ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям по дисциплине

"Элементы высшей математики"

для обучающихся специальности

38.02.07 Банковское дело

Ставрополь, 2022

Настоящие методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 38.02.07 Банковское дело и программой дисциплины «Элементы высшей математики»

Составитель: Дмитриенко Т.И.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД», протокол №6 от «25» мая 2022 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №6 от «26 » мая 2022 г.

Содержание

Введение

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Элементы высшей атематики» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины ориентирована на достижение следующих целей:

- формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолж-ния образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь студентам осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

На практических занятиях реализуются следующие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.

ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учётом особенностей социального и культурного контекста.

ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР 4.Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР 14. Проявляющий сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности.

Практическое занятие № 1.

Операции над матрицами вычисление определителей

__Определение.__ **Матрицей** размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, а j- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

__Определение.__ **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

__Пример.__ Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Определение:</u> Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

A·B = C;

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \ .$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Определение</u>. Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц А = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

АВ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

ВА = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ = 2⋅1 + 4⋅4 + 1⋅3 = 2 + 16 + 3 = 21.

Пример. Найти произведение матриц А=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

АВ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$.

Определение. Определителем квадратной матрицы А=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

$M_{1к}$ – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример. Вычислить определитель матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2\cdot 1 - 1\cdot 3) - 2(0\cdot 1 - 3\cdot 3) + (0\cdot 1 + 3\cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

Пример:. Даны матрицы А = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, В = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (АВ).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 5+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

– 152 = -26.

Задания к практическому занятию

1.Вычислить определители:

$а)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};\ б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};\ в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix};\ г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix};\ д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$

2. Решить уравнения:

$а)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0;\ б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0;\ в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$

$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$

3. Решить неравенства:

$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;\ б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;\ в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \geq 5;\ г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14.$

4. Вычислить определители:

$а)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix};\quad б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 8 & 8 & 2 \end{vmatrix};\quad в)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix};\quad г)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad д)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad е)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$

$ж)\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};\quad з)\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ и)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\ к)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix};$

$л)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix};\ м)\begin{vmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & -3 \end{vmatrix};\ н)\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

5 Даны матрицы $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Существуют ли а) AB, б) BA,

в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA?

6. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times4}\cdot B_{4\times5}=C_{m\times n}$;

б) $A_{2\times3}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times6}$; в) $A_{2\times m}\cdot B_{n\times3}=C_{2\times3}$.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & -6\end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$;

д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1}; з) B^{-1}.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1};

ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

9. Найти:

а) $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются прямоугольными?
3. Какие матрицы называются квадратными?
4. Что называют главной диагональю матрицы?
5. Какая матрица называется диагональной?
6. Какая матрица называется единичной?
7. Что значить «транспонировать» матрицу?
8. Что называется суммой матриц?

9. Как найти сумму матриц?
10. Что называется произведением матрицы на число?
11. Как найти произведение двух матриц?
12. Назовите условие, необходимое для произведения матриц.

Практическое занятие № 2.
Нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы.

Определение. **Элементарными преобразованиями** матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
3) перестановка строк;
4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
5)транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Определение. **Алгебраическим дополнением** минора матрицы называется его дополнительный минор умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

det A = 4 - 6 = -2.

M_{11}=4; M_{12}= 3; M_{21}= 2; M_{22}=1

x_{11}= -2; x_{12}= 1; x_{21}= 3/2; x_{22}= -1/2

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Определение. В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Пример. Определить ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ RgA = 2.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Rg = 2.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \mathrm{Rg} = 2.$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема. В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.

Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Задания к практическому занятию

1. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е).

2. Найти матрицы обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется определителем матрицы?
2. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
3. Чем отличается алгебраическое дополнение от одноименного минора матрицы?
4. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

5. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
6. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Практическое занятие № 3.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

<u>**Теорема** (Правило Крамера):</u> Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}..a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}..a_{1n} \\ a_{21}..a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}..a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}..a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}..a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\,32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 13y + 7z = 14 \\ 7y = 0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ y + \dfrac{7}{13}z = \dfrac{14}{13} \\ -\dfrac{49}{13}z = -\dfrac{98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z = -\frac{98}{13} : \left(-\frac{49}{13}\right) = 2$$

$$y = \frac{14}{13} - \frac{7}{13} \cdot 2 = 0$$

$$x = -3 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 1$$

Таким образом, $x = 1, \quad y = 0, \quad z = 2.$

Задания к практическому занятию

1. Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 74x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

2. Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad = 5, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 16, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5. \end{cases}$

3. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Как записать простейшее матричное уравнение?
2. Как решить матричное уравнение?
3. Запишите формулы Крамера для системы двух и трех линейных уравнений.
4. Дайте определение системе линейных уравнений.
5. Как зависит количество решений системы линейных уравнений в зависимости от определителей матрцы?
6. По каким признакам можно судить о Совместности или несовмести системы линейных уравнений?
7. В каком случае система линеных уравнений имет бесконечное множество решений?

Практическое занятие № 4.

Предел функции. Основные теоремы о пределах. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов.

<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех х таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

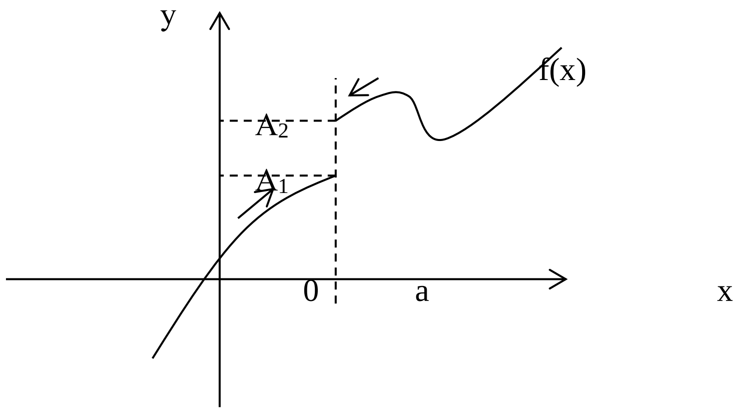
верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u> Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что А – **конечный предел** функции f(x).

<u>Определение.</u> Число А называется **пределом** функции f(x) при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех х, $|x|>M$ выполняется неравенство

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого x>M и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого x<M.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и* $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что |f(x)|<M вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Второй замечательный предел. $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

<u>Пример.</u> Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$

3. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

4. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{matrix} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$

$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0$;	$x^2 - 8x + 12 = 0$;
$D = 36 - 32 = 4$;	$D = 64 - 48 = 16$;
$x_1 = (6 + 2)/2 = 4$;	$x_1 = (8 + 4)/2 = 6$;
$x_2 = (6 - 2)/2 = 2$;	$x_2 = (8 - 4)/2 = 2$;

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$

Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=$$

$$=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

8. $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

9. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),\ \text{т.к.}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\
\quad -5x^2+11x & \\
\quad \underline{-5x^2+5x} & \\
\qquad\qquad 6x-6 & \\
\qquad\qquad \underline{6x-6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

Задания к практическому занятию.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\dfrac{2\tilde{o}^2-7x-4}{2\tilde{o}^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\left(\dfrac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{1-\cos\tilde{o}}{\tilde{o}\sin x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{1-\cos\tilde{o}}{1-\cos3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2x\,tg\,3x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_4\left(\dfrac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\cos 3\tilde{o}-1}{\tilde{o}\,tg 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[3]{\frac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}{\tilde{o}\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{4+5\tilde{o}^2-3x^5}{8-6\tilde{o}-\tilde{o}^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\arcsin\left(\frac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -3}\frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\cos\tilde{o}-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

9. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{\tilde{o}-2\tilde{o}^3-5x^4}{2+3\tilde{o}^2+\tilde{o}^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\frac{\tilde{o}^2+4x-21}{2\tilde{o}^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\tilde{o}\,tg 3x}{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{3\tilde{o}+14\tilde{o}^2}{1+2\tilde{o}+7\tilde{o}^2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\frac{\tilde{o}-\tilde{o}^2}{1-2\tilde{o}^2}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\frac{\tilde{o}^2-25}{\tilde{o}^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\frac{\tilde{o}\sin 2x}{tg^2 3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

11. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\frac{3-7\tilde{o}^2+5\tilde{o}^3}{2+2\tilde{o}-\tilde{o}^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -3}\frac{\tilde{o}^2+10x+21}{\tilde{o}^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x^2-4x})$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение предела функции точке.
2. Дайте определение предела функции на бесконечности.
3. Что такое односторонние пределы функции?
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
5. Что такое первый, второй и третий замечательные пределы?
6. Дайте определение бесконечно малой функции.
7. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых функций.
8. Сформулируйте принцип эквивалентности бесконечно малых функций.
9. В чем заключается связь бесконечно больших и бесконечно малых функций?

