ЧАСТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ МНОГОПРОФИЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим работам и практической подготовке
по дисциплине **«Математика»**
для обучающихся по специальности
34.02.01 Сестринское дело

Ставрополь, 2021

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 34.02.01 Сестринское дело и программой дисциплины «Основы философии».

Составитель: к.физ.-мат. н., доц. Шаталов А.Ф.

Рассмотрено на заседании методического объединения «Социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин, БЖД» протокол №6 от «26» мая 2021 г.

Рекомендовано к использованию в учебном процессе Методическим советом СМК, протокол №5 от «27 » мая 2021 г.

Содержание

Общие сведения

Методические указания составлены в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования и программой дисциплины «Математика». В методических указаниях представлен материал для внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине для обучающихся по специальности 34.02.01 «Сестринское дело».

Актуальность изучения данной учебной дисциплины обусловлена формированием совокупности знаний, умений и навыков работы с математическими инструментами. В ходе изучения курса «Математика» систематически и последовательно формируются навыки умственного труда: планирование своей работы, поиск рациональных путей ее выполнения, критическая оценка результатов.

Цель освоения дисциплины:

формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Основные задачи освоения дисциплины: помочь обучающимся осознать целостную картину изучаемого материала; облегчить усвоение материала, индивидуализировать обучение, совершенствовать контроль и самоконтроль, повысить результативность учебного процесса.

Целью самостоятельной работы является формирование и развитие профессиональных и общих компетенций и их элементов.

Целью методического пособия является обеспечение эффективности самостоятельной работы обучающихся, определение ее содержания, установление требований к оформлению и результатам самостоятельной работы.

Задачами методических рекомендаций по самостоятельной работе являются:

- развитие комплексного подхода к изучению дисциплины на основе освоения ее методологических основ применения ранее полученных знаний и умений с использованием междисциплинарных связей;
- активизация самостоятельной работы обучающихся;
- содействие развитию творческого отношения к данной дисциплине;
- выработка умений и навыков рациональной работы с литературой и нормативными документами;
- управление познавательной деятельностью обучающихся.

Функциями методических рекомендаций по самостоятельной работе являются:

- определение содержания работы обучающихся по овладению программным материалом;
- установление требований к результатам изучения дисциплины.

Дисциплина «Математика» относится к естественнонаучным дисциплинам и имеет междисциплинарные связи с другими дисциплинами ОПОП.

Медицинская сестра/Медицинский брат (базовой подготовки) должен обладать общими компетенциями, включающими в себя способность:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их выполнение и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать и осуществлять повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.3. Участвовать в проведении профилактики инфекционных и неинфекционных заболеваний.

ПК 2.1. Представлять информацию в понятном для пациента виде, объяснять ему суть вмешательств.

ПК 2.2. Осуществлять лечебно-диагностические вмешательства, взаимодействуя с участниками лечебного процесса.

ПК 2.3. Сотрудничать с взаимодействующими организациями и службами.

ПК 2.4. Применять медикаментозные средства в соответствии с правилами их использования.

ПК 3.1. Оказывать доврачебную помощь при неотложных состояниях и травмах.

ПК 3.3. Взаимодействовать с членами профессиональной бригады и добровольными помощниками в условиях чрезвычайных ситуаций.

Планируемые **личностные результаты** в ходе реализации образовательной программы:

ЛР4. Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

Практическое занятие № 1. Операции над матрицами вычисление определителей

Основные определения.

Определение.Матрицей размера m×n, где m- число строк, n- число столбцов,называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где i- номер строки, aj- номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

***Основные действия над матрицами*.**

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение.Если число столбцов матрицы равно числу строк(m=n), то матрица называется **квадратной**.

Определение.Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется**единичной матрицей**.

Определение.Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

Определение. Квадратная матрица вида $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется **диагональной** матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

$C = A + B = B + A.$

Операция **умножения (деления)** матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти 2A + B.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ 2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

<u>Определение:</u>Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, **число столбцов первой из которых равно числу строк второй.**

<u>Свойства операции умножения матриц.</u>

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \quad O \cdot A = O,$$

где O – **нулевая** матрица.

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и (AB)C, то определены BC и A(BC), и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения A(B+C) и (A+B)C, то соответственно:

$A(B + C) = AB + AC$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB , то определено произведение B^TA^T и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^TA^T, \text{ где}$$

индексом T обозначается **транспонированная** матрица.

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц det (AB) = detA·detB.
Понятие det(определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

<u>Определение</u>.Матрицу B называют **транспонированной** матрицей A, а переход от A к B **транспонированием**, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

<u>Пример.</u>Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример.</u>Найти произведение матриц A = $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

<u>Пример.</u>Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 10 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители (детерминанты) матрицы.

<u>Определение.</u>Определителем квадратной матрицы A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \text{ где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы А число $M_{1к}$ называется **дополнительным минором** элемента матрицы a_{1k}. Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение.Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-ой строки иj-го столбца.

Свойство1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство2.det (AB) = detA·detB

Свойство 3.Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение:Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

<u>Свойство 9.</u> Если для элементов какой- либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

<u>Пример.</u> Вычислить определитель матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

= -5 + 18 + 6 = 19.

<u>Пример:</u>. Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найтиdet (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 –

– 152 = -26.

Задания к практической подготовке

1.Вычислить определители:

$$а)\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}; \; б)\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \; в)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -5 & 10 \end{vmatrix}; \; г)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; \; д)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения:

$$а)\begin{vmatrix} 2 & x+3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \; б)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0; \; в)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$г)\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Решить неравенства:

$$а)\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \; б)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0; \; в)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} \geq 5; \; г)\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 14.$$

4. Вычислить определители:

$a)\begin{vmatrix}2&1&-3\\-1&-2&1\\5&4&1\end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix}4&2&-1\\2&-3&-2\\8&8&2\end{vmatrix}$; $в)\begin{vmatrix}3&0&3\\-1&-3&0\\0&6&-1\end{vmatrix}$; $г)\begin{vmatrix}3&-2&5\\0&-3&6\\1&4&2\end{vmatrix}$; $д)\begin{vmatrix}3&2&1\\2&5&3\\1&4&2\end{vmatrix}$; $е)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}$; $ж)\begin{vmatrix}4&2&-1\\5&3&-2\\3&2&-1\end{vmatrix}$;

$з)\begin{vmatrix}2&2&-1\\0&5&0\\7&3&2\end{vmatrix}$; $и)\begin{vmatrix}2&-1&7&4\\0&-3&9&-5\\0&0&-1&8\\0&0&0&5\end{vmatrix}$; $к)\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$;

$л)\begin{vmatrix}2&-1&1&0\\0&1&2&-1\\3&-1&2&3\\3&1&6&1\end{vmatrix}$; $м)\begin{vmatrix}6&5&8&4\\9&7&5&2\\7&5&3&7\\4&8&8&-3\end{vmatrix}$; $н)\begin{vmatrix}7&3&2&6\\8&-9&4&9\\7&-2&7&3\\5&-3&3&4\end{vmatrix}$.

5 Даны матрицы $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Существуют ли а) AB, б) BA, в) AC, г) CA, д) ABC, е) ACB, ж) CB, з) CBA ?

6. Найдите m и n, если известно, что а) $A_{3\times 4}\cdot B_{4\times 5}=C_{m\times n}$;

б) $A_{2\times 3}\cdot B_{m\times n}=C_{2\times 6}$; в) $A_{2\times m}\cdot B_{n\times 3}=C_{2\times 3}$.

7. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-4\\5&-6\end{pmatrix}$.

Найдите а) $A+B$; б) $B-A$; в) $2A-3B$; г) $A+B+A^T+B^T$;

д) $A\cdot B$; е) $B\cdot A$; ж) A^{-1};з) B^{-1}.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\0&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&1&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Найдите а) AB; б) BA; в) AC; г) CB; д) $2C-BA$; е) C^{-1};

ж) CC^{-1}; з) $3C-2E$; и) CE; к) AE.

9. Найти:

а)$3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2&-3\\4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&-6\\6&-4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}4&3\\7&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28&93\\38&-126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&3\\2&1\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}5&0&2&3\\4&1&5&3\\3&1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-2\\7\\4\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

10. Найти значение многочлена $f(A)$, если:

а) $f(X) = 3X^2 - 4$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(X) = X^2 - 3X + 1$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $f(X) = 3X^2 - 2X + 5$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Вопросы к практическому занятию 1

1. Что такое матрица?
2. Какая матрица называется единичной?
3. Дайте понятие диагональной матрицы.
4. Как определяется сложение и вычитание матриц? В каких случаях возможны эти операции?
5. Опишите алгоритм произведения матриц.

Практическая работа № 2. Нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы.

Определение.Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);

5)транспонирование.

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение минора матрицы:

Определение. Если в матрице А выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется **минором** матрицы А. Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s.

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным. Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы А выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение.Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы. В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. *Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \ldots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.*

Обратная матрица.

Определим операцию деления матриц как операцию, обратную умножению.

Определение. Если существуют квадратные матрицы Х и А одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где Е - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица А, то матрица Х называется **обратной** к матрице А и обозначается A^{-1}.

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \text{ i=(1,n), j=(1,n)},$$

$$e_{ij} = 0, \qquad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \qquad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X.

<u>Пример.</u> Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$\boxed{x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},}$$

где M_{ji}- дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A.

Пример. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$M_{11}=4;\ M_{12}= 3;\ M_{21}= 2;\ M_{22}=1$$

$$x_{11}= -2; \quad x_{12}= 1; \quad x_{21}= 3/2; \quad x_{22}= -1/2$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Свойства обраных матриц.

Укажем следующие свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример.Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^3.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $\qquad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример.Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2)-1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4)-3(-6) = -8+18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

Базисный минор матрицы.

Ранг матрицы.

Как было сказано , минором матрицы порядка s называется определитель матрицы, образованной из элементов исходной матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных *s* строк и *s* столбцов.

Определение. В матрице порядка m×n минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка *r+1* и выше равны нулю, или не существуют вовсе, т.е. *r* совпадает с меньшим из чисел m или n.

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются **базисными.**

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Определение. Порядок базисного минора матрицы называется **рангом** матрицы и обозначается Rg A.

Очень важным свойством элементарных преобразований матриц является то, что они не изменяют ранг матрицы.

