ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

по дисциплине

«Математика»

для обучающихся по специальности

34.02.01 «Сестринское дело»

Ставрополь,2021

Методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования специальности 34.02.01 Сестринское дело и программой дисциплины «Математика».

Составитель: Шаталов А.Ф.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «26» мая 2021 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №5 от «27 » мая 2021 г.

Содержание

Общие сведения

Методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования и программой дисциплины «Математика». В методических указаниях представлен материал для внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине для обучающихся по специальности 34.02.01 «Сестринское дело».

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Математика» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины:

формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь обучающимся осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

Целью самостоятельной работы является формирование и развитие профессиональных и общих компетенций и их элементов.

Целью методического пособия является обеспечение эффективности самостоятельной работы обучающихся, определение ее содержания, установление требований к оформлению и результатам самостоятельной работы.

Задачами методических рекомендаций по самостоятельной работе являются:

- развитие комплексного подхода к изучению дисциплины на основе освоения ее методологических основ применения ранее полученных знаний и умений с использованием междисциплинарных связей;
- активизация самостоятельной работы обучающихся;
- содействие развитию творческого отношения к данной дисциплине;
- выработка умений и навыков рациональной работы с литературой и нормативными документами;
- управление познавательной деятельностью обучающихся.

Функциями методических рекомендаций по самостоятельной работе являются:

- определение содержания работы обучающихся по овладению программным материалом;
- установление требований к результатам изучения дисциплины.

Сроки выполнения и виды отчётности самостоятельной работы определяются преподавателем и доводятся до сведения обучающихся.

Дисциплина «Математика» относится к естественнонаучным дисциплинам и имеет междисциплинарные связи с другими дисциплинами ОПОП.

Медицинская сестра/Медицинский брат (базовой подготовки) должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их выполнение и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать и осуществлять повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.3. Участвовать в проведении профилактики инфекционных и неинфекционных заболеваний.

ПК 2.1. Представлять информацию в понятном для пациента виде, объяснять ему суть вмешательств.

ПК 2.2. Осуществлять лечебно-диагностические вмешательства, взаимодействуя с участниками лечебного процесса.

ПК 2.3. Сотрудничать с взаимодействующими организациями и службами.

ПК 2.4. Применять медикаментозные средства в соответствии с правилами их использования.

ПК 3.1. Оказывать доврачебную помощь при неотложных состояниях и травмах.

ПК 3.3. Взаимодействовать с членами профессиональной бригады и добровольными помощниками в условиях чрезвычайных ситуаций.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

1. ИНСТРУКЦИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ДЛЯ РАБОТЫ С РЕКОМЕНДАЦИЯМИ

Уважаемый обучающийся!

Вы должны знать, что самостоятельная работа, как форма учебной деятельности, согласно требованиям ФГОС СПО, является важным элементом образовательного процесса. В соответствии с учебным планом по 34.02.01 «Сестринское дело» в процессе изучения учебной дисциплины «Математика». Вам необходимо более углубленно сформировать и совершенствовать знания, умения и навыки через выполнение заданий для внеаудиторной самостоятельной работы. Чтобы выполнить предусмотренные задания Вам необходимо воспользоваться рекомендациями по выполнению и оформлению самостоятельной внеаудиторной работы по учебной дисциплине «Математика».

В соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математика» объем часов, отводимый на самостоятельную работу составляет **29 часов.**

Обратите внимание, что все виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы указаны в **технологической карте внеаудиторной самостоятельной работы.**

Сроки проверки заданий преподаватель устанавливает в зависимости от применяемых видов контроля: текущий, рубежный, промежуточная аттестация. В основном контроль будет осуществляться на этапе рубежной аттестации, т. е. после изучения каждой темы учебной дисциплины.

3. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ

Методические рекомендации по выполнению и оформлению самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математика» включают в себя технологическую карту самостоятельной работы, отражающую в себе изучаемые разделы и темы дисциплины, тематику самостоятельной работы, количество часов, виды самостоятельной работы, ее информационное обеспечение и форму контроля. Она разработана таким образом, чтобы обучающиеся могли самостоятельно выполнять предложенные задания, а преподаватель будет только проверять выполненные задания.

Тенденция современного образования - самостоятельное приобретение знаний под руководством преподавателя. Технологическая карта самостоятельной работы поможет обучающимся организовать свою работу и мобилизовать себя на достижение поставленных задач. Из данной карты обучающиеся узнают наименования тем и тематику самостоятельной работы; ее виды как обязательные, так и по выбору обучающихся. Информационное обеспечение, обозначенное в карте, содержит в себе источники информации для самостоятельной работы. Предусмотренная форма контроля определяет функции преподавателя по проверке результатов самостоятельной работы и указывает на ее оформление. Самостоятельная работа рассчитана на разные уровни мыслительной деятельности. Выполненная работа, позволит приобрести не только знания, но и умения, навыки, а также выработать свою методику освоения содержания учебной дисциплины.

Самостоятельная работа выполняется обучающимися по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия, включает единицы содержания, выделенные преподавателем для самостоятельного изучения.

Технологическая карта самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математика» специальность 34.02.01 «Сестринское дело»

Наименование и номер раздела	***Наименование темы***	***Кол-во часов***	***Виды самостоятельной работы***	***Информационное обеспечение***	***Форма контроля***
1. Элементы линейной алгебры	1.Матрицы. Действия над матрицами.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
1. Предел и непрерывность функций.	2. Предел и непрерывность функций.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
2. Дифференциальное исчисление	3. Производная.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
	4. Правила дифференцирования. Таблица производных.	2	Задания к самостоятельной работе либо презентация по теме.	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2	Проверка заданий либо просмотр и оценка презентаций

				т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	
3. Интегральное исчисление	5. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.	2	Презентация по теме	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Просмотр и оценка презентаций
	6. Метод замены переменных.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
	7. Метод интегрирования по частям.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
4. Определенный интеграл	8. Определённый интеграл. Основные методы интегрирования	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин,	Проверка заданий

				А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	
	9. Вычисление определенного интеграла	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
5. Комплексные числа	10. Действия над комплексными числами.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
	11. Переход от алгебраической формы комплексного числа к его тригонометрической форме.	2	Задания к самостоятельной работе	Прокофьев А. А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 т. Т.1,2/ В. В. Бардушкин, А. А. Прокофьев.-М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017 http://znanium.com/catalog/product/615108	Проверка заданий
5. Основные понятия и теоремы теории вероятностей.	12. Основные понятия теории вероятностей.	2	Задания к самостоятельной работе	Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Со-	Проверка заданий

				колов. — 2-е изд., испр. и перераб. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. — 240 с. — (Среднее профессиональное образование). http://znanium.com/catalog/product/944923	
	13 Основные теоремы теории вероятностей.	2	Задания к самостоятельной работе	Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. — 2-е изд., испр. и перераб. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2018. — 240 с. — (Среднее профессиональное образование). http://znanium.com/catalog/product/944923	Проверка заданий
	14. Самостоятельная №14	3	Подготовить реферат либо презентацию		Просмотр презентации либо прослушивание доклада по реферату.
Итого		**29**			

4. ПЕРЕЧЕНЬ
тем и рекомендаций по выполнению самостоятельной работы
дисциплина «Математика»

Для успешного и эффективного выполнения предусмотренной тематики самостоятельной работы с целью формирования выше указанных общих и профессиональных компетенций обучающимся предлагается перечень тем и рекомендаций по выполнению самостоятельной работы.

Самостоятельная работа № 1. Матрицы. Действия над матрицами.