Практическое занятие № 5.
Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

Определение. Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Определение. Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x = x_0, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

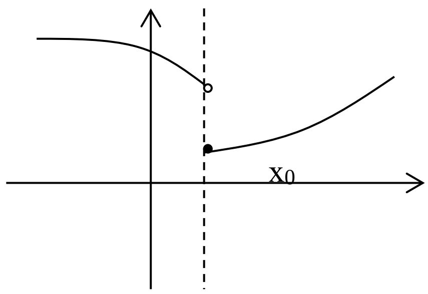
$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

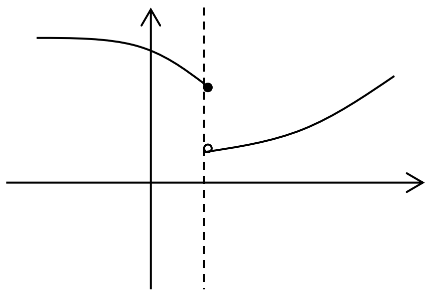
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что x = x_0 является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

<u>Определение.</u> Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

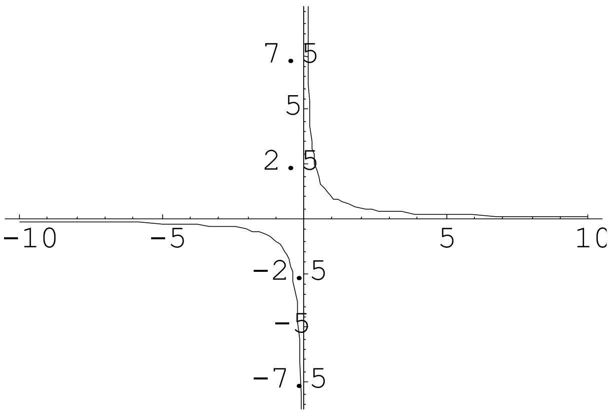
<u>Пример.</u> Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u> Функция f(x) = $\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

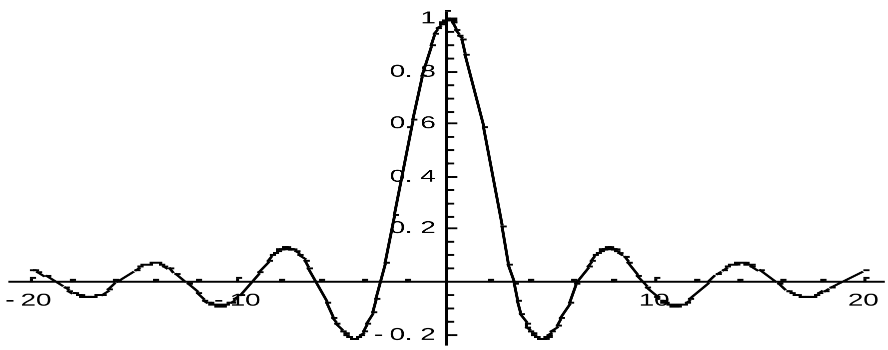


<u>Пример.</u> f(x) = $\frac{\sin x}{x}$

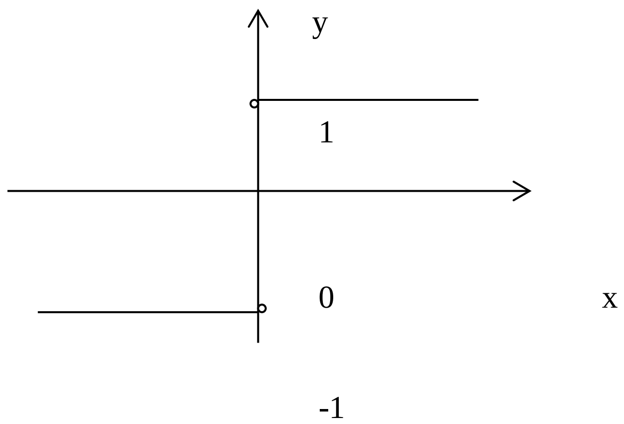
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & при \quad x \neq 0 \\ 1, & при \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. f(x) = $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

Задания к практическому занятию

Задание№1: Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2}, x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2, \\ \frac{1}{x-2,} x > 2. \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3}, x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, -3 \le x \le 3 \\ \frac{1}{x-3}, x > 3. \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, x < 0, \\ \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{x-1}, x > 1. \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} -\frac{2|x|}{x}, x < 0 \\ \sqrt{4-x^2}, 0 \le x \le 2, \\ \frac{1}{x-2}, x > 2. \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} \frac{3|x|}{x}, x < 0, \\ \sqrt{9-x^2}, 0 \le x \le 3, \\ \frac{1}{x-3}, x > 3. \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, x < -2, \\ -\sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2, \\ \frac{|x-2|}{x-2}, x > 2. \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x+3,} x < -3, \\ -\sqrt{9-x^2}, -3 \le x \le 3, \\ \frac{|x-3|}{x-3}, x > 3. \end{cases}$

8. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, x < -1, \\ \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 0, \\ \frac{|x|}{x}, x > 0. \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x+2,} x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2, \\ \frac{2|x|}{x}, x > 2. \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x+3}, x < -3, \\ \sqrt{9-x^2}, -3 \le x \le 0, \\ \frac{3|x|}{x}, x > 0. \end{cases}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Приведите примеры функций непрерывных в точке.
3. Дайте определение непрерывности функции на интервале.
4. Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.
5. Приведите примеры точек разрыва первого и второго рода.
6. Сформулируйте основные свойства непрерывных функций.
7. Приведите примеры непрерывности элементарных функций.

Практическое занятие №6.

Вычисление производных сложных функций.

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

<u>Пример.</u> Найти производную функции

1. $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По формуле получаем: $u = x^2 + 3x; \quad v = x\cos x;$

Производные этих функций: $u' = 2x + 3; \quad v' = \cos x - x\sin x;$

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x)$$

2. $y = \sin\left(x^2 + 3\right)$;

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x$.

3. $y = \left(x^2 + e^x\right)^{10}$;

Используем формулу $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 10\left(x^2 + e^x\right)^9 \cdot \left(2x + e^x\right).$$

4. $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

$$y' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2\left(e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\left(\sin x\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\cos x.$$

<u>Пример.</u> Найти y' :

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0$.

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по x, полагая, что y есть функция от x и обозначая производную y через y' :

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0 .$$

Выразим из полученного равенства y' :

$$\left(2y + 2x^2\right)y' = 2x - 4xy ;$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2} .$$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

$$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x ;$$

$$\left(-\sin y - 8y\right)y' = e^x ;$$

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y} .$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Используем формулу $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y' = \frac{\left(\cos t\right)'}{\left(t^2 + 3\right)'} = \frac{-\sin t}{2t}$$

Задание к практическому занятию

Вычислить производную:

$y = e^{-x}$

$y = \sqrt{e^x}$

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = 16^{\sqrt{x^3+6x+14}}$

$y = e^{(3x+5)^2}$

$y = a^{3x}$

$y = a^x e^x$

$y = \lg(2x)$

$y = \ln 3x$

$y = \log_3(4x-2)$

$y = \ln(x^3)$

$y = (\ln x)^3$

$y = 5(2x^2 - 3x + 4)^8$

$y = 4\sqrt{1 + 3x^3 - 2x^5}$

$y = \sqrt[3]{(2-x)(5-2x)}$

$y = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

$y = \sqrt{\dfrac{4}{2x^2+5}}$

$y = 3\sin(3x-1)$

$y = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg\, 3x}$

$y = \ln\sin x$

$y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

Вопросы к практическому занятию

1. Определите геометрический и физический смысл производной.

2. Назовите необходимое условие существования производной.

3. Перчислите Правила дифференцирования постоянной, алгебраической суммы, произведения, частного функций.

Практическое занятие № 7.
Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + \dfrac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + ...$

$... + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ может быть найден дифференциал n- го порядка.

Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

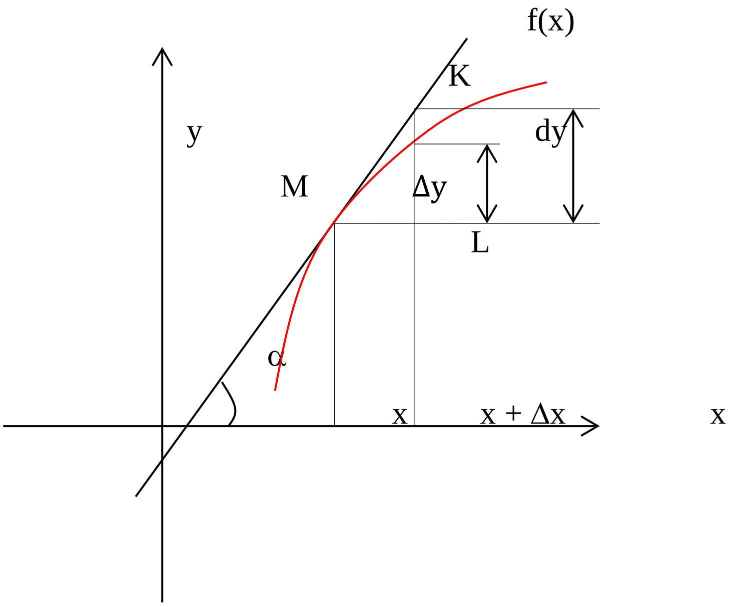
Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

<u>Определение.</u> Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dy или df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$. Можно также записать: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

<u>Геометрический смысл дифференциала.</u>



Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

<u>Свойства дифференциала.</u>

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. y - сложная функция.