Определение. Матрицы, полученные в результате элементарного преобразования, называются **эквивалентными.**

Надо отметить, что **равные** матрицы и **эвивалентные** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. *Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно числу линейно независимых строк.*

Т.к. элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы, то можно существенно упростить процесс нахождения ранга матрицы.

Пример.Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{RgA} = 2.$$

Пример:Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Пример.Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \text{Rg} = 2.$$

Если с помощью элементарных преобразований не удается найти матрицу, эквивалентную исходной, но меньшего размера, то нахождение ранга матрицы следует начинать с вычисления миноров наивысшего возможного порядка. В вышеприведенном примере – это миноры порядка 3. Если хотя бы один из них не равен нулю, то ранг матрицы равен порядку этого минора.

Теорема о базисном миноре.

Теорема.*В произвольной матрице А каждый столбец (строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*
Таким образом, ранг произвольной матрицы А равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) в матрице.

Если А- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк. Данное утверждение следует из свойства линейной зависимости при определителе равном нулю.

Задания к практическому занятию.

Часть 1:

1. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицы, обратные для данных и сделать проверку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 10 & -2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$; е).

2. Найти матрицы обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Вопросы к занятию 2

1. Что такое обратная матрица?

2. Дайте определение минора матрицы?
3. Дайте определение алгебраического дополнения матрицы.
4. Что такое ранг матрицы и каково его значение?
5. Какие матрицы называют эквивалентными?
6. Правило нахождения определителя.

Практическое занятие № 3.Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера и Гаусса.

Метод Крамера. (Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример.Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};\qquad \textit{Ответ: } x = 0;\ y = 0;\ z = -2.$$

Метод Гаусса состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей. Эти действия называют прямым ходом. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (обратный ход).

Пример: Решить систему из 3 уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$$

Метод Гаусса основан на приведении системы уравнений к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы.

Умножим первое уравнение на -3 и прибавим его ко второму и третьему уравнениям. В результате получим систему, в которой неизвестное x исключено из второго и третьего уравнений.

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 13y + 7z = 14 \\ 7y = 0 \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 13, затем умножим его на -7 и прибавим его к третьему уравнению. В результате получим систему уравнений, в которой исключено из третьего уравнения неизвестное y.

$$\begin{cases} x-4y-2z=-3 \\ y+\dfrac{7}{13}z=\dfrac{14}{13} \\ -\dfrac{49}{13}z=-\dfrac{98}{13} \end{cases}$$

Приведение исходной системы уравнений к треугольному виду называется прямым ходом метода Гаусса. Далее реализуем обратный ход метода Гаусса.

$$z=-\frac{98}{13}:\left(-\frac{49}{13}\right)=2$$

$$y=\frac{14}{13}-\frac{7}{13}\cdot 2=0$$

$x=-3+4\cdot 0+2\cdot 2$=1

Таким образом, $x=1,\quad y=0,\quad z=2.$

<u>Определение.</u> Если b_1, b_2, …,b_m = 0, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

<u>Элементарные преобразования систем.</u>

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Задания к практической подготовке

Исследовать совместность следующих систем.

а) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=-2, \\ x_1+2x_2+3x_3=-1, \\ x_1-3x_2-2x_3=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5, \\ 5x_1+74x_2-4x_3-6x_4=3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 - 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad\quad = 5, \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 = 16, \\ \qquad 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 \qquad\quad = -5. \end{cases}$

3. Исследуйте системы и в случае совместности решите их методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$ к) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

л) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$ м) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 8; \end{cases}$

н) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 17. \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ оо) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

Вопросы к занятию 3

1. Что такое система линейных уравнений?
2. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
3. Сколько решений имеет система линейных уравнений?
4. В чем суть метода Крамера?
5. В каких случаях система линейных уравнений имеет решение?
6. В каких случаях система уравнений может быть решена и чтоназывается ее решениями?

Практическое занятие № 4. Операции над векторами. Вычисление модуля и скалярного произведения векторов.

Определение.Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение.Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$$

Определение.Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение.Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение.Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

<u>Определение.</u>Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha\vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha|\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\alpha < 0$.

<u>Свойства векторов.</u>

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность

6) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность

7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

<u>Определение.</u>

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

<u>Определение.</u>Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$, то числа α, β и γ - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e_1} + \beta \vec{e_2} + \gamma \vec{e_3}) = (\lambda\alpha)\vec{e_1} + (\lambda\beta)\vec{e_2} + (\lambda\gamma)\vec{e_3}.$$

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3}; \qquad \vec{b} = \beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + \beta_3 \vec{e_3};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e_3}.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение.Векторы $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_n \vec{a_n} = 0$, при не равных нулю одновременно α_i, т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_n \vec{a_n} = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Свойство 1.Если среди векторов $\vec{a_i}$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3.Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой- либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус- вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус- вектора.

Определение.Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **апликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

<u>Определение.</u> Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

<u>Определение.</u>Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

<u>Пример.</u> Даны векторы $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1)и $\vec{d}$ (3; 2; 2) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ линейно независимы.

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2 - 3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$$ Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) - 3(-2 - 3) + 2(4 - 6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$\beta = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$\gamma = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{d}$ { -1/4, 7/4, 5/2}.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M(x, y, z) **делит отрезок AB в соотношении λ/μ**, считая от А, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \qquad y = (y_1 + y_2)/2; \qquad z = (z_1 + z_2)/2.$$

<u>Линейные операции над векторами в координатах.</u>

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат
$\vec{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

<u>Скалярное произведение векторов.</u>

<u>Определение.</u>Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi}$$

<u>Свойства</u> скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$;
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.
3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
5) $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\vec{b}) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$; m=const

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

<u>Пример.</u> Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$10\vec{a}\cdot\vec{a} - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13$,

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

<u>Пример.</u>Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (1, 2, 3), $\vec{b}$ = (6, 4, -2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 6 + 8 – 6 = 8:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

<u>Пример.</u>Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a} - 18\vec{a}\cdot\vec{b} - 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 12\vec{b}\cdot\vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15\cdot 16 - 28\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} +$$

$+ 12\cdot 36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.$

<u>Пример.</u>Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a}$ = (3, 4, 5), $\vec{b}$ = (4, 5, -3)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = 12 + 20 - 15 =17 :

$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$; $|\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}$.

$$\cos\varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \qquad \varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

<u>Пример.</u>При каком mвекторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$\vec{a}$ = (m, 1, 0); $\vec{b}$ = (3, -3, -4)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

<u>Пример.</u>Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge\vec{c} = \vec{b}\wedge\vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c})=$

$10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$

$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10$

Задания

Задание 1: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, разложенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 2: Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Задание 3: Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

Задание 4: При каком значении α векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ перпендикулярны?

$\vec{a}=\{1;+2;3\},\vec{b}=\{-3;0;-1\},\vec{c}_1=2\vec{a}-4\vec{b},\vec{c}_2=3\vec{a}+\vec{b}.$

$\vec{a}=\{-2;3;+1\},\vec{b}=\{1;+1;-3\},\vec{c}=\{1;-9;1\}.$

$\vec{a}=\{1;3;-1\},\vec{b}=\{3;-2;3\}.$

Задание 5: Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Вычислить:

1) объем пирамиды;

2) длину ребра AB;

3) площадь грани ABC;

A) $A(\alpha;-2;3),B(0;-1;2),C(3;-4;5).$

B) $A(-1;2;1),B(-1;3;-4),C(0;1;-2).$

C) $A(1;-1;1),B(-1;2;-4),C(2;0;-6),D(-2;5;1).$

Вопросы к занятию 4

1.Что такое вектор?

2. В чем отличие вектора от скалярной величины?

3. Как найти проекции вектор на координатные оси?

4. Как найти длину вектора?

5. Как найти скалярное произведение?

6. Как определить перпендикулярность и параллельность векторов в пространстве?

7. Какие векторы называют коллинеарными?

Практическое занятие № 5. Составление уравнений прямых и кривых второго порядка. Их построение.

Уравнение линии на плоскости.

Как известно, любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

Определение.Уравнением линии называется соотношение y = f(x) между координатами точек, составляющих эту линию.

Отметим, что уравнение линии может быть выражено параметрическим способом, то есть каждая координата каждой точки выражается через некоторый независимый параметр *t*.

Характерный пример – траектория движущейся точки. В этом случае роль параметра играет время.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$\boxed{Ax + By + C = 0,}$$

причем постоянные А, В не равны нулю одновременно, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$. Это уравнение первого порядка называют **общим уравнением прямой.**

В зависимости от значений постоянных А,В и С возможны следующие частные случаи:

- C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0 – прямая проходит через начало координат
- A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 { By + C = 0}- прямая параллельна оси Ох
- B = 0, A ≠ 0, C ≠ 0 { Ax + C = 0} – прямая параллельна оси Оу
- B = C = 0, A ≠ 0 – прямая совпадает с осью Оу
- A = C = 0, B ≠ 0 – прямая совпадает с осью Ох

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали.

<u>Определение.</u>В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (А, В) перпендикулярен прямой , заданной уравнением Ах + Ву + С = 0.

<u>Пример.</u>Найти уравнение прямой, проходящей через точку А(1, 2) перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (3, -1).

Составим при А = 3 и В = -1 уравнение прямой: 3х – у + С = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А.

Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно С = -1.

Итого: искомое уравнение: 3х – у – 1 = 0.

<u>Уравнение прямой, проходящей через две точки.</u>

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и$M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Если какой- либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

На плоскости записанное выше уравнение прямой упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если$x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = kназывается **угловым коэффициентом** прямой.

<u>Пример.</u>Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

<u>Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту.</u>

Если общее уравнение прямой Ах + Ву + С = 0 привести к виду:

$$\boxed{y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad т.е. \quad y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ (α_1, α_2), компоненты которого удовлетворяют условию $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

Ах + Ву + С = 0.

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ (1, -1) и проходящей через точку А(1, 2).

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1\cdot A + (-1)\cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C/A = 0.

при x = 1, y = 2 получаем С/A = -3, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Уравнение прямой в отрезках.

Если в общем уравнении прямой Ах + Ву + С = 0 С ≠ 0, то, разделив на –С, получим: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ или

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1, \text{ где} \\ a=-\dfrac{C}{A};\quad b=-\dfrac{C}{B}\end{array}}$$

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент *а* является координатой точки пересечения прямой с осью Ох, а *b* – координатой точки пересечения прямой с осью Оу.