1. Вычислить определители:

$а)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; \quad б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}; \quad г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; \quad д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$

2. Решить уравнения:

$а)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0; \quad в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$

$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$

3. Решить неравенства:

$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0; \quad в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \geq 5; \quad г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14.$

Самостоятельная работа № 2. Предел и непрерывность функций.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при f(x) < 0, f(x) ≥ 0, f(x) ≤ 0.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$*, то и*

$\lim\limits_{x\to a} = A$.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.*

Определение. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$\left| x - x_0 \right| < \Delta$$

верно неравенство $$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon .$$

Определение. Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

Пример решения заданий для самостоятельной работы:

Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{2+16}{2-4} = -9 .$$

Ответ. -9.

Найти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. Для вычисления данного предела подставим значение $x = -1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 32}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 8} = \frac{-45}{15} = -3 .$$

Ответ. -3.

Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задана функция $y=2^{\frac{1}{x-3}}$ и два значения аргумента $x_1=3, x_2=1$.

Требуется:

найти пределы функции при приближении к каждому из данных значений x слева и справа;

установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x ;

сделать схематический чертеж.

Решение. Найдем левый и правый пределы в точке $x_0=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\begin{bmatrix} t=x-3, \\ x\to 3+0, t\to 0+0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0-0} 2^{\frac{1}{t}}=0,$$

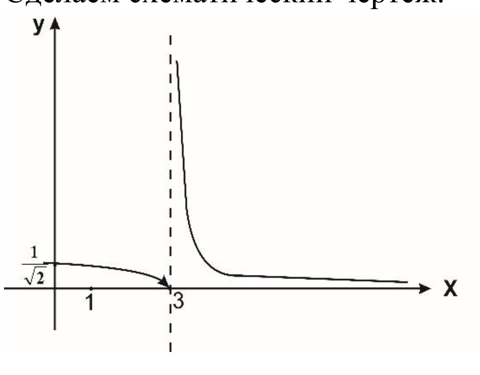
$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\begin{bmatrix} t=x-3, \\ x\to 3+0, t\to 0+0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0+0} 2^{\frac{1}{t}}==\infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый предел бесконечен. Следовательно, по определению $x_0=3$ точка разрыва второго рода.

Найдем левый и правый пределы в точке $x_0=1$.

$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-3}}=2^{\frac{1}{-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=2^{\frac{1}{-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x_0=1$ точка непрерывности функции $y=2^{\frac{1}{x-3}}$.

Сделаем схематический чертеж.



Задания для самостоятельной работы:

Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$; $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

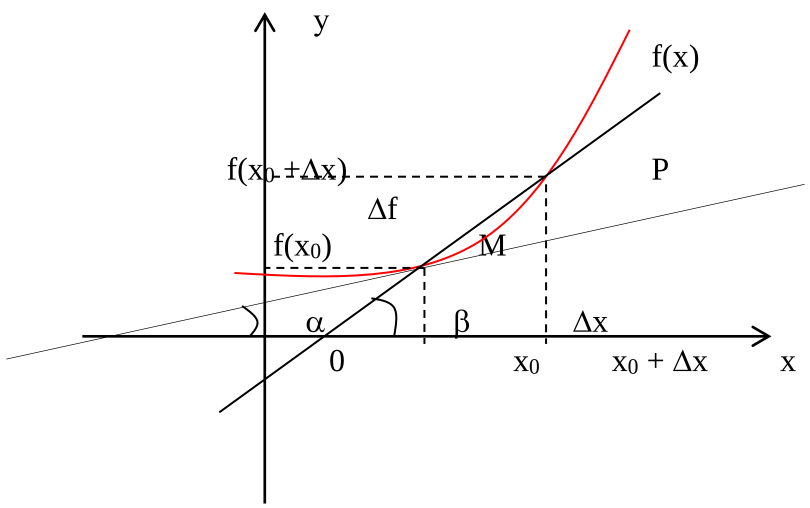
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$$y=\frac{x-4}{x^2+x-20},\ x_1=4,\ x_2=-5.$$

Самостоятельная работа №3. Производная.