Тогда $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Пример. Найти производную функции:

1. $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

2. $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

3. $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

4. $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

5. $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2 \ln x)$$

Задание к практическому занятию

Найти производные функций:

1. а) $y = x^5 + \ln\left(x^2 + 8x - 1\right)$; б) $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}x+3}$

2. а) $y = \sin 3x \cdot \cos 5x$; б) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x - \cos x}$

3. а) $y = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1})$; б) $y = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$

4. а) $y = x^2 + \arcsin\sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

5. а) $y = (2x + e^{-x^2})^2$; б) $y = \ln\frac{\sin x}{\cos 2x}$

6. а) $y = \operatorname{tg}^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$; б) $y = \frac{x+1}{x^2 - \ln x}$

7. а) $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$; б) $y = \operatorname{ctg}\frac{\ln x + 1}{2 - \ln x}$

8. а) $y = x^2 \cdot 10^{-x+2}$; б) $y = \frac{e^x + 1}{\cos x}$

9. а) $y = \sin^2 2x \cdot \cos\frac{x}{2}$; б) $y = \ln\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

10. а) $y = \operatorname{arctg} x^2 - \ln\sin x$; б) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2x}$

11. а) $y = x^4 + e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y = \frac{\cos x + 2x}{\sqrt{x}}$

12. а) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Какую информацию о функции мы можем получить, проанализировав вторую производную функции?

2. Дайте определение дифференцируемой функции. Назовите необходимое и достаточное условия дифференцируемости в точке.

3. Что такое дифференциал функции? Геометрический смысл дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

4. Как вычисляются дифференциалы высших порядков?

5. В чём заключается Правило Лопиталя? Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Практическое задание № 8.

Полное исследование функции. Экстремум функции нескольких переменных.

Теорема. 1) *Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.*

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.

Теорема. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Аналогично , если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Теорема. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. х→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}k=k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}-k-0=0$, следовательно,

$$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.}$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]-\lim\limits_{x\to\infty}b=0$, следовательно,

$$\boxed{b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]}$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: y→+∞ x→0-0: y→-∞ x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

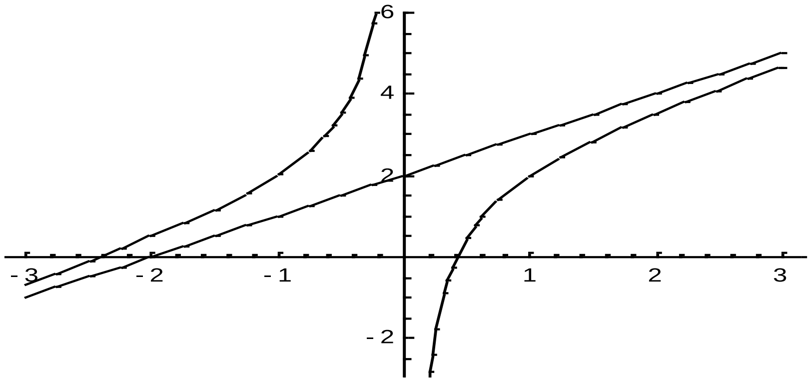
2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



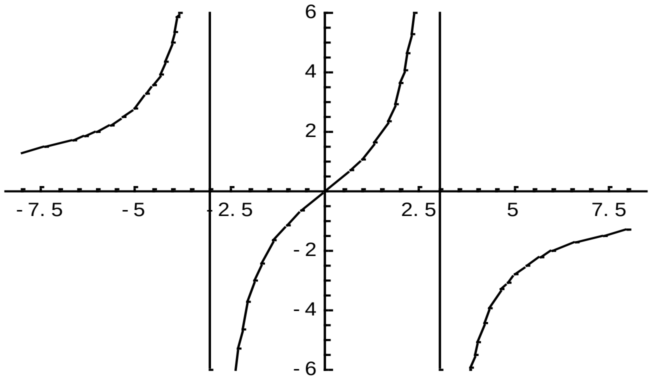
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область (-∞; -1) ∪ (-1; 1) ∪ (1; ∞).

В свою очередь, видно, что прямые x = 1, x = -1 являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал (-∞; ∞).

Точками разрыва функции являются точки x = 1, x = -1.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: x = 0; x = - $\sqrt{3}$; x = $\sqrt{3}$; x = -1; x = 1.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1) - (x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

-∞ < x < - $\sqrt{3}$, y″ < 0, кривая выпуклая

- $\sqrt{3}$ < x < -1, y″ < 0, кривая выпуклая

-1 < x < 0, y″ > 0, кривая вогнутая

0 < x < 1, y″ < 0, кривая выпуклая

1 < x < $\sqrt{3}$, y″ > 0, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

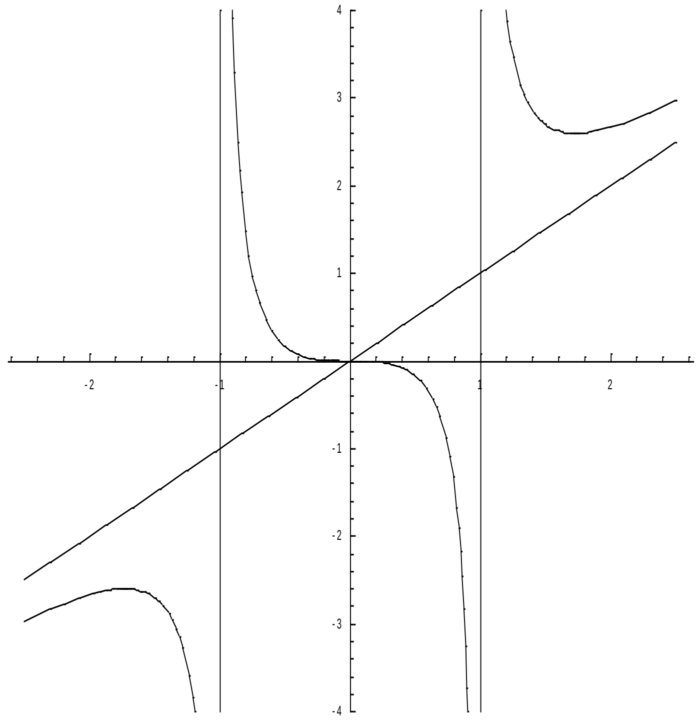
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.

Построим *график* функции:



Понятие экстремумов функции двух переменных вводится подобно тому, как это было сделано для функции одной переменной.

Определение. *Точками экстремума функции двух переменных* называются точки минимума и максимума этой функции. Значения самой функции в точках экстремума называются *экстремумами функции двух переменных*.

Определение. Точка $P(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума функции двух переменных* $z = z(x, y)$, если значение функции в этой точке больше, чем в точках её окрестности. Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции двух переменных*.

Определение. Точка $P(x_0, y_0)$ называется *точкой максимума функции двух переменных* $z = z(x, y)$, если значение функции в этой точке больше, чем в точках её окрестности. Значение функции в точке максимума *называется максимумом функции двух переменных*.

Теорема (необходимый признак экстремума функции двух переменных). Если точка $P(x_0, y_0)$ - точка экстремума функции двух переменных $z = z(x, y)$, то первые частные производные функции (по "иксу" и по "игреку") в этой точке равны нулю или не существуют:

$$z'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ или } z'_x(x_0, y_0) \text{ не существует}$$

$$z'_y(x_0, y_0) = 0 \text{ или } z'_y(x_0, y_0) \text{ не существует}.$$

<u>Определение.</u> Точки, в которой первые частные производные функции двух переменных равны нулю, называются *стационарными точками*.

<u>Определение.</u> Точки, в которой первые частные производные функции двух переменных равны нулю или не существуют, называются *критическими точками*.

Как и в случае с функцией одной переменной, необходимое условие существования экстремума функции двух переменных не является достаточным. Встречаются немало функций, в случаях которых первая частная производная функции равна нулю или не существует, но экстремумов в соответствующих точках нет. *Каждая точка экстремума является критической точкой, но не каждая критическая точка является экстремумом*.

Наибольший интерес представляет алгоритм нахождения экстремумов функции двух переменных, так как он, во-первых, отличается от алгоритма нахождения экстремумов функции одной переменных, а во-вторых, по аналогии с ним можно составить алгоритм нахождения функции трёх переменных.

Дана функция двух переменных $z = z(x;\ y)$.

Шаг 1. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Шаг 2. Составляем систему уравнений из равенств этих производных нулю (их равенство нулю и есть необходимый признак существования экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Решения этой системы уравнений $(x_k;\ y_k)$ являются точками возможного экстремума - критическими точками.

Шаг 3. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ является критической точкой, найденной на шаге 2. Чтобы убедиться, что в ней существует экстремум функции двух переменных, находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

как частные производные от частных производных первого порядка, найденных на шаге 1.

Шаг 4. Присваиваем частным производным второго порядка, найденным на шаге 3, буквенные обозначения:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0;\ y_0) = A,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0;\ y_0) = B,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0;\ y_0) = C.$$

Находим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ и проверяем достаточный признак существования экстремума.