Пример.Задано общее уравнение прямой х – у + 1 = 0. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

С = 1, $-\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$, а = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой.

Если обе части уравнения Ах + Ву + С = 0 разделить на число $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}$$

нормальное уравнение прямой.

Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы μ⋅С < 0.

р – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ох.

Пример.Дано общее уравнение прямой 12х – 5у – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках:
$$\frac{12}{65}x-\frac{5}{65}y=1$$
$$\frac{x}{(65/12)}+\frac{y}{(-13)}=1$$

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$$y=\frac{12}{5}x-\frac{65}{5}=\frac{12}{5}x-13.$$

нормальное уравнение прямой:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13} \qquad \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0; \qquad \cos\varphi = 12/13; \sin\varphi = -5/13; p = 5.$$

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример.Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или x + y – 4 = 0.

Пример.Составить уравнение прямой, проходящей через точку А(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \qquad 3x - 2y = 0.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение.Если заданы две прямыеy = $k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\boxed{tg\,\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|}$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямые* $Ax + By + C = 0$ *и* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *параллельны, когда пропорциональны коэффициенты* $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. *Если еще и* $C_1 = \lambda C$, *то прямые совпадают.*

Координаты точки пересечения двух прямых находятся как решение системы уравненийэтих прямых.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к прямой $y = kx + b$представляется уравнением:

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)}$$

Расстояние от точки до прямой.

Теорема. *Если задана точка* $M(x_0, y_0)$, *то расстояние до прямой* $Ax + By + C = 0$ *определяется как*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \qquad (1)$$

Координаты x_1и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это уравнение прямой, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой.

Если преобразовать первое уравнение системы к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), находим:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример.Определить угол между прямыми: y = -3x + 7; y = 2x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ $\quad$ $tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример.Показать, что прямые 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример.Даны вершины треугольника А(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4x = 6y – 6;

2x – 3y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b.

k = $-\frac{3}{2}$. Тогда y = $-\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда b = 17. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: 3x + 2y – 34 = 0.

Кривые второго порядка.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.}$$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса.
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - уравнение гиперболы.
4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность.

$$\boxed{x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

В окружности центр имеет координаты (a; b).

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

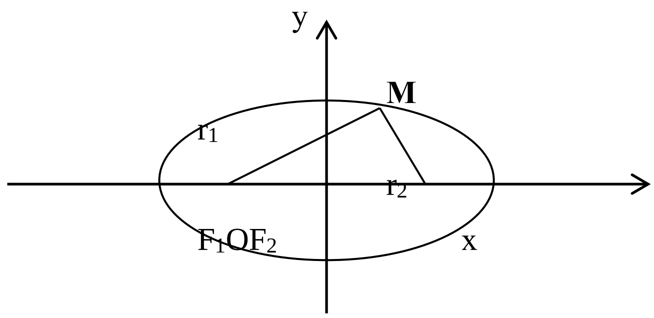
Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

Эллипс.

Определение.Эллипсом называется кривая, заданная уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

Определение.Фокусами называются такие две точки, сумма расстояний от которых до любой точки эллипса есть постоянная величина.



F_1, F_2 – фокусы. $F_1 = (c; 0)$; $F_2(-c; 0)$

c – половина расстояния между фокусами;

a – большая полуось;

b – малая полуось.

Теорема. *Фокусное расстояние и полуоси эллипса связаны соотношением:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Доказательство: В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с вертикальной осью, $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (по теореме Пифагора). В случае, если точка М находится на пересечении эллипса с горизонтальной осью, $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Т.к. по определению сумма $r_1 + r_2$ – постоянная величина, то , приравнивая, получаем:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Определение. Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к большей оси и называется **эксцентриситетом**.

$$\boxed{e = c/a.}$$

Т.к. $c<a$, то $e < 1$.

Определение. Величина $k = b/a$ называется **коэффициентом сжатия** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется **сжатием** эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $\boxed{k^2 = 1 - e^2.}$

Если a = b (c = 0, e = 0, фокусы сливаются), то эллипс превращается в окружность.

Если для точки $M(x_1, y_1)$ выполняется условие: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$, то она находится внутри эллипса, а если $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$, то точка находится вне эллипса.

<u>**Теорема.**</u>*Для произвольной точки M(x, y), принадлежащей эллипсу верны соотношения*:

$$\boxed{r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.}$$

<u>**Доказательство.**</u>Выше было показано, что $r_1 + r_2 = 2a$. Кроме того, из геометрических соображений можно записать:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y} = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Аналогично доказывается, что $r_2 = a + ex$. <u>Теорема доказана.</u>

С эллипсом связаны две прямые, называемые **директрисами**. Их уравнения:

$$\boxed{x = a/e; \quad x = -a/e.}$$

<u>**Теорема.**</u>*Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету e.*

<u>Пример.</u>Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

1) Координаты нижней вершины: x = 0; $y^2 = 16$; y = -4.
2) Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; c = 3; $F_2(-3; 0)$.
3) Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4}; \qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4}; \qquad 4x = -3y - 12; \qquad 4x + 3y + 12 = 0$$

<u>Пример.</u> Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0;\ 0)$, $F_2(1;\ 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Расстояние между фокусами:

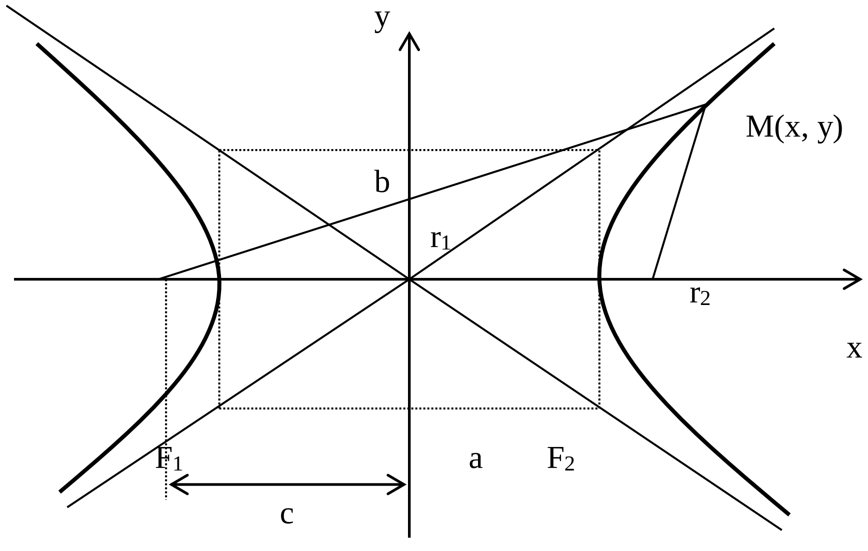
$2c = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию 2a = 2, следовательно a = 1, b = $\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{1/2}=1$.

<u>Гипербола.</u>

<u>Определение.</u>Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых **фокусами** есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



По определению $|r_1 - r_2| = 2a$. F_1, F_2 – фокусы гиперболы. $F_1F_2 = 2c$.

Выберем на гиперболе произвольную точку M(x, y). Тогда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-4a^2+4xc$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$

$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

обозначим $c^2 - a^2 = b^2$ (геометрически эта величина – меньшая полуось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Получили каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Ось 2a называется действительной осью гиперболы.

Ось 2b называется мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x.}$

Определение. Отношение $e = \frac{c}{a} > 1$ называется **эксцентриситетом** гиперболы, где с – половина расстояния между фокусами, а – действительная полуось.

С учетом того, что $c^2 - a^2 = b^2$:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

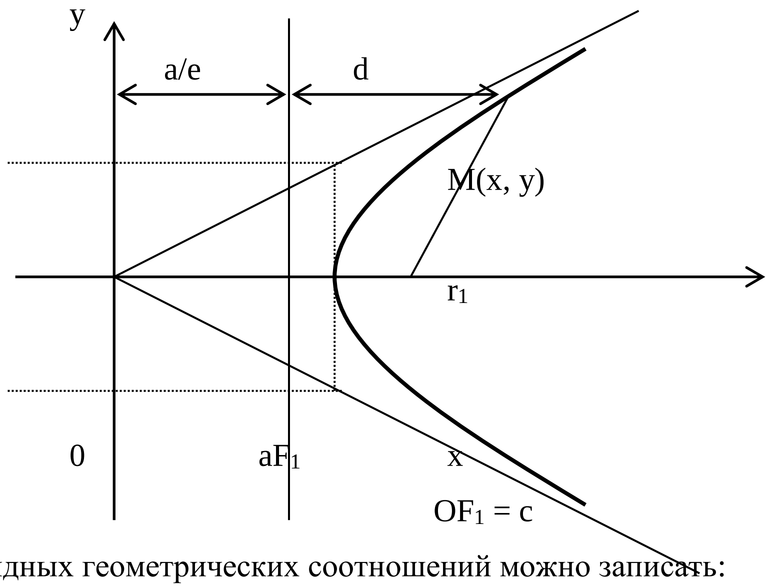
$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Если a = b, e = $\sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней).**

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/e от него, называются **директрисами** гиперболы. Их уравнения: $\boxed{x = \pm\frac{a}{e}.}$

Теорема. *Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого- либо фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d – величина постоянная, равная эксцентриситету.*

Доказательство. Изобразим схематично гиперболу.



Из очевидных геометрических соотношений можно записать:

$a/e + d = x$, следовательно $d = x - a/e$.

$(x - c)^2 + y^2 = r^2$

Из канонического уравнения: $y^2 = \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 - a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2 =$$

$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

$$r = \frac{c}{a}x - a$$

Тогда т.к. $c/a = e$, то $r = ex - a$.

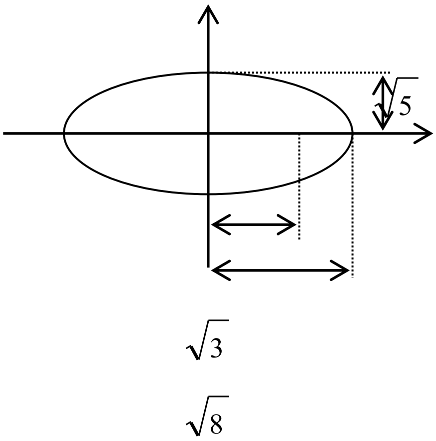
Итого: $\frac{r}{d} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = e$.