<u>Определение.</u> Производной функции *f(x)* в точке $x=x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



Пусть *f(x)* определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\,\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей МР к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} tg\,\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\,\alpha ,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой- либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции f(t), где t- время, а f(t)- закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции- скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;
2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5) $\left(e^x\right)' = e^x$
6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
9) $(\sin x)' = \cos x$
10) $(\cos x)' = -\sin x$
11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Теорема. *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

Пример 1.

Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2};$$

$$y' = 4 \cdot 3x^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:

Используем формулу $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти производные:

а) $y = -7x^3 + 2\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{4}{x^8} - 3\sqrt[3]{4}$

б) $y = e^x ctgx$

в) $y = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\arcsin x}$

г) $y = \log_5(\sqrt[3]{x} + 2x)$

д) $y = (\sin x + \sqrt[3]{x^2})^2$

е) $y = \log_2 \sin x$

ж) $y = \sin \dfrac{\ln x}{x}$

з) $y = e^{\sqrt[4]{2-3x}}$

и) $y = x \arccos \dfrac{2x+1}{9}$,

к) $y = (e^{\sqrt{x}} - 2)(1 + e^{3x})$,

л) $y = \dfrac{1}{arctg\, 2^x}$,

$$y = 2x^3 \arcsin x - (x^3 - 1)\sqrt{x}.$$

Самостоятельная работа № 4.
Правила дифференцирования. Таблица производных.

Пример:

в) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)'\cos x - x^2(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin(x^2 + 3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

д) $y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение: $y' = (x^2)'e^{\sin x} + x^2(e^{\sin x})' = 2xe^{\sin x} + x^2e^{\sin x}(\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2e^{\sin x}\cos x.$

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2y - x^2 = 0$.

Решение: Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по x, полагая, что y есть функция от x и обозначая производную y через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2y' - 2x = 0.$$

Выразим из полученного равенства y':

$$(2y + 2x^2)y' = 2x - 4xy;$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}.$$

Задания для самостоятельного решения:
1. Найти производные:

а) $y = x^{10} - 3\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{10}$

б) $y = e^x \arcsin x$

в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$

г) $y = 3\sin(3x - 1)$

д) $y = (1 - 2\sqrt[3]{x})^2$

е) $y = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x$

ж) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln 2x}$

з) $y = 10^{1 - \sin 2x}$

и) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

к) $y = \sin^2 2x \cos \frac{x}{2}$

л) $y = 3^{arctg\ 3x}$

м) $y = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Самостоятельная работа №5 Общее исследование функции

Выполните письменно задания

Построить графики функций:

1. $y = \sqrt[3]{x^2} e^x$.
2. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$.
3. $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$.
4. $y = x + \frac{1}{x - 1}$.

Самостоятельная работа № 6. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

<u>Определение:</u> Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

<u>Свойства:</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x.
1. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

<u>Пример:</u> $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Таблица основных интегралов

1	$\int dx = x + C;$		
2	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$		
3	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C;$		
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	4а	$\int e^x dx = e^x + C;$

5	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$
6	$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$
7	$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$
8	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;$
9	$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C;$
10	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left\lvert\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right\rvert + C;$
11	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
12	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Пример решения*:*

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Задания для самостоятельного решения:

а) $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$ **;**

б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$;

в) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

г) $\int 3^{2-7x}dx$;

д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx$;

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$;

з) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$;

и) $\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;

к) $\int x\cdot\operatorname{tg} x^2 dx$;

л) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$;

м) $\int x^2\cdot\cos x\, dx$;

Самостоятельная работа № 7.
Неопределённый интеграл. Метод замены переменных.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx=d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx=f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int\sqrt{t}dt=\int t^{1/2}dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=\frac{2}{3}\sin^{3/2}x+C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$.