Если $\Delta < 0$, то экстремума в найденной критической точке нет,

если $\Delta > 0$, то экстремум в найденной критической точке есть,

если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Если экстремум в найденной точке есть и если $A > 0$, то в этой точке существует минимум функции двух переменных, если $A < 0$, то максимум.

Шаг 5. Подставляем значения критической точки, в которой найден экстремум, в исходную функцию двух переменных $z = z(x;\ y)$ и получаем значение экстремума функции двух переменных (минимума или максимума).

Примеры начнём с более сложного, в котором составленная система уравнений имеет несколько решений, а, значит, найдено несколько критических точек.

Пример. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Решение. Следуем изложенному выше алгоритму.

Шаг1. Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$.

Шаг 2. Составляем систему уравнений из равенств этих производных нулю:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Делим первое уравнение системы на 3, а второе на 6 и получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $y = \frac{2}{x}$, подставляем в первое уравнение и получаем

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0$$

Умножаем это уравнение на x^2 и получаем

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Производим замену переменной: $x^2 = t$ и получаем

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение: $t_1 = 1;\ t_2 = 4$.

Так как $x^2 = t$ и $y = \frac{2}{x}$, то

$$x_1 = 1;\ y_1 = 2 \ \Rightarrow M_1(1;\ 2)$$
$$x_2 = -1;\ y_2 = -2 \ \Rightarrow M_2(-1;\ -2)$$
$$x_3 = 2;\ y_3 = 1 \ \Rightarrow M_3(2;\ 1)$$
$$x_4 = -2;\ y_4 = -1 \ \Rightarrow M_4(-2;\ -1)$$

Таким образом, получили четыре критических точки - точки возможного экстремума.

Шаг 3. Находим **частные производные второго порядка**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = C,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = B.$$

Шаг 4. Находим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$:

$M_1(1;\ 2) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -108 < 0$, т. е. экстремума в найденной критической точке нет,

$M_2(-1;\ -2) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = -108 < 0$, т. е. экстремума в найденной критической точке нет,

$M_3(2;\ 1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ и $A = 12 > 0$, т. е. в найденной критической точке есть минимум функции двух переменных,

$M_4(-2;\ -1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ и $A = -12 < 0$, т. е. в найденной критической точке есть максимум функции двух переменных.

Шаг 5. Подставляем значения критической точки, в которой найден экстремум, в исходную функцию двух переменных и получаем значения экстремума функции двух переменных:

$M_3(2;\ 1) \Rightarrow z_{\min} =$
$= 2^3 + 3 \bullet 2 \bullet 1^2 - 15 \bullet 2 - 12 \bullet 1 = -28$,

$M_4(-2;\ -1) \Rightarrow z_{\max} =$
$= (-2)^3 + 3 \bullet (-2) \bullet (-1)^2 -$
$-15 \bullet (-2) - 12 \bullet (-1) = 28.$

Задания к практическому занятию

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y = \frac{x^3+16}{x}$ 3. $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y = \frac{x^2+1}{x}$ 7. $y = \frac{2x+1}{x^2}$ 8. $y = \frac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y = \frac{x}{3-x^2}$ 10. $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ 12. $y = \frac{x^2+16}{2x}$

Вопросы к практическому занятию

1. Назовите Достаточное условие монотонности функции.
2. Классифицируйте точки разрыва функции.
3. Сформулируйте правило нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремума.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия выпуклости и вогнутости.

6. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?

7. Классифицируйте асимптоты графика функции.

8. Сформулируйте алгоритм общей схемы исследования функций.

Практическое занятие № 9.

Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле.

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$

5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	ln $\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	arcsin $\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^{\alpha}dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx.$

Замена $t = x^2+1;\quad dt = 2xdx;\quad dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C = \frac{t^{5/2}}{5}+C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu\ ;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2\sin x dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x\cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$
$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2}x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$
$$= -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2x dx; & v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int\frac{1}{5}e^{5x}2x dx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$
$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \frac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$
$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}}=\{dx=d(x+1)\}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}}=\{x+1=t\}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{3}+C=\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x; & dv=\dfrac{1}{x^3}dx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=-\dfrac{1}{2x^2}; \end{array}\right\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

Пример.

$$\int x\ln x dx=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=\dfrac{x^2}{2}; \end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx=\left\{t=e^{\cos^2 x};\quad dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\}=-\int dt=-t+C=$$

$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Задания к практическому занятию

1. Вычислить неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int (x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$ 4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^5}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$ 6. а) $\int \sqrt{1-5x}dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int x\,arctgx\,dx$ 8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}dx$; б) $\int (1-x)\sin 3x dx$ 10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4x dx$ 12. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

2. Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+3}}dx$.

2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$.

3. $\int \frac{x+2}{5x^2+3}dx$.

4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^2}dx$.

5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}dx$.

6. $\int (3+2e^x)^5 e^x dx$.

7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^2 x}dx$.

8. $\int \frac{x(2+x^2)}{1+x^4}dx$.

9. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3}dx$.

10. $\int \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Вопросы к практическому занятию

1. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
2. Как записать всю совокупность первообразных функций?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
5. Как проверить результат интегрирования?
6. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
7. Что такое интегральные кривые? Как они расположены относительно друг друга? Могут ли они пересекаться?

Практическое занятие № 10.

Интегрирование методом подведения под знак дифференциала.

Интегрирование простейших рациональных дробей.

При сведении данного интеграла к табличному, часто используются следующие преобразования дифференциала (*операция подведение под знак дифференциала*).

$d(u+C)=du$, $\quad Cdu=d(Cu)$,

$udu=\frac{1}{2}d(u^2)$, $\quad \cos udu=d(\sin u)$,

$\sin udu=-d(\cos u)$, $\quad \frac{1}{u}du=d(\ln u)$,

$e^u du=d(e^u)$, $\quad \frac{1}{\cos^2 u}du=d(tgu)$

Пример. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x+3}$, б) $\int (3x-1)^{24}dx$, в) $\int \sin^2 6xdx$.

Решение:

а) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$,

б) $\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \int (3x-1)^{24} d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$,

в) $\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1-\cos 12x) dx = \frac{1}{2} \int 1 dx - \frac{1}{2} \int \cos 12x dx =$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos 12x d(12x) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} x - \frac{1}{24} \sin 12x + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Правило интегрирования рациональных дробей:

1. Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Если дробь правильная, представить дробь в виде суммы простейших рациональных дробей, разложив знаменатель дроби на множители.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$

Под знаком интеграла неправильная дробь. Выделим целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad + 4x + 4 \\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} \\ x - 2 \quad - L(x) \end{array} \\ \quad -\begin{array}{l} -2x^4 \\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \end{array} & \\ \qquad 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - R(x) & \end{array}$$

Получаем

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$ на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}=$$

$$=\frac{Ax\cdot\left(x^2+2x+2\right)+B\cdot\left(x^2+2x+2\right)+\left(Cx+D\right)\cdot x^2}{x^4+2x^3+2x^2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+(2B)}{x^4+2x^3+2x^2}$$

$$4x^3+4x^2+4x+4=(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+(2B)$$

$$\begin{cases}A+C=4\\2A+B+D=4\\2A+2B=4\\2B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=2\\C=4\\D=2\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

Таким образом, подынтегральная функция примет вид:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

Интегрируем полученное равенство

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=$$

$$=\int xdx-\int 2dx+\int\frac{2}{x^2}dx+\int\frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=\begin{bmatrix}t=x+1\\x=t-1\\dt=dx\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4t-4+2}{t^2+1}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\int\frac{t}{t^2+1}dt-2\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+4\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-2arctg\,t=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left(x^2+2x+2\right)-2arctg\,(x+1)+C$$

.

Задания к практическому занятию

Вычислить следующие интегралы:

1	$\int \sin x \cos x dx$	6	$\int \sin 2x \cos x dx$
2	$\int \sin x \cos 2x dx$	7	$\int \frac{3x+4}{3x+2} dx$
3	$\int \frac{x^2+5}{x+2} dx$	8	$\int \frac{2x^2+2x+7}{x+3} dx$
4	$\int \sqrt[3]{1+2x} dx$	9	$\int 8 \cdot \sqrt[7]{1-7x} dx$
5	$\int 5 \cdot \sqrt[3]{(3x+5)^2} dx$	10	$\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие неопределенного интеграла.
2. Запишите таблицу неопределенных интегралов.
3. Назовите этапы интегрирования рациональных дробей.

Практическое занятие № 11.
Вычисление определённых интегралов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b-$ выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка $c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Сумма вида $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$ т.е. переменную интегрированияможно обозначить любой буквой,
4. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$
5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$
7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0;$ если $f(x) \leq 0$ для всех точек $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$,
8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$
9. Если $M -$наибольшее, $m -$ наименьшее значение $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$

10. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), c \in [a;b]$ (теорема о среднем),

11. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx,$

12. $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$.

Если для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то удобным методом для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ является *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b)$$.