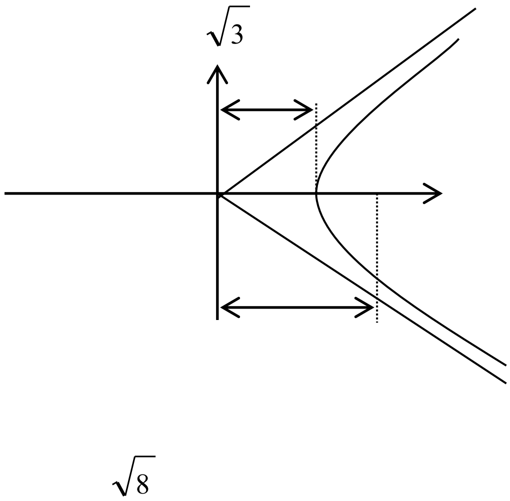
Для левой ветви гиперболы доказательство аналогично. Теорема доказана.

Пример.Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$.

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.





Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Пример.Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Находим фокусное расстояние$c^2 = 25 - 9 = 16$.

Длягиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $e = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$;

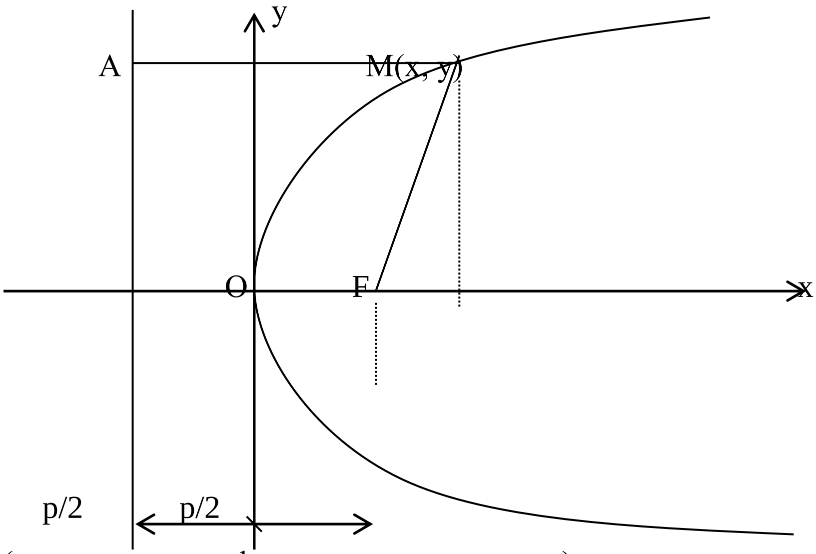
$b^2 = 16 - 4 = 12$.

Итого: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола.

Определение.Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы. Выведем каноническое уравнение параболы.

Из геометрических соотношений: AM = MF; AM = x + p/2;

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Уравнение директрисы: x = -p/2.

<u>Пример.</u>На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что p = 4.

r = x + p/2 = 4; следовательно:

x = 2; $y^2 = 16$; y = ±4. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Задания к практической подготовке

Задача 1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1;2), B(-1;3),C(-4;-2). Не находя координаты вершины D, найти:

1) уравнение стороны AD;
2) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
3) длину высоты BK;
4) уравнение диагонали BD;
5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Задача 2. Даны точки A(1;2;3), B(-1;3;5), C(2;0;4), D(3;-1;2). Найти:

1) общее уравнение плоскости ABC;
2) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
3) расстояние от точки D до плоскости ABC;
4) канонические уравнения прямой AB;
5) канонические уравнения прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AB;
6) общее уравнение плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB.

Задача 3. Уравнение второго порядка $2x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$ путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую, определяемую этим уравнением.

Задача 4. Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = 3\varphi$.

Требуется:

1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$;
2) построить полученные точки;
3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 5. Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

1) $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$;

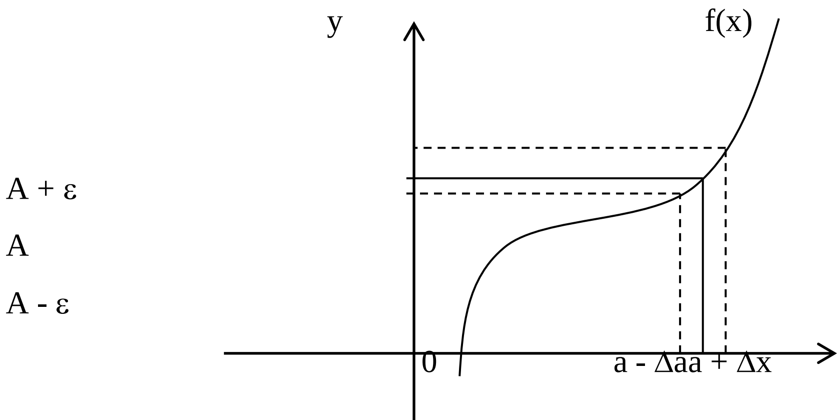
2) $\begin{cases} y \le \sqrt{9 - x^2} \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$

Вопросы к занятию 5

1. Что такое уравнение линии?
2. Что такое касательная к кривой?
3. Какие кривые называют кривыми второго порядка?
4. Какие кривые второго порядка вам известны?
5. Записать уравнение параболы.
6. Записать уравнение эллипса.
7. Записать уравнение окружности.
8. Как построить касательную к кривой 2 порядка?
9. Как составить уравнение перпендикуляра к прямой в точке?
10. Что такое фокусы кривых второго порядка?

Практическое занятие № 6. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенности. Замечательные пределы. Вычисление пределов с помощью замечательных пределов.

<u>Предел функции в точке.</u>



Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a (т.е. в самой точке x = a функция может быть и не определена)

<u>Определение.</u>Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\Delta>0$, что для всех х таких, что

$$0<|x - a|<\Delta$$

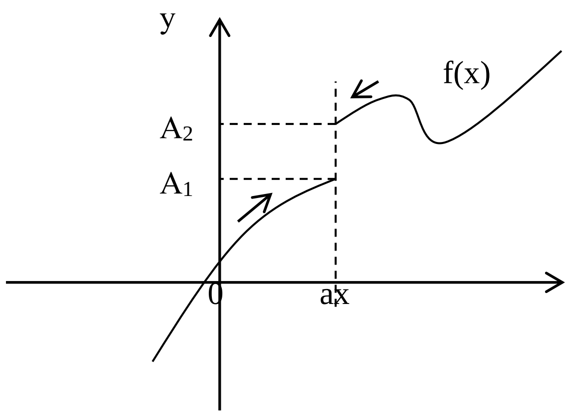
верно неравенство $|f(x) - A|<\varepsilon$.

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta<x<a + \Delta$, $x\neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon<f(x) <A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

<u>Определение.</u>Если $f(x) \to A_1$при $x \to a$ только при $x<a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **слева**, а если$f(x) \to A_2$при $x \to a$ только при $x>a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции f(x) в точке x = a **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция f(x) не определена в самой точке x = a, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции f(x) в точке x = a. Также говорят, что A – **конечный предел** функции f(x).

Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение.Число А называется **пределом** функции f(x) при $x\to\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0$, что для всех x, $|x|>M$выполняется неравенство

$$\left|A - f(x)\right| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция f(x) определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

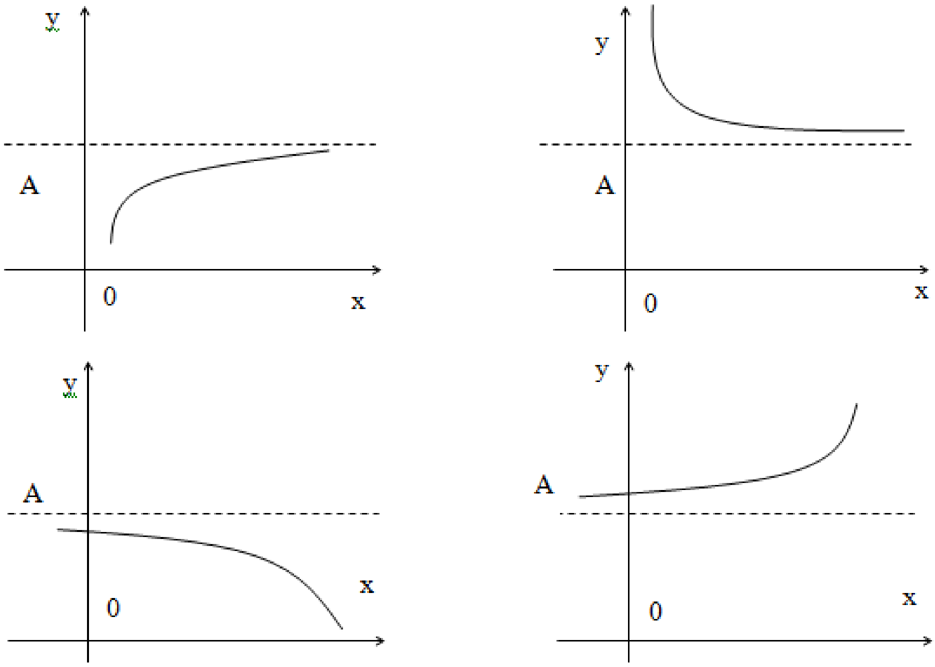
Аналогично можно определить пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для любого $x>M$и

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для любого $x<M$. Графически можно представить

Основные теоремы о пределах.

Теорема1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x\to a$.



Теорема2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Если f(x)>0 вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ *, то A>0.*

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. *Если g(x) ≤ f(x) ≤ u(x) вблизи точки x = a и* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ *, то и* $\lim\limits_{x\to a}=A$

.

Определение. Функция f(x) называется **ограниченной** вблизи точки x = a, если существует такое число M>0, что $|f(x)|<M$ вблизи точки x = a.

Теорема 7. *Если функция f(x) имеет конечный предел при x→a, то она ограничена вблизи точки x = a.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, т.е. $|f(x)-A|<\varepsilon$, тогда

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A| \text{ или}$$

$$\left|f(x)\right| < \varepsilon + \left|A\right|, \text{ т.е.}$$

$$\left|f(x)\right| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Некоторые замечательные пределы.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)} = x^{n-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

Итого: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$

Первый замечательный предел.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой – либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.}$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgmx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{tgx-tgx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x \\ x=\pi/2-y \\ \pi-2x=\pi-\pi+2y \end{array}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(\pi/2-y)}{2y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}$$

Пример.Найти предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l} y=x-1 \\ x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$

$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Пример.Найти предел $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$x^2 - 6x + 8 = 0$; $\qquad$ $x^2 - 8x + 12 = 0$;

D = 36 – 32 = 4; D = 64 – 48 = 16;

x_1 = (6 + 2)/2 = 4; x_1 = (8 + 4)/2 = 6;

x_2 = (6 – 2)/2 = 2 ; x_2 = (8 – 4)/2 = 2;

Тогда $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Пример.Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженноевыражение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}$ =

$=\dfrac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1$.