Замена $t=x^2+1;\quad dt=2xdx;\quad dx=\frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int\sin x\cos 2x\,dx$;

2. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$;

3. $\int \cos 3x \sin 2x\,dx$;

4. $\int \cos 4x \cdot \cos 5x\,dx$;

5. $\int \sin^3 x\,dx$;

Самостоятельная работа № 8.
Неопределённый интеграл. Метод интегрирования по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu \;;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ **(13)**:

м) $\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$

$= \left| \begin{matrix} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \cdot \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$;

н) $\int \arccos x\,dx = \left| \begin{matrix} U = \arccos x; & U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; & V = x \end{matrix} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ -xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x\,dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

<u>Пример.</u> $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x} \cos xdx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos xdx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin xdx; & v = -\cos x; \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x} \cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x} \cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

<u>Пример.</u>

$$\int (2x+1)^{20} dx = \{2x + 1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

<u>Пример.</u>

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+ \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Задания для самостоятельного решения:

1. $\int \left(e^x - 4\right)^2 dx$.
2. $\int \frac{x-3}{x^3+8}dx$;
3. $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x}dx$;
4. $\int \frac{x^4-3}{x^2-25}dx$;

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$;

6. $\int \sin^4 x \cdot \cos x^5 dx$;

Самостоятельная работа № 9.
Определенный интеграл. Основные методы интегрирования

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Теорема о среднем. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$
3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int\limits_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int\limits_0^\pi dx = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int\limits_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке $x = \pi/2$). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\ .$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

$1.\int\limits_0^1 (5x-2)^4 dx.\quad 2.\int\limits_0^{\pi/2}\sin 3x dx.\quad 3.\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)dx.\quad 4.\int\limits_0^{\ln 2} e^{2x-1}dx.\quad 5.\int\limits_1^2 (x+1)\ln x dx.$

$1.\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ $2.\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ $3.\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ $4.\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ $5.\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)\cos x dx.$

$1.\int_0^{\pi/4} \sin 2t\cdot dt.$ $2.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ $3.\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ $4.\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx.$ $5.\int_0^{\pi} x^2\cos x dx.$

$1.\int_0^1 e^{3x}dx.$ $2.\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ $3.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ $4.\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ $5.\int_{\pi}^{2\pi}(x+1)\sin x dx.$.

Самостоятельная работа № 10 Вычисление определённого интеграла .

1. С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

2. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+1\right)^4}.$

3. $\int_0^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx.$

4. $\int_0^1 \frac{x^4dx}{x^5+1}.$

5. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)dx}{\sin^5(x)}$

7. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$

8. $\int_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx$

9. $\int_0^1 e^{2x+1}dx$

10. $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\sin(x)dx$

2. С помощью формулы интегрирования по частям вычислить интегралы

1. $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

2. $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)dx.$

3. $\int_1^e \ln(x)dx.$

4. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$

5. $\int_0^{\pi} e^x\cos(x)dx.$

6. $\int_0^{\pi} e^x\sin(x)dx.$

7. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} x\sin^{-2}(x)dx.$

8. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} x\cos^{-2}(x)dx.$

9. $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx.$

10. $\int_0^1 \frac{e^x}{x}dx.$

3.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y=4-x^2$, $y=0$.
2. $y^2=2px$, $x=h$.
3. $y=\ln(x)$, $x=c$, $y=0$.
4. $y=x^2$, $y=2-x^2$.
5. $y=x^2$, $y=1$.
6. $y=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, $y=0, x=0$, $x=\pi/4$.
7. $y=|x|+1$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
8. $y=\sin(x)$, $y=x^2-\pi x$.
9. $x^2-y^2=1$, $x=2$.
10. $y=x^2$, $y=x^{1/2}$.

4.Найти длину дуги кривой

1. $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=4.
2. $y=x^2-1$, отсеченный осью Ox.
3. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(x)$ от x=1 до x=e.
4. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$ от x=-1 до x=2.
5. $y=x^2$ от x=0 до x=2.
6. $x=e^t\sin t, y=e^t\cos t$, $0\le t\le\pi/2$.
7. $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.
8. $y=e^x+e^{-x}$ от x=0 до x=1.
9. $y=\sin x$, y=0, $0\le x\le\pi$.
10. $x^2+y^2=16$.