При применении формулы Ньютона–Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую наиболее простой вид при $C=0$.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^\pi \sin x dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$$.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подинтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задания к практическому занятию

1.Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница

1. $\int_a^b e^x dx$. 2. $\int_a^b x^m dx$. 3. $\int_a^b \boldsymbol{\sin(}x\boldsymbol{)}dx$. 4. $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$. 5. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

6. $\int_a^b \frac{1}{\sin^2(x)}dx$. 7. $\int_a^b C^x dx$. 8. $\int_a^b \frac{1}{x}dx$. 9. $\int_a^b \cos(x)dx$. 10. $\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

11. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$. 12. $\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)dx$. 13. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+x^2\right)dx$.

14. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t}dt$. 15. $\int_1^e \left(\frac{\boldsymbol{lg(}z\boldsymbol{)}+1}{z}\right)dz$. 16. $\int_0^1 \boldsymbol{(}1+t\boldsymbol{)}^3 dt$.

17. $\int_{-1}^1 \frac{(x-1)^3}{x}dx$. 18. $\int_0^{2\pi} \left(\boldsymbol{cos(}x\boldsymbol{)}+\boldsymbol{sin(}x\boldsymbol{)}\right)dx$. 19. $\int_2^4 \left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$.

2.В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

1. $\int_0^1 (5x-2)^4 dx.$ 2. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx.$ 4. $\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}dx.$ 5. $\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

1. $\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ 2. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ 3. $\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ 4. $\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ 5. $\int_0^{\pi} \left(x^2+2\right)\cos x dx.$

1. $\int_0^{\pi/4} \sin 2t\cdot dt.$ 2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 3. $\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ 4. $\int_{-2}^2 \sqrt{x+2}dx.$ 5. $\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

1. $\int_0^1 e^{3x}dx.$ 2. $\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ 3. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ 4. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ 5. $\int_{\pi}^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

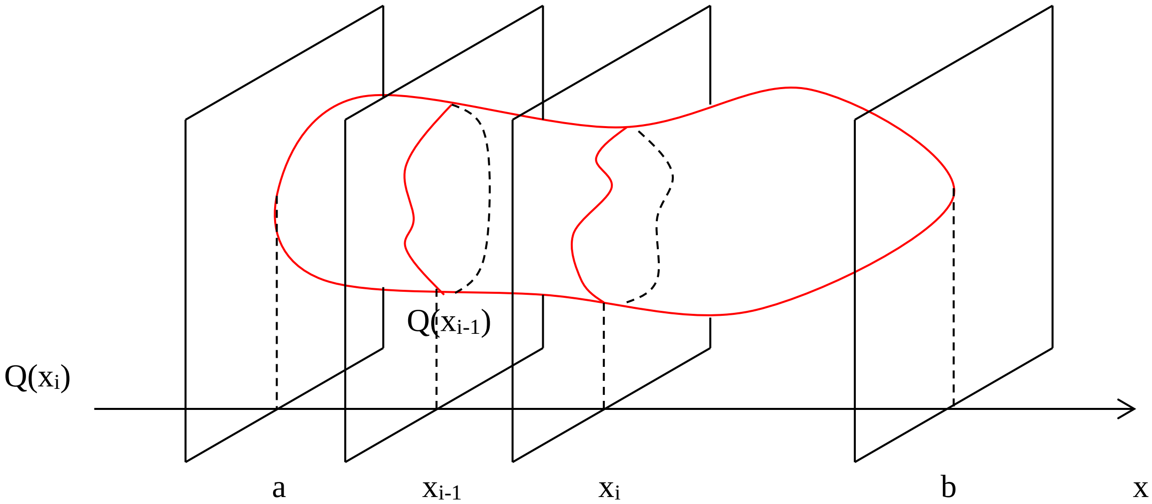
Вопросы к практическому занятию

1. Сформулируйте понятие определенного интеграла.
2. Перечислите свойства определенного интеграла.
3. Какова геометрическая интерпритация определенного интеграла?
4. Запишите Формулу Ньютона – Лейбница.
5. Перечислите приемы вычисления определенных интегралов.

Практическое занятие № 12.

Приложения определённого интеграла. Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

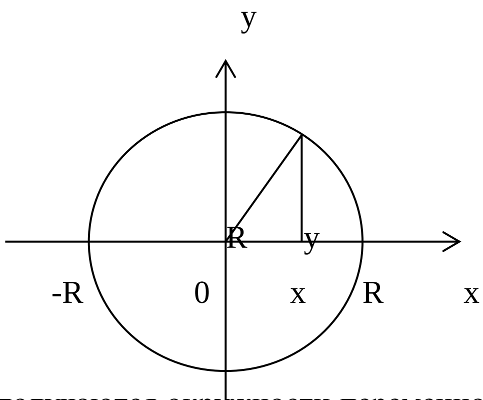
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



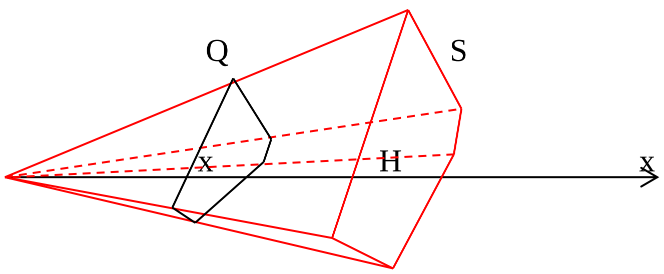
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пример: Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

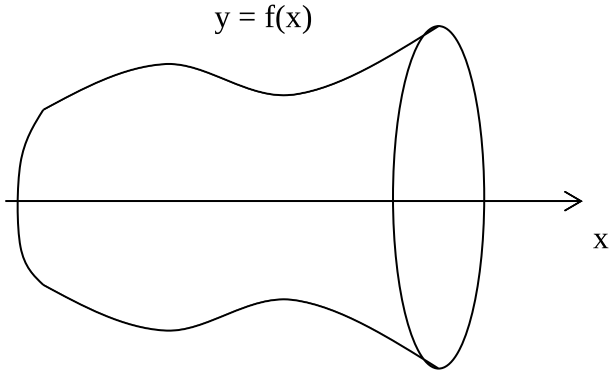
$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx = \frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH$

Объем тел вращения.

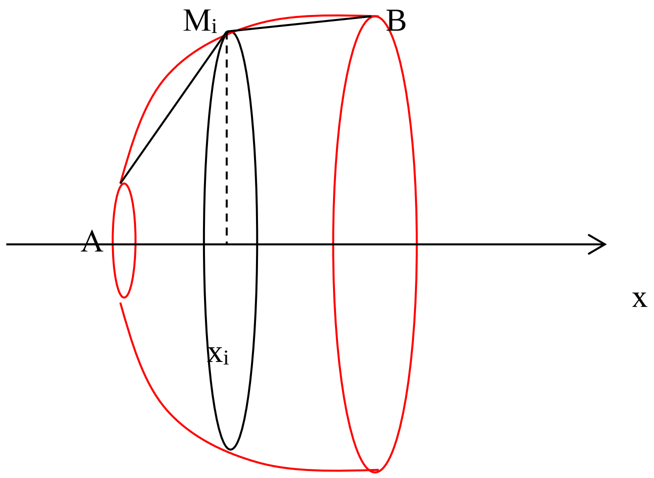
Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности тела вращения.



Определение: Площадью поверхности вращения кривой АВ вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую АВ, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу АВ на n частей точками M_0, M_1, M_2, … , M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Получаем: $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна:

$$P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ - формула вычисления площади поверхности тела вращения.

Задания к практическому занятию

1.Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох линии заданной уравнением, и ограниченного плоскостями перпендикулярными оси OX

$y = 4x - x^2$, y=x.

$y^2 = 2x$, x=1.

$y^2 = 8x$, 1≤x ≤2.

$y = 4 - x^2$, y=0, x=0, где x≥0.

$y = x^3$, y=1, x=0.

$x^2 + y^2 = 9$.

$y = x^2$, $y^2 = x$.

$x^2 - y^2 = 9$, x-2y+6=0.

$y = x^2 + 1$, y=0,x=1,x=2.

$y = \cos(2x)$, y=0, x=0, где 0≤x ≤π/4.

2.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y=4-x^2$, y=0.
2. $y^2=2px$, x=h.
3. y=ln(x), x=c, y=0.
4. $y=x^2$, $y=2-x^2$.
5. $y=x^2$, y=1.
6. $y=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, y=0,x=0, x=π/4.
7. y=|x|+1, y=0, x=-2, x=1.
8. y=sin(x), $y=x^2-\pi x$.
9. $x^2-y^2=1$, x=2.
10. $y=x^2$, $y=x^{1/2}$.

3.Найти длину дуги кривой

1. $y = x^{3/2}$ от x=0 до x=4.
2. $y = x^2 - 1$, отсеченный осью Ох.
3. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln(x)$ от x=1 до x=e.
4. $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$ от x=-1 до x=2.
5. $y = x^2$ от x=0 до x=2.
6. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$, 0≤t≤π/2.
7. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, 0≤φ ≤2π.
8. $y = e^x + e^{-x}$ от x=0 до x=1.
9. $y = \sin x$, y=0, 0≤x ≤π.
10. $x^2 + y^2 = 16$.

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое определенный интеграл?
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
3. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

Практическое занятие №13.

Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости (расходимости) интегралов

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования $[a,b]$ - конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, называют еще *собственным интегралом*.

Рассмотрим так называемые *несобственные интегралы*, т.е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом первого рода* и обозначают: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$ где c – произвольное число.

