, если нет, то выделить базис. $\{x \to y,\ x \to \overline{y}\, z\}$;

b) $\{0,\ 1,\ x(y \leftrightarrow z) \vee \overline{x}(y \oplus z)\}$;

c) $\{\ x\overline{y}\ ,\ x \leftrightarrow yz\ \}$;

d) $\{(0,1,1,0,1,0,0,1),\ (1,0,0,0,1,1,0,1),\ (0,0,0,1,1,1,0,0)\}$

Задачи к практическому занятию.

Определить к каким классам Поста относятся булевы функции:

Часть 1.

1. $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$
2. $(\overline{z} \oplus x) \vee (\overline{z} \,|\, (y \vee \overline{x}))$
3. $x \,|\, (y \wedge z)$
4. $(\overline{z} \vee y) \to (\overline{z} \oplus \overline{x})$

5. $x|(y \to z)$

6. $(\bar{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z} \vee \bar{x})$

Часть 2.

1. $(\bar{z} \vee y) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$
2. $(\bar{z} \vee y) \wedge (\bar{z} \oplus \bar{x})$
3. $(x \vee \bar{y}) \to (\bar{z} \oplus \bar{x})$
4. $(\bar{z} \vee y) \oplus (\bar{z} \oplus \bar{x})$
5. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$
6. $(x|y) \to (x|z)$
7. $(x|y) \vee (x|z)$

1. $(\bar{z} \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{z}|(y \oplus \bar{x}))$
2. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$
3. $(\bar{z} \vee x) \Leftrightarrow (\bar{z}|(y \vee \bar{x}))$
4. $x \oplus (y \vee z)$
5. $(x \vee \bar{y}) \to \overline{(z \leftrightarrow \bar{x})}$
6. $\overline{(x|\bar{y}) \oplus (z \to \bar{x})}$
7. $x|(y \Rightarrow z)$

5.3 Классы Поста. Класс двойственных функций

Часть 1.

1. Построить функцию, двойственную данной: $a \vee в$

Ответ: $а)\bar{a}$ $б)a \vee в$ $в)a \wedge в$ $г)\overline{a \Rightarrow в}$

2. К какому из классов Поста принадлежит функция $x \oplus y$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

3. Построить функцию, двойственную данной: $a \wedge в$

Ответ: $а)\bar{a}$ $б)a \vee в$ $в)a \wedge в$ $г)\overline{a \Rightarrow в}$

4. К какому из классов Поста принадлежит функция $x \Rightarrow y$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

Часть 2.

5. Построить функцию, двойственную данной: $\overline{a}$

Ответ: $а)\overline{a}$ $б)a \vee в$ $в)a \wedge в$ $г)\overline{a \Rightarrow в}$

6. К какому из классов Поста принадлежит функция $\overline{xy}$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

7. Построить функцию, двойственную данной: $\overline{x}$

Ответ: $а)\overline{a}$ $б)a \vee в$ $в)a \wedge в$ $г)\overline{a \Rightarrow в}$

8. К какому из классов Поста принадлежит функция $\overline{x}$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

Часть 3.

1. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают одинаковые значения. При n = 2,3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.
2. Найти число всех функций от n переменных, которые на противоположных наборах принимают противоположные значения. При n = 2,3 найти все такие функции, существенно зависящие от всех переменных.
3. Найти число всех функций от n переменных, которые на любой паре соседних наборов принимают противоположные значения. Найти вид этих функций.

Вопросы для повторения:

1. Перечислите классы Поста.

2. Как определяют принадлежность к какому-либо классу Поста?

3. Может ли одна и та же булева функция принадлежать к двум и более классам одновременно?

Практическая работа № 6. Представление Булевых функций в виде многочлена Жегалкина.

Цель работы: уметь представлять булеву функцию, заданную таблицей или формулой, в виде многочлена Жегалкина, используя преобразования выражений по законам алгебры логики, определять является ли данная функция линейной.

Краткие теоретические сведения.

- Многочлены алгебры логики строятся по аналогии с обычными многочленами. Умножение заменяем конъюнкцией, а сложение альтернативной дизъюнкцией (сложением по модулю два).
- Многочленом Жегалкина называется альтернативная дизъюнкция, каждый член которой представляет собой конъюнкцию переменных или переменные, или 1.
- Любая функция может быть представлена многочленом (полиномом)
- Жегалкина и это представление единственно.
- Функция является линейной, если многочлен Жегалкина не содержит конъюнкции переменных.