Пример.Найти предел.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{3-2}{3+3}=\dfrac{1}{6}$

Пример.Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$$ т.к.

$x^3-6x^2+11x-6$ | $x-1$

x^3-x^2 | x^2-5x+6

$-5x^2+11x$

$-5x^2+5x$

$6x-6$

$6x-6$

0

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=-2$

<u>Пример.</u>Найти предел.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2a+2h}{2}\cos\frac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2}=$$

$$=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot(-1/2)=-\sin a$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^3(3x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{(x-2)(3x+2)}$ - не определен, т.к. при стремлении x к 2 имеют место различные односторонние пределы -∞ и +∞.

Задания к практической подготовке

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 4}\dfrac{2\tilde{o}^2-7x-4}{2\tilde{o}^2-13x+20}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x+\sqrt{x^2+4x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}(3x-5)^{\frac{4x}{x-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-2x^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\log_2\left(\dfrac{2x^2+x}{x^2+8}\right)$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1-\cos\tilde{o}}{\tilde{o}\sin x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{2x+x^2}-\sqrt{x})$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}6^{\frac{6x^2-3x+1}{3x^2-5x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{8x^2+7}{2x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$; з) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{1}{1-x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_4\left(\dfrac{x-16x^2}{-x^2+1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,tg\,2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{x+x^2})$; з) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{16x^2+x}{2x+2x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{x^2-4x})$; з) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{\frac{3x}{x+2}}$.

8. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\dfrac{4+5\tilde{o}^2-3x^5}{8-6\tilde{o}-\tilde{o}^5}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{x^2+7}{2x^2-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{\cos\tilde{o}-\cos^5 x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to1}(6-5x)^{\frac{3}{1-x}}$.

9. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\dfrac{\tilde{o}-2\tilde{o}^3-5x^4}{2+3\tilde{o}^2+\tilde{o}^4}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}8^{\frac{x^2-x+3}{3x^2-5}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to3}\dfrac{\tilde{o}^2+4x-21}{2\tilde{o}^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{\tilde{o}tg\ 3x}{\cos\tilde{o}-\cos^3 x}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$;

ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}(2x-7)^{\frac{2x}{x-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{x-x^2}{1-2x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-25}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{\tilde{o}\sin 2x}{tg^2 3\tilde{o}}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

11. а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\dfrac{3-7\tilde{o}^2+5\tilde{o}^3}{2+2\tilde{o}-\tilde{o}^3}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-3}\dfrac{\tilde{o}^2+10x+21}{\tilde{o}^2+8x+15}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to-5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; д) $\lim\limits_{\tilde{o}\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{\pi}}{x^2}$; е) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{2x^2-4x})$

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[6]{\dfrac{3x^2+4}{3x^2+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2}{2}}$

Вопросы к занятию 6

1. Что такое предел функции?
2. Какая функция называется ограниченной?
3. Перечислите основные свойства пределов.
4. Как найти предел простейших функций?
5. Как ликвидировать неопределенность ∞/∞ при нахождении предела?
6. Как ликвидировать неопределенность 0/0 при нахождении предела?

Практическая работа №7. Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.

<u>Непрерывность функции в точке.</u>

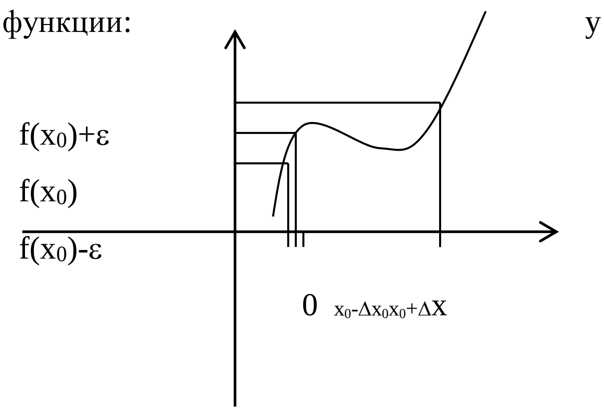
<u>Определение.</u>Функция f(x), определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется **непрерывной в точке** x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

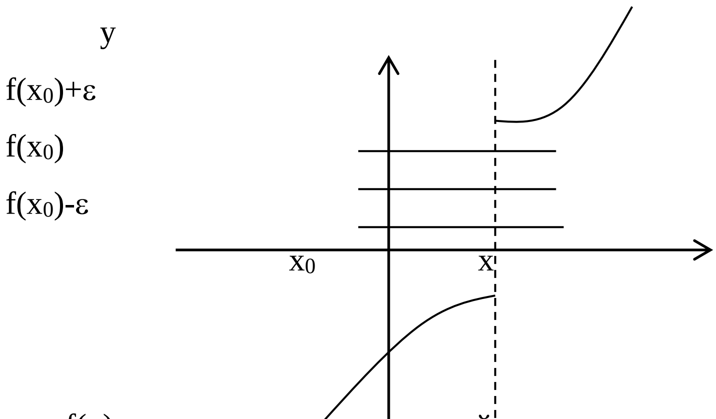
Тот же факт можно записать иначе: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$

<u>Определение.</u>Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



<u>Определение.</u>Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию

$$\left|x - x_0\right| < \Delta$$

верно неравенство $$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon .$$

<u>Определение.</u> Функция f(x) называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

<u>Свойства непрерывных функций.</u>

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если u = f(x), v = g(x) – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция v = g(f(x)) – тоже непрерывнаяфункция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

<u>Непрерывность некоторых элементарных функций.</u>

1) Функция f(x) = C, C = const – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$ непрерывна для всех значений x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции sinи cosнепрерывны на своей области определения.
Докажем свойство 3 для функции y = sinx.

Запишем приращение функции Δy = sin(x + Δx) – sinx, или после преобразования:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и $\sin\frac{\Delta x}{2}$. При этом функция косинус – ограниченная функция при Δx→0 $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$, а т.к.

предел функции синус $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при Δx→0.

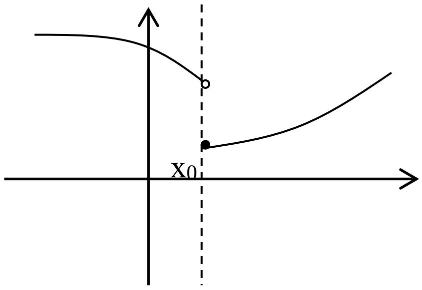
Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция y = sinx – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Точки разрыва и их классификация.

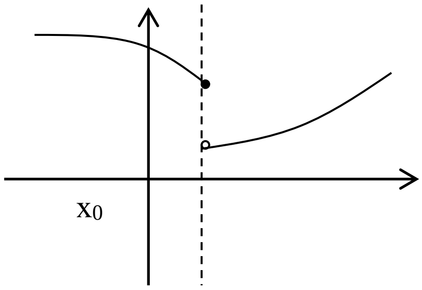
Рассмотрим некоторую функцию f(x), непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



Если односторонний предел (см. выше) $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции f(x), если f(x) не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва 1- го рода**, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1 – го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1 – го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

<u>Определение.</u>Точка x_0 называется **точкой разрыва 2 – го рода**, если в этой точке функция f(x) не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

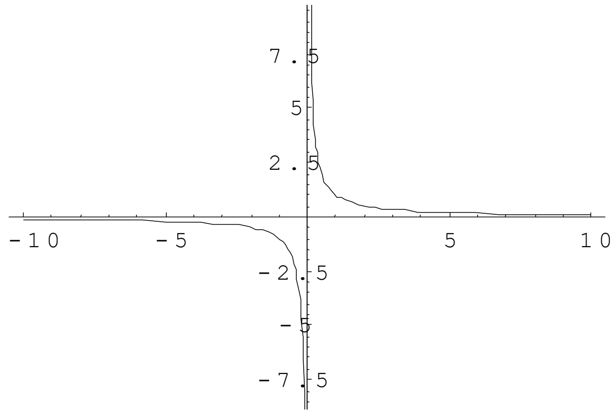
<u>Пример.</u>Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член-корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональн} \quad \text{ое число} \\ 0, & x - \text{иррационал} \quad \text{ьное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0.

<u>Пример.</u>Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

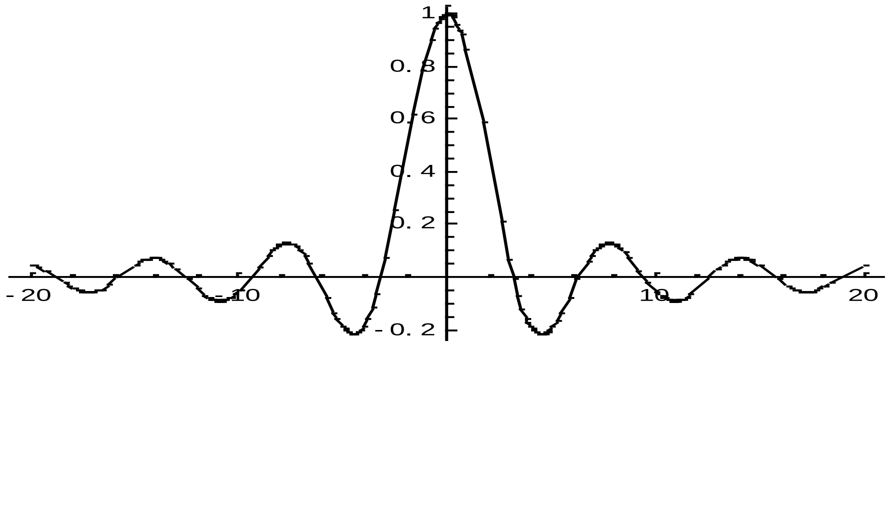


<u>Пример.</u>$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

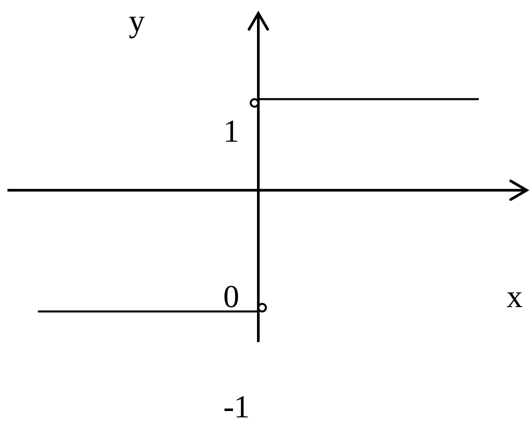
Функция не определена в точке x = 0, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке x = 0 функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



<u>Пример.</u>$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & при \quad x > 0 \\ -1, & при \quad x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается sign(x) – знак x. В точке x = 0 функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке x = 0, положив f(0) = 1, то функция будет непрерывна справа, если положить f(0) = -1, то функция будет непрерывной слева, если положить f(x) равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке x = 0 разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

<u>Непрерывность функции на интервале и на отрезке.</u>

<u>**Определение.**</u>Функция f(x) называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0, ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок [a, b] на бесконечное количество отрезков, которые "стягиваются" к точке x_0, то образуется некоторая окрестность точки x_0.