При этом интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа. Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, то расходится и интеграл слева.

<u>Пример.</u> Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: а) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, б) $\int_{-\infty}^{0}\cos x dx$, в) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$.

Решение:

а) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b} = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1.$$

б) $$\int_{-\infty}^{0}\cos x dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{a}^{0}\cos x dx = \lim_{a\to+\infty}\sin x\Bigg|_{a}^{0} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty}(\sin 0 - \sin a) = 0 - \lim_{a\to+\infty}\sin a.$$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\sin a$ - не существует. Следовательно, интеграл расходится.

в) $$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln b = \infty$$, интеграл расходится.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом второго рода* и обозначают: $\int_{a}^{b} f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ - *сходится*. Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ - *расходится.*

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(a,b]$, т.е. функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если функция терпит разрыв во внутренней точке с отрезка $[a,b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называется сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла, стоящих справа.

<u>Пример.</u> Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{0+\varepsilon}^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Задания к практическому занятию

1.Вычислить несобственный интеграл или показать его расходимость:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$$

2. Вычислить определённый интеграл. Для несобственных интегралов решить вопрос об их сходимости или расходимости:

$$\int_{0}^{1}\frac{xdx}{1+x^4}$$

$$\int_{4}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$$

$$\int_{0}^{5}x^2\sqrt{25-x^2}dx$$

$$\int_{1}^{7}\frac{xdx}{\sqrt{2x+2}}:$$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие несобственных интегралов.
2. Каковы критерии сходимости (расходимости) интегралов?

Практическое занятие № 14.

Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z=a+ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2=-1; \qquad i=\sqrt{-1}.$$

При этом число a называется **действительной частью** числа z (a = $Re\ z$), а b- **мнимой частью** (b = $Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Действия с комплексными числами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

3)Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной форме комплексного числа.

Комплексное число $z = a + b\,i$ изображается в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + b\,i$. Угол φ между действительной осью *Ox* и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z \neq 0$ (рис. 1).

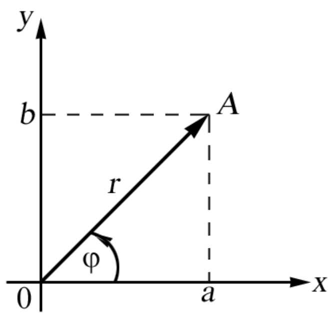


Рис. 1

Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по движению часовой стрелки – отрицательной. Аргумент φ комплексного числа $z = a + b\,i$ записывается так: $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg\ (a + b\,i)$.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент комплексного числа определяется однозначно, если область его изменения ограничить промежутком величины 2π. В качестве такого промежутка принято брать один из следующих промежутков $[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента z называется главным значением аргумента $\arg z$. Так как аргумент z определяется с точностью до слагаемого $k \cdot 2\pi$, то $\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Из рисунка видно, что $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$,

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, r \geq 0,\quad \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\varphi,\ \ \varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}.$$

Запишем формулы для вычисления главного значения аргумента, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi]$:

$$\arg z = \arg(a + b\,i) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}, & a > 0,\quad b \geq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0,\quad b > 0; \\ \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0,\quad b < 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a = 0,\quad b < 0; \\ \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi, & a > 0,\quad b < 0. \end{cases}$$

Для представления комплексного числа $z = a + b\,i$ **в тригонометрической форме необходимо найти**:

1) модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; изобразить точку $a + b\,i$ и выбрать нужное значение аргумента этого числа;

$$\boxed{\frac{b}{a} = \text{tg}\varphi, \ \ \varphi = \arg z = \text{arctg}\frac{b}{a}}$$

2) записать $z = a + b\,i$, воспользовавшись соотношением. Получаем тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = a + b\,i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

<u>Пример.</u> Записать комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме нужно знать его модуль и аргумент, $|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2.$

Затем подсчитываем главное значение аргумента $z = 1 + i\sqrt{3}$. Вещественная и мнимая части данного комплексного числа положительны ($a = 1,\ b = \sqrt{3}$). По формуле главное значение аргумента совпадает с $\arg z = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}.$

Тогда $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$

<u>Пример.</u> Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -5.$

Данное число является вещественным и отрицательным, а главное значение его аргумента равно π. Подсчитаем модуль числа

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Модуль и аргумент числа –5 найдены, по формулам имеем $z = -5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.

<u>Пример.</u> Найти аргумент числа $z = -3 - i\sqrt{3}.$

Решение. Вещественные и мнимые части данного числа отрицательны и по формуле главное значение аргумента его совпадает с

$$\text{arctg}\frac{b}{a} + \pi = \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-3} + \pi = \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi.$$

Следовательно, $\arg\left(-3-i\sqrt{3}\right)=\frac{7}{6}\pi+2\pi n$.

Задания к практическому занятию

Выполнить действия:

1. $(5-4i)+(7+2i)$.
2. $(5-4i)+(7+4i)$.
3. $(-6+2i)+(-6-2i)$.
4. $(1-i)-(7-3i)+(6-2i)-(2+i)$.
5. $(-2-i)\cdot(1+i)$.
6. $(5-4i)\cdot(3+2i)$.
7. $\frac{1}{1-i}$.
8. $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$.
9. $\frac{3-2i}{1+3i}$.

10. Найти модуль и аргумент числа $\frac{8+2i}{5-3i}$.

11. Представить в алгебраической форме число $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

12. Представить в тригонометрической форме числа:

1. $z_1=2-3i$
2. $z_2=1+4i$
3. $-7i$
4. $9+7i$
5. $-i$
6. $(2-i)+(3+2i)$

Вопросы к практическому занятию

1. Какое число называется мнимой единицей?
2. Назвать комплексные числа в алгебраической форме?
3. Перечислить действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Назвать геометрический образ комплексного числа?
5. Назвать комплексные числа в тригонометрической форме?
6. Какое значение аргумента называется главным?

Практическое занятие № 15.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

При умножении двух или нескольких чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

При делении двух комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя, а аргумент знаменателя вычитается из аргумента числителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

При возведении комплексного числа в целую положительную степень модуль его возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени, т. е.

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $n \in N$. Эта формула называется формулой Муавра.

Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где k = 0, 1, 2,…, n–1.

Пример. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, где

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}.$$

Пример. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, где

$$z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример. Найти частное чисел z_1 и z_2, где

$$z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$z_1 : z_2 = \frac{10}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0+i) = 5i.$$

Пример. Найти z^6, где $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Возводим в шестую степень z:

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 = 2^6\left[\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = 2^6(-1 + i\cdot 0) = -2^6.$$

Пример. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}.$$

Поскольку $z = a + ib$, имеем

$$(1-i)z - i = (a+ib)(1-i) - i = (a+b) + (b-a-1)i\,.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа

$$|(a+b)+(b-a-1)i| = \sqrt{(a+b)^2+(b-a-1)^2} = \sqrt{2a^2+2b^2+2a-2b+1}.$$

По условию

$$\sqrt{2} < \sqrt{2a^2+2b^2+2a-2b+1} < 2\sqrt{2}\text{, или}$$

$$2 < 2a^2+2b^2+2a-2b+1 < 8,$$

$$1 < a^2+b^2+a-b+0{,}5 < 4\,.$$

Выделяя полные квадраты по a и b, получим

$$1 < (a+0{,}5)^2 + (b-0{,}5)^2 < 4.$$

Это неравенство представляет собой внутренность кольца (рис. 2), т. к. левая часть двойного неравенства – область, лежащая вне круга радиусом 1 с центром в точке C (–0,5; 0,5), правая часть – круг с центром в точке C и радиусом, равным 2 (границы окружностей в область не входят, поэтому они изображены пунктиром).

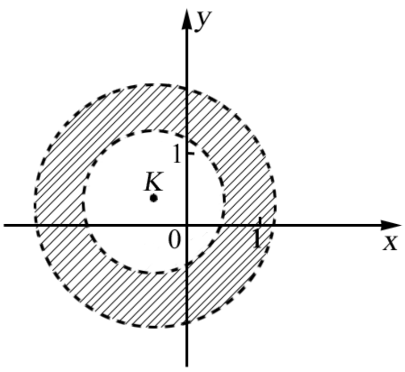


Рис. 2

Задания к практическому занятию

1. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$,

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \qquad z_2 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

2. Найти частное чисел z_1 и z_2, где

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

3. Возвести в степень $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$.

4. Извлечь корень $\sqrt{i}$.

5. Решить на множестве комплексных чисел уравнение $4x^2-8x+13=0$.

6. Выполнить действия $\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}$.

7. Найти мнимую часть комплексного числа $z=\dfrac{3-2i}{1-4i}+i^9$.

8. Найти действительную часть комплексного числа $z=\dfrac{(2-i)^3}{3+4i}$.

9. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $2\le|z-2-i|\le 3,\ \ 0\le \operatorname{Im} z<3$.

10. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $|z|<2$.

11. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$.

Вопросы к практическому занятию

1. Какое число называется мнимой единицей?
2. Назвать геометрический образ комплексного числа?
3. Назвать комплексные числа в тригонометрической форме?
4. Назвать действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме?
5. Записать формулу, по которой осуществляется возведение комплексного числа в целую положительную степень.