<u>Пример.</u> Записать булеву функцию $f\left(x,y,z\right)=(x\vee\overline{y})\rightarrow\left(z\Leftrightarrow x\right)$ в виде многочлена Жегалкина. Определить является ли функция линейной.

Решение:

Преобразуем равенство, используя формулы алгебры логики.

$$(x\vee\overline{y})\rightarrow\left(z\Leftrightarrow x\right)=(x\overline{y}\oplus x\oplus\overline{y})\rightarrow\left(z\oplus x\oplus 1\right)=$$
$$=(x\overline{y}\oplus x\oplus\overline{y})\left(z\oplus x\oplus 1\right)\oplus(x\overline{y}\oplus x\oplus\overline{y})\oplus 1=$$
$$=x\overline{y}z\oplus x\overline{y}x\oplus x\overline{y}\oplus xz\oplus x\oplus x\oplus\overline{y}z\oplus\overline{y}x\oplus\overline{y}\oplus x\overline{y}\oplus x\oplus$$
$$\oplus\overline{y}\oplus 1=xz\left(y\oplus 1\right)\oplus x\overline{y}\oplus x\overline{y}\oplus xz\oplus\left(y\oplus 1\right)z\oplus\overline{y}\oplus x\oplus$$
$$\oplus\overline{y}\oplus 1=xyz\oplus xz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1=xyz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1$$

Функция не является линейной, т.к. многочлен Жегалкина содержит конъюнкции переменных.

Ответ: функция не является линейной; многочлен Жегалкина, соответствующий данной функции:

$$f\left(x;y;z\right)=xyz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1$$

6.1 Полиномы Жегалкина. Алгоритмы их построения для произвольных функций

Алгебру <M, F>, где M={x_1, x_2, x_3, …} и F=$\left\{0, 1, \&, \oplus\right\}$ будем называть алгеброй Жегалкина.

В алгебре Жегалкина выполняются следующие тождества:

1. $x \,\&\, y = y \,\&\, x$; $x\oplus y=y\oplus x$;
2. $x\,\&\,(y\oplus z)=(x\,\&\,y)\oplus(x\,\&\,z)$;
3. $x \,\&\, (y \,\&\, z) = (x \,\&\, y) \,\&\, z$;
4. $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$;

5. $x \& x = x$; $x \oplus x = 0$
6. $x \oplus 0 = x$; $x \& 0 = 0$
7. $x \oplus 1 = \overline{x}$; $x \& 1 = x$.

Полиномом в булевой алгебре называют любое выражение, состоящее из суммы произведений переменных, где слагаемые не повторяются, переменные записаны без степеней и в произведениях не повторяются.

Теорема. Любую функцию булевой алгебры можно выразить в виде полинома Жегалкина.

Представление функции в виде полинома Жегалкина единственно.

6.2 Алгоритм нахождения полинома Жегалкина для произвольной функции с помощью СДНФ:

1. Построить СДНФ для данной функции.
2. Произвести в СДНФ следующую замену: $x_i \vee x_j \to x_i \oplus x_j$; $\overline{x_i} \to (x_i \oplus 1)$.
3. Раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

6.3 Алгоритм нахождения полинома Жегалкина для произвольной функции методом неопределенных коэффициентов:

1) Записываем общий вид полинома Жегалкина:
$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_1x_2$ для двух переменных;
$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_4x_1x_2 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_2x_3 \oplus a_7x_1x_2x_3$.для трех переменных.
2) Берем нулевой набор (0,0,0) и находим a_0.
3) Рассматриваем все наборы с одной единицей: (1,0,0), (0,1,1), (0,0,1) и находим a_1, a_2, a_3.
4) Рассмотрим все наборы с двумя единицами: (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1) и находим a_4, a_5, a_6..
5) Рассматриваем набор (1,1,1) и находим коэффициент a_7.

Примеры решения задач

1. Построить полином Жегалкина для функции $x \to y$ методом неопределенных коэффициентов.

<u>Решение.</u> $x \to y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x \cdot y$.