Свойство 2:Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2, что$f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \le f(x) \le M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4:Если функция f(x) непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция f(x)- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если$\mathrm{sign}(f(a)) \ne \mathrm{sign}(f(b))$, то$\exists x_0$: $f(x_0) = 0$.

Определение.Функция f(x) называется **равномерно непрерывной** на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

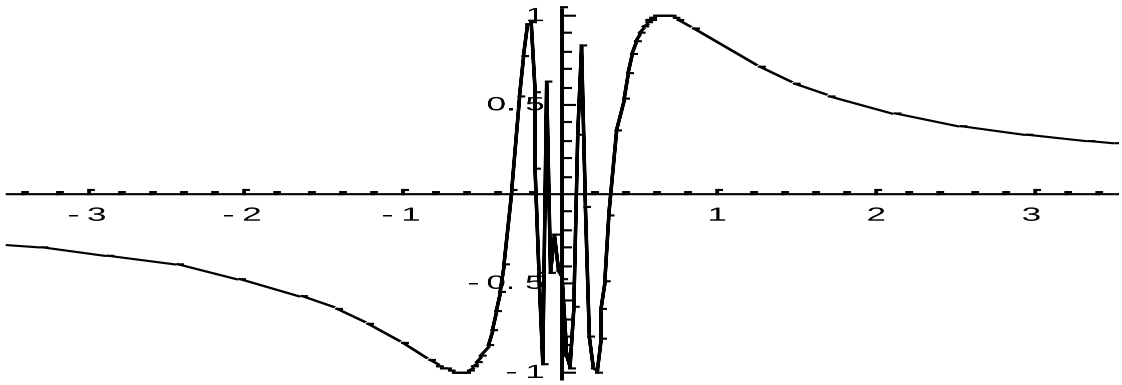
верно неравенство $$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от "обычной" в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при "обычной" непрерывности Δ зависит от ε и x.

<u>Свойство 6:</u> Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

<u>Пример.</u> $y = \sin\frac{1}{x}$



Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что$|f(x_1) – f(x_2)|>\varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

<u>Свойство 7:</u> Если функция f(x) определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция x = g(y) тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

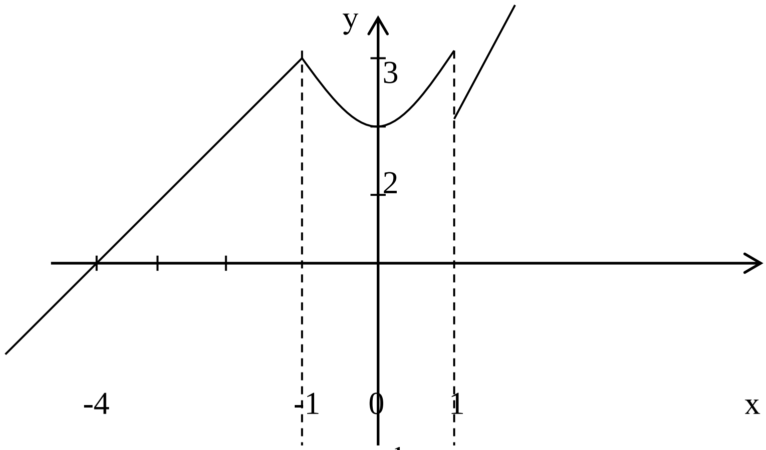
<u>Пример.</u>Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

в точке x = -1 функция непрерывна   в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



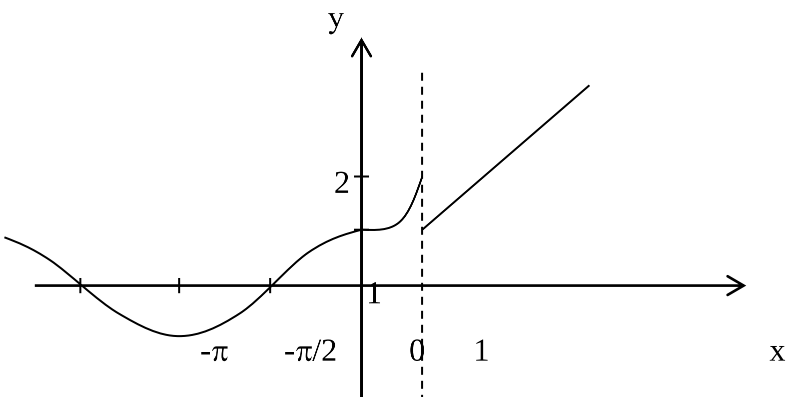
Пример.Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ x^2+1, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=1$$

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода



Задания к практической подготовке

Задание№1: Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2,} x>2.\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}\dfrac{|x+3|}{x+3}, x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 3\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{1-x^2}, 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, x>1.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}-\dfrac{2|x|}{x}, x<0\\ \sqrt{4-x^2}, 0\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x-2}, x>2.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}\dfrac{3|x|}{x}, x<0,\\ \sqrt{9-x^2}, 0\le x\le 3,\\ \dfrac{1}{x-3}, x>3.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2}, x<-2,\\ -\sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{|x-2|}{x-2}, x>2.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3,} x<-3,\\ -\sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 3,\\ \dfrac{|x-3|}{x-3}, x>3.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+1}, x<-1,\\ \sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 0,\\ \dfrac{|x|}{x}, x>0.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+2,} x<-2,\\ \sqrt{4-x^2}, -2\le x\le 2,\\ \dfrac{2|x|}{x}, x>2.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x+3}, x<-3,\\ \sqrt{9-x^2}, -3\le x\le 0,\\ \dfrac{3|x|}{x}, x>0.\end{cases}$

Вопросы к занятию 7

1. Дайте определение непрерывной функции.
2. Дайте определение точки разрыва.
3. Перечислите виды точек разрыва.
4. Дайте определение одностороннего предела.

Практическое занятие №8. Вычисление производных сложных функций.

Производная сложной функции.

<u>Теорема.</u> *Пусть y = f(x); u = g(x), причем область значений функции u входит в область определения функции f.*

Тогда $y' = f'(u) \cdot u'$

<u>Доказательство.</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, т.к. u = g(x) – непрерывная функция)

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ Теорема доказана.

<u>Логарифмическое дифференцирование.</u>

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать $\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции f(x).

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$\boxed{f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)}$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть u = f(x) и v = g(x) – функции, имеющие производные в точке x, f(x)>0.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = v\ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right)$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x\cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x\sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x\cdot(x^2 + 3x)^{x\cos x - 1}\cdot(2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2 + 3x)$$

Производная обратных функций.

Пусть требуется найти производную функции *y = f(x)* при условии, что обратная ей функция *x = g(y)* имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию x = g(y) по x:

$$1 = g'(y)y'$$

т.к. $g'(y) \neq 0$ $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Пример. Найти формулу для производной функции arctg.

Функция arctgявляется функцией, обратной функции tg, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом:

$$y = tgx; \qquad x = arctgy;$$

Известно, что $y' = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

По приведенной выше формуле получаем:

$$y' = \frac{1}{d(arctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arctgy)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Т.к. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2;$ то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса:

$$(arctgy)' = \frac{1}{1 + y^2};$$

Таким образом получены все формулы для производных арксинуса, арккосинуса и других обратных функций, приведенных в таблице производных

$y = \sin\left(x^2 + 3\right);$

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$y' = (\sin u)_u' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos\left(x^2 + 3\right) \cdot 2x$.

$y = \left(x^2 + e^x\right)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$y' = 10u^9 \cdot \left(x^2 + e^x\right)' = 10\left(x^2 + e^x\right)^9 \cdot \left(2x + e^x\right)$.

$y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = \left(x^2\right)' e^{\sin x} + x^2\left(e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}(\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x}\cos x.$$

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по x, полагая, что y есть функция от x и обозначая производную y через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0 .$$

Выразим из полученного равенства y':

$$\left(2y + 2x^2\right)y' = 2x - 4xy ;$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2} .$$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x ;$$

$$(-\sin y - 8y)y' = e^x ;$$

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y} .$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используем формулу $y' = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2 + 3)'} = \frac{-\sin t}{2t}$$

Задание к практической подготовке

Часть 1.

$y = e^{-x}$

$y = \sqrt{e^x}$

$y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = 16^{\sqrt{x^3 + 6x + 14}}$

$y = e^{(3x+5)^2}$

$y = a^{3x}$

$y = a^x e^x$

$y = \lg(2x)$

$y = \ln 3x$

$y = \log_3(4x - 2)$

1) $y = \ln(x^3)$

$y = (\ln x)^3$

$y = 5(2x^2 - 3x + 4)^8$

$y = 4\sqrt{1 + 3x^3 - 2x^5}$

$y = \sqrt[3]{(2 - x)(5 - 2x)}$

$y = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

$y = \sqrt{\dfrac{4}{2x^2 + 5}}$

$y = 3\sin(3x - 1)$

$y = \arcsin\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 3^{arctg\ 3x}$

$y = \ln\sin x$

$y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

Вопросы к занятию 8

1. Дайте определение производной функции.
2. Какую функцию называют сложной?
3. Перечислите правила нахождения производной сложной функции.
4. Какую функцию называю обратной?
5. Как находят производные к обратным функциям?

Практическое занятие № 9. Производные и дифференциалы высших порядков.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция f(x)- дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную функции f′(x), получим **вторую производную** функции f(x).