Самостоятельная работа №11 Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной форме комплексного числа.

Комплексное число $z = a + bi$ изображается в виде вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a + bi$. Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z \neq 0$ (рис. 1).

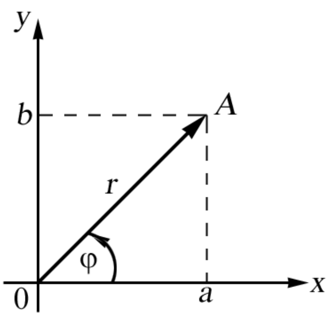


Рис. 1

Если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, если по движению часовой стрелки – отрицательной. Аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$ записывается так: $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg\ (a + bi)$.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент комплексного числа определяется однозначно, если область его изменения ограничить промежутком величины 2π. В качестве такого промежутка принято брать один из следующих промежутков $[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента z называется главным значением аргумента $\arg z$. Так как аргумент z определяется с точностью до слагаемого $k \cdot 2\pi$, то

$$\arg z = \arg z + 2k\pi .$$

Из рисунка видно, что

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi,$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, r \geq 0, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Запишем формулы для вычисления главного значения аргумента, принадлежащие промежутку $[0, 2\pi]$:

$$\arg z = \arg(a + bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a > 0, \quad b \geq 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0, \quad b > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & a < 0, \quad b < 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a = 0, \quad b < 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + 2\pi, & a > 0, \quad b < 0. \end{cases}$$

Для представления комплексного числа $z = a + bi$ в тригонометрической форме необходимо найти:

1) модуль этого числа $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; изобразить точку $a + bi$ и выбрать нужное значение аргумента этого числа;

2) записать $z = a + bi$, воспользовавшись соотношением. Получаем тригонометрическую форму комплексного числа

$$\boxed{\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}$$

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Пример 1. Записать комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической форме нужно знать его модуль и аргумент, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Затем подсчитываем главное значение аргумента $z = 1 + i\sqrt{3}$. Вещественная и мнимая части данного комплексного числа положительны ($a = 1,\ b = \sqrt{3}$). По формуле главное значение аргумента совпадает с $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Тогда $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Пример 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -5$.

Решение. Данное число является вещественным и отрицательным, а главное значение его аргумента (см. формулу (2.9)) равно π . Подсчитаем модуль числа

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

Модуль и аргумент числа –5 найдены, по формулам (2.7) – (2.9) имеем

$$z = -5 = 5(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Ответ: $z = -5 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Пример 3. Найти аргумент числа $z = -3 - i\sqrt{3}$.

Решение. Вещественные и мнимые части данного числа отрицательны и по формуле (2.9) главное значение аргумента его совпадает с

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-3} + \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi.$$

Следовательно, $\arg\left(-3 - i\sqrt{3}\right) = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n$.

Задания к практическому занятию:

Выполнить действия:

1. $(5 - 4i) + (7 + 2i)$.

2. $(5 - 4i) + (7 + 4i)$.

3. $(-6 + 2i) + (-6 - 2i)$.

4. $(1 - i) - (7 - 3i) + (6 - 2i) - (2 + i)$.

5. $(-2 - i) \cdot (1 + i)$.

6. $(5 - 4i) \cdot (3 + 2i)$.

7. $\frac{1}{1 - i}$.

8. $\frac{\sqrt{5} + i}{\sqrt{5} - 2i}$.

9. $\frac{3 - 2i}{1 + 3i}$.

10. Найти модуль и аргумент числа $\frac{8 + 2i}{5 - 3i}$.

1. Представить в алгебраической форме число

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Представить в тригонометрической форме числа:

2. $z_1 = 2 - 3i$
3. $z_2 = 1 + 4i$
4. $-7i$
5. $9 + 7i$
6. $-i$
7. $(2 - i) + (3 + 2i)$

Самостоятельная работа № 12.
Основные понятия теории вероятностей.