Практическое занятие №16.
Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени

Определение. Уравнение называется *дифференциальным*, если оно содержит независимую переменную x, неизвестную функцию $y=f(x)$ и ее производные или дифференциалы.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от одной независимой переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если же неизвестная функция зависит от нескольких независимых переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Определение. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение называют *порядком данного уравнения*.

В общем виде дифференциальные уравнения 1-го порядка записываются в виде:

$F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x; y)$.

Определение. *Решением* (или интегралом) *дифференциального уравнения* называется функция $y = f(x)$, если при подстановке ее и ее производных, дифференциальное уравнение обращается в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*.

Определение. График функции $y = f(x)$ являющейся решением дифференциального уравнения, называют *интегральной кривой*.

Основная задача интегрального исчисления заключается в нахождении решения ДУ $y' = f(x)$, т.е. $y = \int f(x)dx + C$.

Решения дифференциального уравнения подразделяются на: 1) общее решение, 2) частное решение.

Определение. *Общим решением* ДУ $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называется такое решение $y = f(x, C_1, C_2, \dots C_n)$, которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_i,\ i = \overline{1, n}$, каков порядок этого ДУ.

Определение. Если общее решение представлено в виде $\hat{O}(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0$, то оно называется *общим интегралом* ДУ.

Определение. Всякое решение ДУ, которое получается из общего при определенных значениях произвольных постоянных, называется *частным решением* этого ДУ.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в дифференциальной форме:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$,

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - известные функции. Это уравнение удобно тем, что переменные *x* и *y* в нем равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами.

Пример. Найти решения ДУ $y' = 2x$.

Легко догадаться, что решением данного уравнения является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \sqrt{3}$ и вообще $y = x^2 + c$, где c – const.

Определение. Уравнение вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$, где $P(x)$ и $Q(y)$ – данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными*.

Это уравнение можно переписать в виде $P(x)dx = -Q(y)dy$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием:

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$ - общий интеграл.

Пример. Решить уравнение $2ydy = 3x^2dx$.

Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int 2ydy = \int 3x^2dx,$$

$$y^2 = x^3 + C,$$

$$y = \sqrt{x^3 + C}.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx,$ если $y = 4$ при $x = 1$.

Интегрируя левую и правую части имеем

$$\int dy = \int (x^2 - 1)dx,$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + C,$$

$$4 = \frac{1}{3} - 1 + C.$$

Отсюда $C = \dfrac{14}{3}$.

Итак, получаем ответ: $y = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{14}{3}$.

Определение. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется линейным, если его можно записать в виде $y' + p(x) \cdot y = g(x)$,

где $p(x), g(x) -$ некоторые (непрерывные) функции переменной *x*, в частности – постоянные.

Особенность этих ДУ заключается в том, что искомая функция у и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

Существуют два метода решения уравнений вида $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ - метод И. Бернулли и метод Лагранжа.

Пример. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

*Р*азделим левую и правую части уравнения $xy' - 2y = 2x^4$ на *x*, получим линейное неоднородное уравнение

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3.$$

Пусть $y = uv$, т.е. $y' = u'v + uv'$, тогда уравнение $y' - \dfrac{2}{x} y = 2x^3$ примет вид

$$u'v + uv' - \frac{2}{x} uv = 2x^3, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x} v\right) = 2x^3.$$

Положим

$$v' - \frac{2}{x} v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} v, \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}.$$

Найдем какое – либо частное решение этого уравнения, например, при $c = 1$

$$\ln|v| = 2\ln|x|,$$

$$v = x^2.$$

При $v=x^2$ равенство $u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=2x^3$ обратится в уравнение

$u'x^2=2x^3$,

$\frac{du}{dx}=2x$,

$du=2xdx$,

$\int du=2\int xdx$,

$u=x^2+c$.

Тогда окончательно имеем

$y=uv=\left(x^2+c\right)x^2=x^4+cx^2.$

Пример. Решить уравнение $y'+2xy=2x$.

$y'+2xy=0$, $\frac{dy}{dx}=-2xy$, $\frac{dy}{y}=-2xdx$, $y=c\cdot e^{-x^2}$.

Заменяем c на $c(x)$, т.е. решение дифференциального уравнения $y'+2xy=2x$ ищем в виде

$y=c(x)\cdot e^{-x^2}$.

Имеем

$y'=c'(x)\cdot e^{-x^2}+c(x)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$.

Тогда

$c'(x)\cdot e^{-x^2}-2xc(x)\cdot e^{-x^2}+2xc(x)\cdot e^{-x^2}=2x$,

$c'(x)\cdot e^{-x^2}=2x\Rightarrow$ $c(x)=\int 2xdx$,

$c(x)=e^{x^2}+c$.

Поэтому

$y=\left(e^{x^2}+c\right)\cdot e^{-x^2}$ или $y=1+c\cdot e^{-x^2}$ - общее решение уравнения.

Задания к практическому занятию

1. Найти общие решения уравнений

1)$xydx=(1+x^2)dy$

2) $(x^2-yx^2)dy+(y^2+xy^2)dx=0$

3) $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$; $y = 2$ при $x = 0$

2) $(1+y)dx = (1-x)dy$; $\quad y = 3$ при $x = -2$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте понятие дифференциального уравнения и его порядка.
2. Дайте определение решения обыкновенного дифференциального уравнения.
3. Что называется общим решением дифференциального уравнения y'= f (x, y).
4. Приведите примеры линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.
5. Запишите общий вид уравнения Бернулли.

Практическое занятие №17.
Уравнения с разделяющимися переменными. Однородное дифференциальное уравнение

<u>Определение.</u> Уравнение вида $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$, где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ – заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной x окажутся в одной части равенства, а переменная y - в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства. Это легко сделать путем почленного деления уравнения на $Q_1(y)P_2(x) \neq 0$. Получаем

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0,$$

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = c \text{ - общий интеграл.}$$

Замечания. 1. При проведении почленного деления дифференциального уравнения на $Q_1(y)P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, *– особые решения*.

Пример. Решить уравнение $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$$

и разделим обе части его на $xy\neq 0$:

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0.$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0,$$

$$x+\ln|x|+\ln|y|-y=c,\quad \text{т.е. } \ln|xy|+x-y=c.$$

Здесь уравнение $Q_1(y)P_2(x)=0$ имеет вид $xy=0$. Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями данного дифференциального уравнения, но не входят в общий интеграл. Значит, решения $x=0$, $y=0$ являются особыми.

Пример. Решить уравнение $y'=-\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4)=1$.

Имеем: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$$\ln y=\ln c-\ln x,$$

т.е. $y=\frac{c}{x}$ - общее решение ДУ, подставив в него $x=4, y=1$, получим

$$1=\frac{C}{4},\quad C=4.$$

Получаем $y=\frac{4}{x}$ - частное решение уравнения $y'=-\frac{y}{x}$.

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка. Понятие однородного дифференциального уравнения связано с однородными функциями.

Определение. Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если приумножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т.е.

$$f(\lambda\cdot x.\lambda\cdot y)=\lambda^n f(x,y).$$

Пример. Проверить является ли функция $f(x, y) = x^2 - 2xy$ однородной.

Согласно определения однородной функции имеем:

$$f(\lambda \cdot x \lambda \cdot y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (x^2 - 2xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Получили, что данная функция - однородная, второго порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Уравнение $y' = f(x, y)$ может быть представлено в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Например, уравнение $y' = \frac{y}{x} \cos \ln \frac{y}{x}$ - однородное.

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной (подстановки)

$$\frac{y}{x} = u \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad y = u \cdot x.$$

Однородное дифференциальное уравнение часто задается в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Это дифференциальное уравнение будет однородным, если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$- однородные функции одного порядка.

Переписав уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x; y)}{Q(x; y)},$$

и применив в правой части преобразование, рассмотренное выше, получим уравнение $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{x + 2y}{x}$.

Так как $\frac{x + 2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$, то уравнение $y' = \frac{x + 2y}{x}$ имеет вид $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ при $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + 2\frac{y}{x}$..

Положим $u = \frac{y}{x}$, тогда

$$\varphi(u) - u = 1 + 2u - u = 1 + u$$

и, согласно

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

имеем

$$\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|1+u|=\ln|x|+C_1 \quad \Rightarrow \quad |1+u|=e^{C_1}|x|$$

или

$$1+u=Cx, \quad \text{где} \quad C=\pm e^{C_1}.$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим

$$1+\frac{y}{x}=Cx \quad \Rightarrow \quad y=(Cx-1)x.$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения $\left(x^2-y^2\right)\cdot dx+2xy\cdot dy=0$.

Данное уравнение однородное, т.к. функции $P(x,y)=x^2-y^2$ и $Q(x,y)=2xy$ - однородные функции второго порядка.