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. y′′ = (y′)′или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Общие правила нахождения высших производных.

Если функции u = f(x) и v = g(x) дифференцируемы, то

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3) $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + \frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + ...$
$... + uv^{(n)}$.

Это выражение называется **формулой Лейбница.**

Также по формуле $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$может быть найден дифференциал n- го порядка.

Дифференциал функции.Пусть функция y = f(x) имеет производную в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

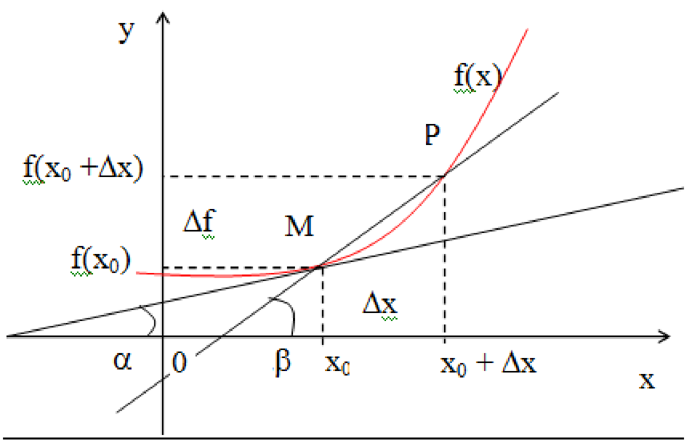
Определение.Дифференциалом функции f(x) в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

Обозначается dyили df(x).

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$или

$$\boxed{dy = f'(x)dx.}$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL: KL = $dy = tg\alpha\cdot\Delta x = y'\cdot\Delta x$

Таким образом, дифференциал функции *f(x)* в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$и $v = g(x)$-функции, дифференцируемые в точке x, то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$

3) $d(Cu) = Cdu$

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Дифференциал сложной функции.
Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$,т.е. y - сложная функция.

Тогда $$dy = \boxed{f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.}$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x 2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример.Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\dfrac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1+\frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8)-(-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2e^{x^2}\ln x$

$$y' = \left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x + x^2e^{x^2}\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x)$$

Задание к практической подготовке

Найти производные от указанных функций:

1. а) $y = x^5 + \ln\left(x^2+8x-1\right)$; б) $y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x+3}}$ 2. а) $y = \sin 3x\cdot\cos 5x$; б) $y = \dfrac{\text{tg}\, x}{\sin x - \cos x}$

3. а) $y = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$; б) $y = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}-1}$ 4. а) $y = x^2 + \arcsin\sqrt{1-x^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

5. а) $y=(2x+e^{-x^2})^2$; б) $y=\ln\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ 6. а) $y=\operatorname{tg}^2 6x-e^{\frac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{x+1}{x^2-\ln x}$

7. а) $y=(e^{-\sqrt{x}}+1)(1+e^{2x})$; б) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\ln x+1}{2-\ln x}$ 8. а) $y=x^2\cdot 10^{-x+2}$; б) $y=\dfrac{e^x+1}{\cos x}$

9. а) $y=\sin^2 2x\cdot\cos\dfrac{x}{2}$; б) $y=\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 10. а) $y=\operatorname{arctg} x^2-\ln\sin x$; б) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{2x}$

11. а) $y=x^4+e^{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y=\dfrac{\cos x+2x}{\sqrt{x}}$ 12. а) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x$; б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{e^x}{\sqrt{x^4-1}}$

Вопросы к занятию 9

1. Что такое дифференциал функции?
2. Каков смысл дифференциала?
3. Что такое производная высшего порядка?
4. Что такое дифференциал высшего порядка?
5. Каково правило нахождения дифференциала высшего порядка?
6. Каково правило нахождения производной высшего порядка?

Практическое задание № 10. Полное исследование функции. Построение графиков.

Исследование функций с помощью производной.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x)\ge 0$.

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем* $f'(x)>0$ *для* $a<x<b$, *то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x+\Delta x)>f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x+\Delta x)<f(x)$ при $\Delta x<0$,

тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

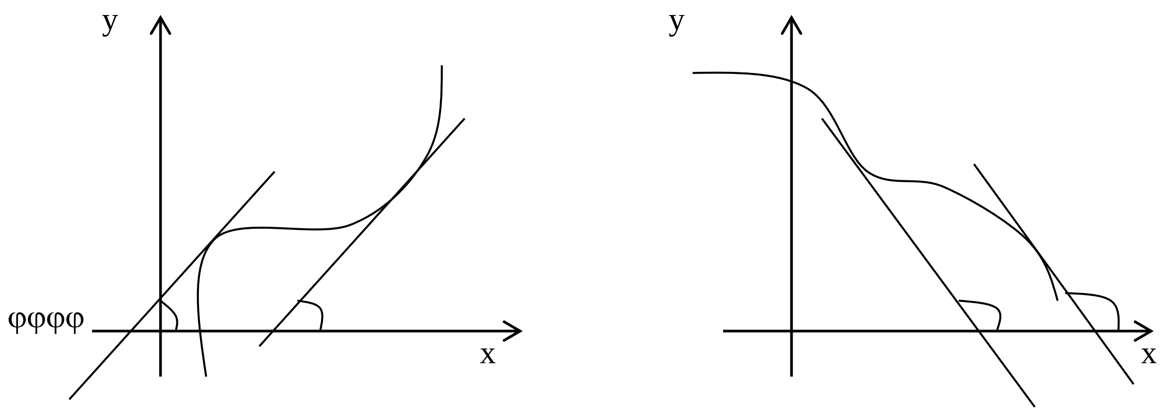
Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) – f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 – x_1)$, $x_1<\varepsilon<x_2$
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) – f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



<u>Точки экстремума.</u>

<u>Определение.</u>Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) >f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

<u>Определение.</u>Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

<u>Теорема.</u>(необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

<u>Доказательство.</u>Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.
Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x > 0$ верно неравенство:

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1), \text{ т.е.}$$

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad при \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad при \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

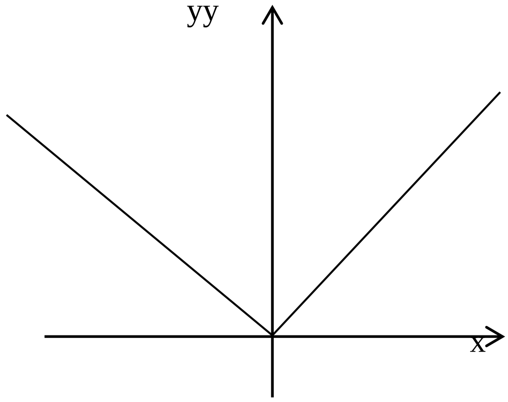
Теорема доказана.

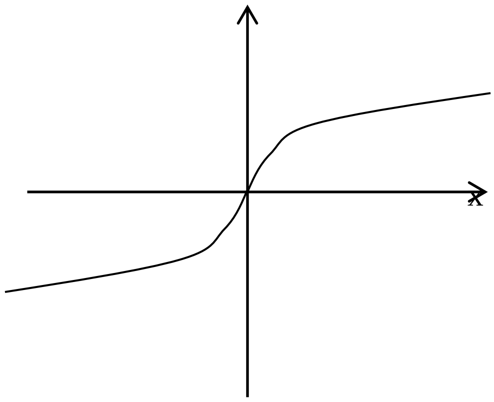
<u>Следствие.</u>Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

<u>Определение.</u>Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

<u>Пример:</u>f(x) = $|x|$ <u>Пример:</u>f(x) = $\sqrt[3]{x}$





В точке x = 0 функция имеет минимум, но

В точке x = 0 функция не имеет ни

не имеет производной.

максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

Теорема.(Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с “+” на “-“, то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x<\varepsilon<x_1$.

Тогда: 1) Если $x<x_1$, то $\varepsilon<x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad \text{или} \quad f(x) <f(x_1).$$

2) Если $x>x_1$, то $\varepsilon>x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad \text{или} \quad f(x) <f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) <f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

<u>Теорема.</u> *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

<u>Доказательство.</u>

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

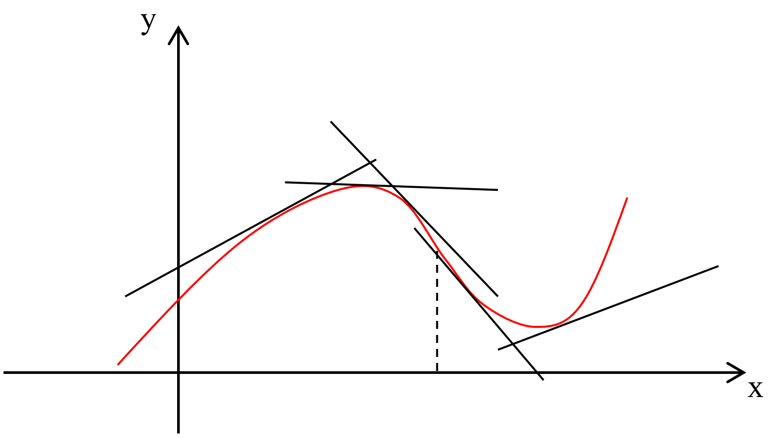
Т.к. $f''(x) = (f'(x))'< 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

<u>Выпуклость и вогнутость кривой.</u>
<u>Точки перегиба.</u>

<u>Определение.</u> Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

<u>Теорема 1.</u> *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

<u>Доказательство.</u> Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: $y = f(x)$;

Уравнение касательной: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$

Следует доказать, что $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) – f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0<c<x$.

$$y - \overline{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0) : y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \qquad x_0 < c_1 < c$

Пусть x >x_0тогда x_0<c_1<c<x. Т.к. x – x_0> 0 и c – x_0> 0, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \overline{y} < 0$.

Пусть x<x_0тогда x<c<c_1<x_0и x – x_0< 0, c – x_0< 0, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \overline{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если f′′(x) > 0 на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение.Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2.*Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f′′(a) = 0 или f′′(a) не существует и при переходе через точку x = a f′′(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть f′′(x) < 0 при x<aи f′′(x) > 0 при x>a. Тогда при x<aкривая выпукла, а при x>aкривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

2) Пусть f′′(x) > 0 при x<bи f′′(x) < 0 при x<b. Тогда при x<bкривая обращена выпуклостью вниз, а при x>b – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

Теорема доказана.