Выполните письменно задания

1. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

2. На пяти одинаковых карточках написаны буквы л, м, о, о, т. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово молот?

3. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной

выборке одно изделие бракованное.

4. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

5. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

6. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй - 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

7. Симметричная монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

8. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 7, или тому и другому одновременно.

9. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

10. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

11. Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет.

12. В урне 6 голубых, 5 красных и 4 белых шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар (событие A), при втором - красный (событие B), при третьем - белый (событие C).

Самостоятельная работа № 13.
Основные теоремы теории вероятностей.

1. Два охотника соревнуются: кто подстрелит больше уток при двух выстрелах, тот и победит. Вероятность попадания первого охотника в утку равна 0,5, второго −0,6.
2. Какова вероятность того, что выиграет первый охотник? Считать, что при одном выстреле можно убить только одну утку.
3. Пятеро стрелков производят по одному выстрелу в мишень независимо друг от друга. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,6; 0,5; 0,8; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет ровно четыре пробоины.
4. Какова вероятность того, что из шести отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (6 из 49) 5 чисел будут выигрышными?
5. В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении.
6. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится только в одном справочнике.
7. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

Самостоятельная работа № 14. (3 часа)

Подготовить реферат на любую из следующих тем:

1. Бином Ньютона и Треугольник Паскаля.
2. Схема испытаний Бернулли.
3. Практическое применение определённого интеграла.
4. Значение производной функции, поиск «оптимального» при помощи производной.
5. Линии второго порядка и их физическое применение.

5. ПОРЯДОК ОФОРМЛЕНИЯ ВИДОВ И ФОРМ ОТЧЕТНОСТИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1.Методические рекомендации по подготовке сообщения

Сообщение – это сокращенная запись информации, в которой должны быть отражены основные положения текста, сопровождающиеся аргументами, 1–2 самыми яркими и в то же время краткими примерами.

Сообщение составляется по нескольким источникам, связанным между собой одной темой. Вначале изучается тот источник, в котором данная тема изложена наиболее полно и на современном уровне научных и практических достижений. Записанное сообщение дополняется материалом других источников.

Этапы подготовки сообщения:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника.

Сообщение должно содержать информацию на 3-5 мин.

2. Методические рекомендации по оформлению реферата

Реферат - краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания научного труда или трудов, обзор литературы по теме. Это самостоятельная научно-исследовательская работа студента, в которой раскрывается суть исследуемой проблемы. Изложение материала носит проблемно-тематический характер, показываются различные точки зрения, а также собственные взгляды на проблему.

Содержание реферата должно быть логичным. Объём реферата, как правило, от 5 до 15 машинописных страниц. Темы реферата разрабатывает преподаватель, ведущий данную дисциплину. Перед началом работы над рефератом следует наметить план и подобрать литературу. Прежде всего, следует пользоваться литературой, рекомендованной учебной программой, а затем расширить список источников, включая и использование специальных журналов, где имеется новейшая научная информация.

Структура реферата:

□ Титульный лист.

□ Оглавление.

□ Введение.

□ Основная часть (состоит из глав и подглав, которые раскрывают отдельную проблему или одну из её сторон и логически являются продолжением друг друга).

□ Заключение (подводятся итоги и даются обобщённые основные выводы по теме реферата, делаются рекомендации).

□ Список литературы.

В списке литературы должно быть не менее 2-5 различных источников.

Допускается включение таблиц, графиков, схем, как в основном тексте, так и в качестве приложений.

3. Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

название презентации;

автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);

год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	– необходимо соблюдать единый стиль оформления; – нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; – вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	– для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	– на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; – для фона и текста используются контрастные цвета; – особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	– нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; – не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	– следует использовать короткие слова и предложения; – времена глаголов должно быть везде одинаковым; – следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; – заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	– предпочтительно горизонтальное расположение информации; – наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; – если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней
Шрифты	– для заголовков не менее 24; – для остальной информации не менее 18; – шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; – нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; – для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; – нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: – рамки, границы, заливку – разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки – рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	– не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. – наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слай-

	дов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

4. Методические рекомендации для обучающихся при решении задач

В процессе изучения математики наряду с некоторыми теоретическими сведениями обучающиеся овладевают и закрепляют способы решения задач. Обычно с такими способами знакомит сам преподаватель, показывая решение задач по темам. Наиболее эффективным при этом является такой подход, при котором преподаватель раскрывает перед обучающимися технологию решения задачи, показывает, чем мотивировано применение некоторого метода решения, чем обусловлен выбор того или иного пути.

Работа над задачей тоже может быть полностью самостоятельной работой обучающихся. Она преследует несколько целей:

- продолжить формирование умений самостоятельно изучать текст, который в данном случае представляет собой задачу;
- обучить рассуждениям;
- обучить оформлению решения задач. К тому же обучающиеся будут знать, что у них имеется образец рассуждений и оформления задачи, к которому они могут обратиться при решении другой задачи или при проверке правильности своего решения.

Непременным условием усвоения новых теоретических сведений и овладения новыми приемами решения задач является выполнение обучающимися тренировочных упражнений, в ходе которого приобретенные знания становятся полным достоянием обучающихся. Как известно, существуют две формы организации такой тренировочной работы – фронтальная работа и самостоятельная работа. Фронтальная работа на уроках математики – это традиционная, давно сложившаяся форма. Схематически ее можно описать так: один из обучающихся выполняет задание на доске, остальные выполняют это же задание в тетрадях. Самостоятельная работа обучающихся на уроке состоит в выполнении без помощи преподавателя и товарищей задания.

Большие возможности для подготовки обучающихся к творческому труду и самостоятельному пополнению знаний имеет самостоятельное выполнение заданий. В этом случае обучающийся без какой-либо помощи должен наметить пути решения, правильно выполнить все построения, преобразования, вычисления и т. п. В таком случае мысль обучающегося работает наиболее интенсивно. Он приобретает практический навык работы в ситуации, с которой ему неоднократно придется сталкиваться в последующей трудовой деятельности. Вместе с тем самостоятельная работа обучающихся на уроках математики имеет и свои недостатки. Усилия обучающихся могут оказаться напрасными и не привести к результату, если он недостаточно подготовлен к решению поставленной задачи. Обучающийся не слышит комментариев к решению, а рассуждения, которые он проводит мысленно, могут быть не всегда правильными и достаточно полными, причем возможности обнаружить это обучающийся не имеет. Вообще при самостоятельном выполнении заданий мыслительные процессы не могут быть проконтролированы преподавателем. Поэтому даже верный ответ может оказаться случайным. Исправление ошибок, допущенных при самостоятельной работе, происходит в ходе ее проверки по окончании всей работы. Поэтому, выполняя упражнение самостоятельно, обучающийся, не усвоивший материал, может повторять одну и ту же ошибку от примера к примеру и невольно закрепить неправильный алгоритм.

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по учебнику.
2. Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (ВСР).

При выполнении (ВСР) обучающийся может обращаться к преподавателю для получения консультации.

6. КРИТЕРИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ

«5» - уровень освоения обучающимся учебного материала достаточно высок, обучающийся умеет использовать теоретические знания при выполнении практических задач с практикой, подтверждает сформированность общих и профессиональных компетенций;
«4» - обучающийся полно освоил учебный материал, владеет понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет знания для решения практических задач, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отельные неточности;
«3» - обучающийся знает и понимает основные положения учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности в определении понятий, в применении знаний для решения практических задач не умеет доказательно обосновать свои суждения;
«2» - обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, не умеет выделять главное и второстепенное, допускает ошибки в определении понятий, искажает их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал, не может применять знания для решения практических задач.