(0,0): $0 \to 0 = 1 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 \cdot 0 \Rightarrow a_0 = 1.$

(1,0): $1 \to 0 = 0 = 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow a_1 = 1.$

(0,1): $0 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 \cdot 1 \Rightarrow 1 = 1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 0.$

(1,1): $1 \to 1 = 1 = 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = 1.$

Следовательно, $x \to y = 1 + x + x \cdot y$.

Задачи для самостоятельного решения

2. По заданной СДНФ функций построить полином Жегалкина:

b) $\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$;

c) $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

4. Построить полином Жегалкина с помощью СДНФ для функций:

a. $x \vee y$;

b. $x \to y$;

c. $(x \leftrightarrow y) \to z$;

5. $((\overline{x \vee y}) \vee (\bar{x} \cdot z)) \downarrow (x \leftrightarrow y)$ Построить полином Жегалкина двумя способами для функций:

a. $(x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_1$;

b. $((\overline{xy}) \mid (\bar{x} \vee z)) \leftrightarrow (x \vee y)$;

c. $x_1x_2(x_1 \oplus x_2)$;

d. *f(x, y, z)=(1,0,0,1,0,0,0,1).*

6. Заданы следующие функции:

1) *f(x,y)=(0,1,0,1)*;

2) $(x \leftrightarrow y) \to z$;

3) $((\overline{x \vee y}) \vee (\bar{x} \cdot z)) \downarrow (x \leftrightarrow y)$.

a) Построить для них полином Жегалкина методом неопределенных коэффициентов.

b) Выясните, имеют ли построенные полиномы следующий вид: $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$, $a_i \in \{0,1\}$.

c) Построить для заданных функций двойственные им. Выясните, являются ли они самодвойственными.

Часть 1

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$\bar{x} = x \oplus 1$; $x \oplus x = 0$; $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$; $x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1$; $x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$;

$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1$; $x | y = xy \oplus 1$.

1. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$:

Ответы: $а) aв \vee \bar{a}\bar{в}$ $б) a\bar{в} \vee \bar{a}в$ $в) \bar{a} \wedge \bar{в}$ $г) \bar{a} \vee в$

2. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: $а) xy \oplus x \oplus 1$ $б) x \oplus y$ $в) xy \oplus 1$ $г) xy \oplus x$

3. Представить функцию $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\Rightarrow y}\Rightarrow z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

Часть 2

1. Построить таблицу истинности для функции $f\left(x,y.z\right)=\overline{xy}\Rightarrow(z\vee x)$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

2. Представить функцию $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\vee y}\vee\left(x\downarrow z\right)$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

3. Построить таблицу истинности для функции $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\Leftrightarrow y}\Rightarrow z$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

4. Представить в виде многочлена Жегалкина $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\vee y}\vee\left(x\downarrow z\right)$, построить контактную схему, реализующую эту функцию.

5. Представить функцию $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\Leftrightarrow y}\vee z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

6. Построить таблицу истинности для функции $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\vee y}\Leftrightarrow z$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

7. Представить функцию $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\Rightarrow y}\downarrow z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

8. Построить таблицу истинности для функции $f\left(x,y.z\right)=\overline{x\vee y}\,|\,z$, найти СДНФ. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

9. Представить функцию $f\left(x,y.z\right)=\overline{y\Rightarrow z}\downarrow xy$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

10. Построить таблицу истинности для функции $f\left(x,y.z\right)=xz\Rightarrow\overline{x\vee y}$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

Вопросы для повторения:

1. Что такое алгебра Жегалкина.
2. Как с помощью полинома Жегалкина определить принадлежность булевой функции к классу Линейных функций.
3. Перечислите операции, разрешенные для алгебры Жегалкина.

Практическая работа 7. Приложение алгебры логики: релейно-контактные схемы

Цель работы: знать законы алгебры Буля, уметь составлять РКС для высказываний, записывать высказывания по данным РКС.

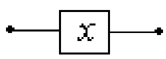
Краткие теоретические сведения.

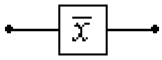
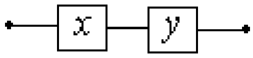
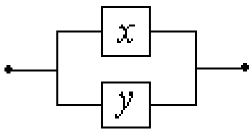
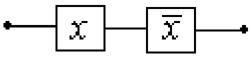
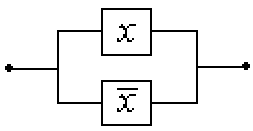
Релейно-контактной схемой (*РКС*) или *переключательной схемой* называется схематическое изображение устройства, состоящего из следующих элементов:

1) переключателей (контактов, реле, ламп и др.);
2) соединительных проводников;
3) входов-выходов (полюсов РКС).