Положим $y=u\cdot x$. Тогда $dy=xdu+udx$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\left(x^2-u^2x^2\right)\cdot dx+2x\cdot ux\cdot x\cdot du+2x\cdot ux\cdot u\cdot dx=0,$$

$$x^2\left(1-u^2+2u^2\right)\cdot dx+2ux^3\cdot du=0,$$

$$\left(1+u^2\right)\cdot dx+2ux\cdot du=0.$$

Последнее уравнение – уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{1+u^2}\cdot du=0.$$

Интегрируем полученное уравнение

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2u}{1+u^2}\cdot du=c,$$

$$\ln|x|+\ln\left|1+u^2\right|=c_1,$$

$$\ln\left|x\cdot\left(1+u^2\right)\right|=c_1,$$

$$x\cdot\left(1+u^2\right)=e^{c_1}.$$

Обозначим $c=e^{c_1}$, $c>0$. Тогда

$$x\cdot\left(1+u^2\right)=c.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем $x^2 + y^2 = cx$ - общий интеграл уравнения.

Задания к практическому занятию

1. Найти общие решения уравнений

1)$y^2dx + (x-2)dy = 0$

2) $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$

3) $\sqrt{1-x^2}dy - x\sqrt{1-y^2}dx = 0$

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; $y = 4$ при $x = 0$

2) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$; $\quad y = 1$ при $x = 1$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Какие уравнекния называются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.
3. Приведите примеры дифференциальных уравнений y'= f (x, y), однородных относительно x и y.

Практическое занятие №18.

Графический метод решения задачи линейного программирования.

Линейное программирование – метод решения задач оптимизации. Таким образом, общая задача линейного программирования – это задача, в которой требуется найти максимум или минимум (оптимум) функции, называемой функцией цели, при ограничениях, заданных системой линейных неравенств или уравнений.

Требуется найти неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \le b_n \end{cases}$$

при которых линейная форма $F = c_1x_1 + c_2x_2$ принимает оптимальное значение.

Схема решения задач линейного программирования графическим методом

1. Построить многоугольник решений системы неравенств.

2. Начертить из семейства прямых, соответствующих линейной форме, линию равных значений функции цели. Для построения линии равных значений придадим F некоторое числовое значение. Во многих задачах удобно принять, что F =1. Тогда получим $c_1x_1 + c_2x_2 = 1$. Запишем это уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{c_1}} + \frac{x_2}{\frac{1}{c_2}} = 1.$$

Затем, откладывая на оси x_1 число $\frac{1}{c_1}$, а на оси x_2 - число $\frac{1}{c_2}$, найдём точки пересечения линии равных значений с осями координат. Прямая, проведённая через эти точки, и есть требуемая прямая.

3. Двигать прямую (или линейку) вдоль градиента - вектора $\vec{c}$ параллельно линии равных значений в сторону многоугольника решений до соприкосновения с многоугольником решений. Если первая встреча с многоугольником решений произойдёт в крайней точке с координатами $(x_1', \ x_2')$, то в этой точке функция цели достигает минимального значения. Если первая встреча произойдёт со стороной многоугольника, то данная функция цели достигает минимума во всех точках этой стороны.

4. Двигаясь дальше, придём к некоторому опорному положению, когда прямая будет иметь одну общую точку $(x_1'', \ x_2'')$ с многоугольником решений. В этой точке функция цели достигает своего максимума.

5. Если первоначально построенная линия равных значений пересекает многоугольник решений, то функция цели достигает минимального значения в вершине многоугольника, расположенной ближе к началу координат, а максимального значения - в вершине, более удалённой от начала координат.

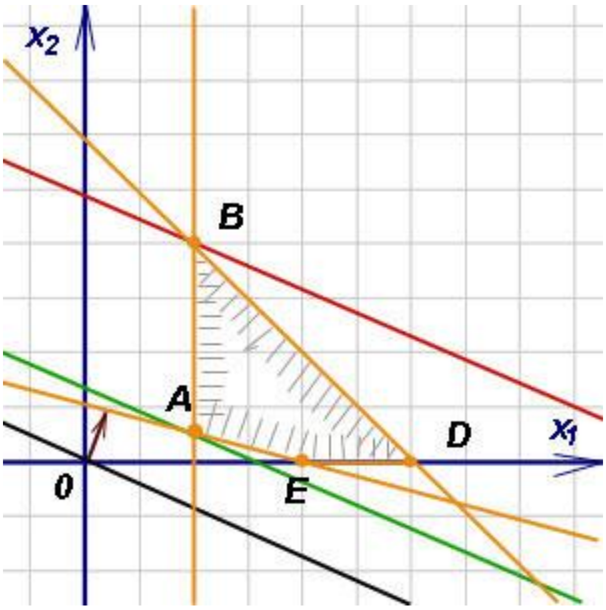
Пример. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум функции $F = x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \qquad \ge 2 \\ \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Построим многоугольник решений. Для этого начертим граничные прямые. Из первого неравенства запишем уравнение $x_1 + 4x_2 = 4$. Это уравнение первой граничной прямой. Найдём точки пересечения этой прямой с осями координат. При $x_2 = 0$ из уравнения получим $x_1 = 4$, при $x_1 = 0$ получим $x_2 = 1$. Это значит, что первая прямая отсекает от осей координат отрезки $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$.

Аналогично строим остальные граничные прямые. Вторая прямая от осей координат отсекает отрезки, равные 6. Третья прямая проходит параллельно оси Ox_2, отсекая на оси Ox_1 отрезок, равный 2. Четвёртая прямая имеет уравнение $x_2 = 0$. Она совпадает с осью Ox_1.

Из рисунка ниже видно, что множество точек четырёхугольника *ABDE* удовлетворяет всем четырём неравенствам системы.



Следовательно, четырёхугольник *ABDE* является многоугольником решений системы (заштрихован вовнутрь).

Начертим линию равных значений функции цели. Приняв в равенстве $F=1$, получим, что эта линия отсекает отрезки 1 и 1/3 соответственно на оси Ox_1 и на оси Ox_2. Проведём прямую через эти точки (на чертеже она чёрного цвета).

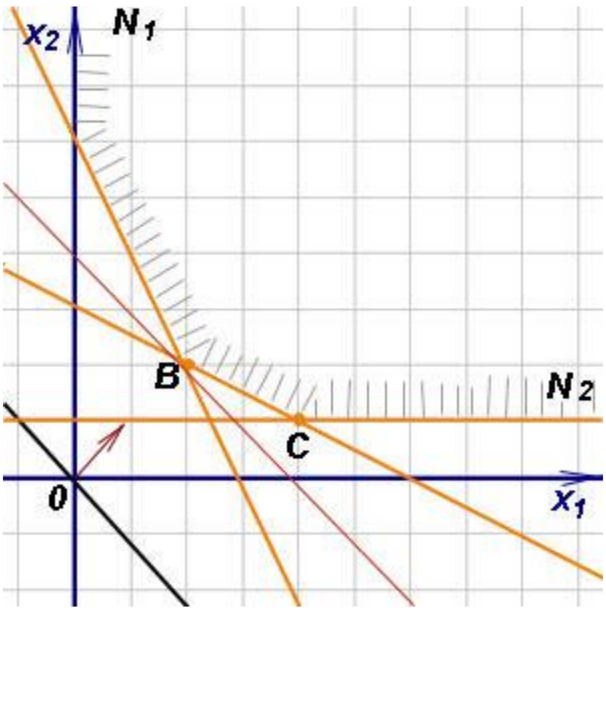
Двигая эту прямую параллельно самой себе в направлении градиента - вектора $\vec{c}=(1;\ 3)$ (бордового цвета), получим опорные прямые. Первая прямая (зелёного цвета) имеет с многоугольником общую точку A. Здесь функция цели достигает минимума. Двигаясь дальше, придём к точке B. Здесь максимум. Координаты точки B: (2, 4). Подставляя в функцию цели координаты точки B, т. е. $x_1=2$, $x_2=4$, получим максимальное значение функции цели: $F_{\max}=14$.

Пример. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти минимум функции $F=5x_1+6x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2\geq 6 \\ 2x_1+4x_2\geq 12 \\ 4x_1 \qquad\ \geq 4 \\ x_1\geq 0,\ \ x_2\geq 0 \end{cases}$$

Многогранником решений является открытая область N_1BCN_2

Проведём линию равных значений функции цели при $F=1$, как в предыдущем примере (она опять чёрного цвета).



Из рисунка видно, что прямая ближайшнее от начала координат опорное положение займёт в точке *B*. Следовательно, в этой точке функция цели имеет минимум. Координаты точки *B*: (2, 2). Подставляя в функцию цели $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$, получим минимальное значение функции: $F_{\min} = 22$.

Задания к практическому занятию

1. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти максимум функции $F = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \end{cases}$$, где $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$.

2. Решить графическим методом задачу линейного программирования, в которой требуется найти минимум функции $F = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$, где $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$.

Вопросы к практическому занятию

1. В чем заключается задача ЛП?
2. Назовите этапы графического метода решения задачи линейного программирования.

Список рекомендуемой литературы

Список основной литературы

1. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник : в 2 томах. Том 1 / В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1235904

2. Бардушкин, В. В. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 томах. Том 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. - Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2021. (Среднее профессиональное образование).

https://znanium.com/catalog/product/1817031

Дополнительная

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования /В.В. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова.- 2-е изд., стер.--М.: ИЦ «Академия», 2018.- 400с. ПЕЧАТНАЯ