Рассмотрим простейшую РКС, содержащую один переключатель P. Если переключателю P поставить в соответствие высказывание x: «Переключатель P замкнут», то истинному значению x ($x = 1$) будет соответствовать замкнутое состояние переключателя, при котором РКС проводит ток, т.е. импульс, поступающий на вход, может быть снят на выходе. Значению $x = 0$ будет соответствовать разомкнутое состояние РКС (ток не проводится). Каждой РКС, состоящей из нескольких переключателей, можно поставить в соответствие высказывание, выраженное некоторой формулой A, таким образом, что истинному значению формулы ($A = 1$) будет соответствовать замкнутое состояние РКС, а значению $A = 0$ – разомкнутое состояние. Примеры таких соответствий приведены в таблице.

<u>Простейшие РКС и соответствующие им формулы логики.</u>

РКС	Формула	Значения
Переключатель x: 	Простейшее высказывание: x	$x = 1$, если переключатель замкнут;

		$x = 0$, если переключатель разомкнут
Переключатель $\overline{x}$ 	Отрицание простейшего высказывания: $\overline{x}$	$\overline{x} = 0$, если переключатель замкнут; $\overline{x} = 1$, если переключатель разомкнут
Последовательное соединение:  (схема замкнута, когда оба переключателя замкнуты)	Конъюнкция высказываний: $x \wedge y$	$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0. \end{array}\right.$
Параллельное соединение:  (схема разомкнута, когда оба переключателя разомкнуты)	Дизъюнкция высказываний: $x \vee y$	$x \vee y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $x \vee y = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 1. \end{array}\right.$
Схема, которая всегда разомкнута 	$x \wedge \overline{x}$	$x \wedge \overline{x} \equiv 0$
Схема, которая всегда замкнута 	$x \vee \overline{x}$	$x \vee \overline{x} \equiv 1$

Из простейших РКС путем их последовательного и параллельного соединения могут быть построены более сложные переключательные схемы.

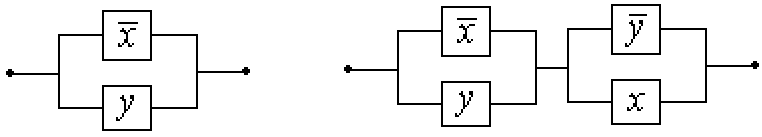
Доказано, что любая формула алгебры логики может быть преобразована к виду, содержащему только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Это позволяет изображать логические формулы при помощи РКС, а РКС задавать формулами.

Например, согласно формулам основных равносильностей

$$x \to y \equiv \overline{x} \vee y \quad \text{и} \quad x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x),$$

следовательно, логическим операциям импликации и эквиваленции соответствуют РКС, изображенные рис. 1.

Используя равносильные преобразования логической формулы, соответствующей некоторой РКС, можно *упростить РКС*, т.е. привести ее к виду, содержащему меньшее число



$x \to y$ $\qquad$ $x \leftrightarrow y$

Рис. 1

переключателей.

<u>Пример</u>.

Упростить РКС, изображенную на рис. 2.

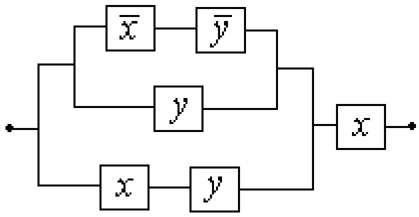


Рис. 2

<u>Решение.</u> Запишем соответствующую РКС формулу, используя таблицу простейших РКС и соответствующих им формул логики:

$$A = \big(((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee y) \vee (x \wedge y)\big) \wedge x.$$

Упростим формулу, используя основные равносильности:

$$\big(((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee y) \vee (x \wedge y)\big) \wedge x \equiv \big(((\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee y)) \vee (x \wedge y)\big) \wedge x \equiv$$

$$\equiv \big(((\bar{x} \vee y) \wedge 1) \vee (x \wedge y)\big) \wedge x \equiv \big((\bar{x} \vee y) \vee (x \wedge y)\big) \wedge x \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \vee y \vee (x \wedge y)) \wedge x \equiv \big((\bar{x} \vee y \vee x) \wedge (\bar{x} \vee y \vee y)\big) \wedge x \equiv$$

$$\equiv \big((1 \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y)\big) \wedge x \equiv ((1 \wedge \bar{x}) \vee y) \wedge x \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge x \equiv$$

$$\equiv (\bar{x} \wedge x) \vee (y \wedge x) \equiv 0 \vee (y \wedge x) \equiv y \wedge x.$$

Таким образом, $A \equiv y \wedge x$. Построим РКС, соответствующую упрощенной формуле (рис. 3).

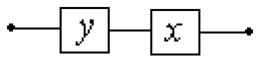


Рис. 3

Вопросы для самостоятельного занятия.

1. Что называется релейно-контактной схемой.
2. Простейшие РКС и соответствующие им формулы логики.

Задачи к практическому занятию.

Часть 1.

1. Задать релейно-контактной схемой формулу, соответствующие таблице истинности:

x	y	z	

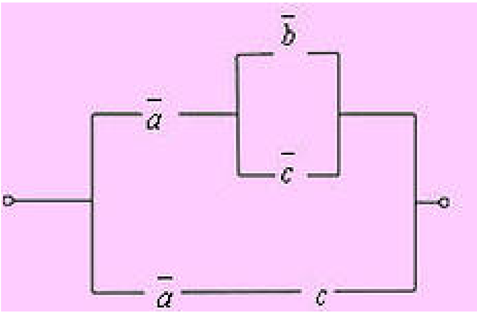
1	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	1

2. Задать формулу алгебры логики релейно-контактной схемой: $(\bar{z}\oplus x)\vee(\bar{z}|(y\vee\bar{x}))\Leftrightarrow x\wedge(y\oplus z)$

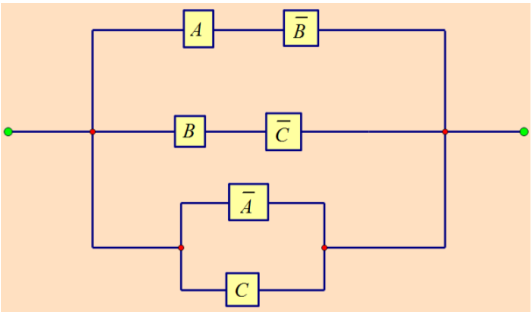
Часть 2.

3. Записать формулу алгебры логики, соответствующую данной релейно-контактной схеме, упростить ее, если это возможно и нарисовать новую схему по упрощенной формуле.

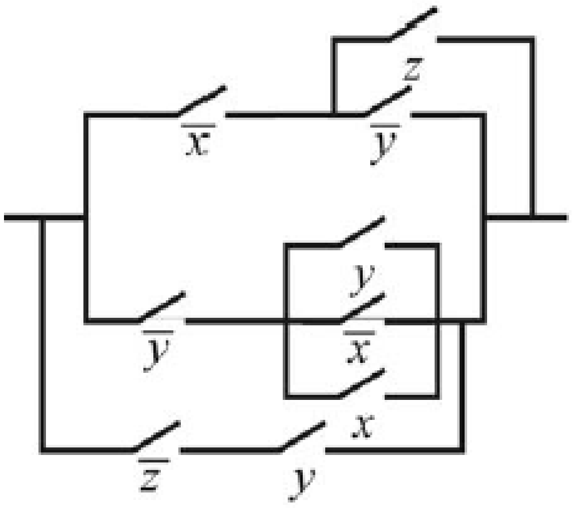
а).



б).



в).



4. Придумать задания аналогичные 1,2,3 и выполнить их.

Комитет из 4 человек принимает решения большинством голосов, председатель пользуется правом ”вето”. Построить схему, чтобы голосование происходило нажатием кнопок и в случае принятия решения загоралась лампочка.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин.- 3-е изд., стер.-М.: ИЦ «Академия», 2018.

2. Дискретная математика: учебник / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. -М.: КУРС: ИНФРА-М, 2019. (Среднее профессиональное образование).
   http://znanium.com/catalog/product/978936

Список дополнительной литературы

1. Дискретная математика: сборник задач / А.И. Гусева, В.С. Киреев, А.Н. Тихомирова. - М.: КУРС: ИНФРА-М, 2018. (Среднее профессиональное образование).
   http://znanium.com/catalog/product/929964