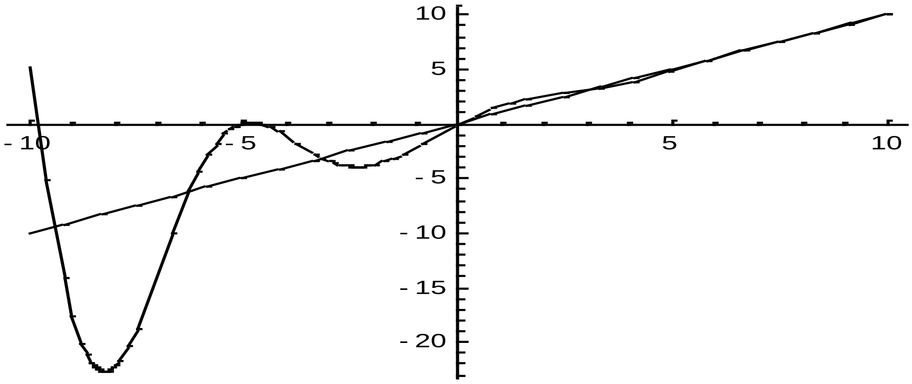
Асимптоты.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение.Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

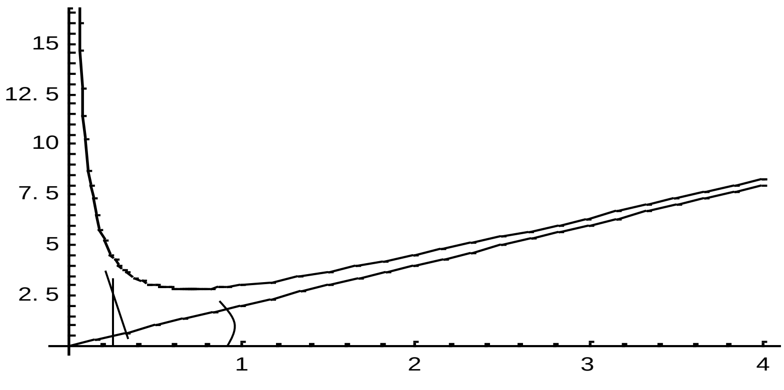
<u>Вертикальные асимптоты.</u>

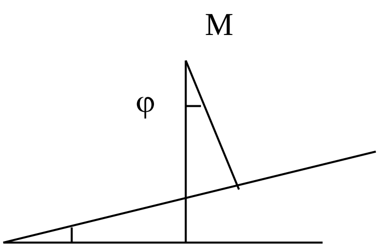
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая x = a – асимптота кривой y = f(x).

Например, для функции $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

<u>Наклонные асимптоты.</u>

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.





N

φP

Q

Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQк оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\overline{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP| = 0$, ∠NMP = φ, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP| = \lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi = \lim_{x\to\infty}|NM| = 0$$

$$|NM| = \big||MQ| - |QN|\big| = |y - \overline{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов kиb.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. x→∞, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.}$$

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx + b)\right] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]}$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

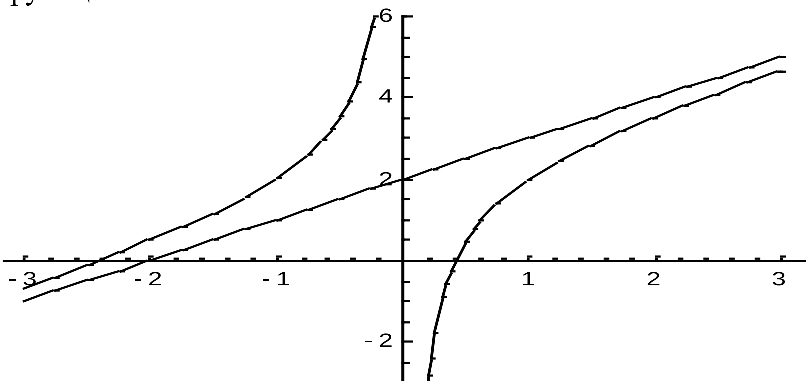
1) Вертикальные асимптоты: y→+∞x→0-0: y→-∞x→0+0, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.
Построим график функции:



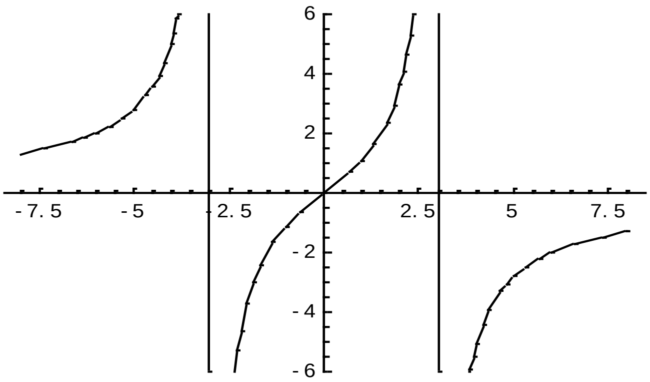
Пример.Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые x = 3 и x = -3 являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



Пример.Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} - x \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x+2} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x + 3}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.

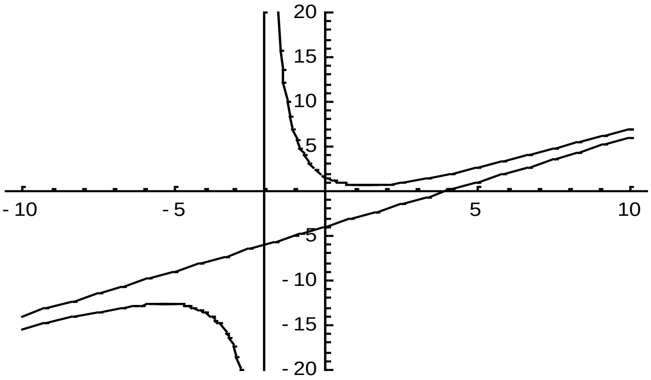


Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

<u>Пример.</u>Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1$, $x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

Видно, что точка x = -$\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка x = $\sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно -3$\sqrt{3}$ /2 и 3$\sqrt{3}$ /2.

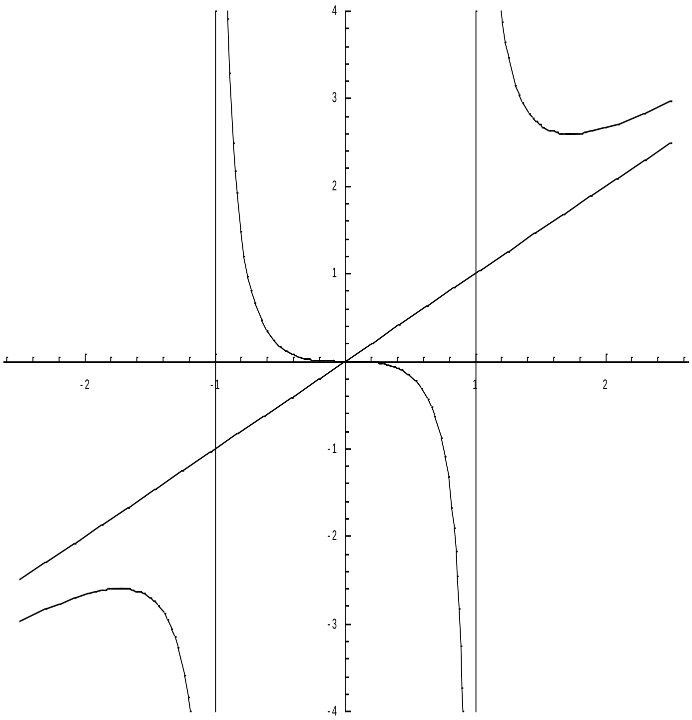
Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – y = x.

Построим *график* функции:



<u>Задание к практической подготовке</u>

Исследовать функцию с применением производной и построить ее график:

1. $y = \frac{x}{(x-1)^2}$ 2. $y = \frac{x^3+16}{x}$ 3. $y = \frac{x^3-1}{4x^2}$ 4. $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

5. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ 6. $y = \frac{x^2+1}{x}$ 7. $y = \frac{2x+1}{x^2}$ 8. $y = \frac{4x^2}{x^3-1}$

9. $y = \frac{x}{3-x^2}$ 10. $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$ 11. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

12. $y = \frac{x^2+16}{2x}$

Вопросы к занятию 10

1. Что такое функция?
2. Для чего проводят исследование функции?
3. Что такое асимптоты функции?
4. Что такое экстремумы функции?
5. Чему равна производная в точках, где существуют асимптоты?
6. Приведите алгоритм исследования функции.

Практическая работа № 11 Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле.

Первообразная функция.

Определение: Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x)+C;$

4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x.

1. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

<u>Пример:</u> $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgxdx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	10	$\int \cos xdx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	$tgx + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	$-ctgx + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

<u>Непосредственное интегрирование.</u>

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dtполучается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$.

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где uиv – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int udv + \int vdu \quad \text{или} \quad \int udv = uv - \int vdu \;;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

<u>Пример.</u> $\int x^2 \sin x dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{array}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$= \left\{\begin{array}{ll} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{array}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{\begin{array}{ll} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{array}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$= \left\{\begin{array}{ll} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{array}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$

$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t;\quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$
$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2}x\cos xdx = \{\sin x = t;\quad dt = \cos xdx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$
$$= -2\sin^{-1/2}x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int\frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$
$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$
$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int\frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} =$$
$$= \int\frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{Bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int\frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int\frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

Задание к практической подготовке

Вычислить неопределенные интегралы:

1\. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$ 2. а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int(x+3)e^{2x}dx$

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; б) $\int xe^{x}dx$

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; б) $\int xe^{-3x}dx$

5. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^{2}\right)^{5}}$; б) $\int (x+5)e^{2x}dx$

6. а) $\int \sqrt{1-5x}\,dx$; б) $\int x\cos\frac{x}{2}dx$

7. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^{2}}}$; б) $\int xarctgxdx$

8. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; б) $\int xe^{-2x}dx$

9. а) $\int \sqrt{1-2x}\,dx$; б) $\int (1-x)\sin 3xdx$

10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^{2}}}$; б) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$

11. а) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$; б) $\int (1-x)\cos 4xdx$

12. а) $\int \frac{x^{2}dx}{\sqrt{1-x^{3}}}$; б) $\int \ln x(2x+5)dx$

Найдите неопределенные интегралы. Результаты проверьте дифференцированием.

1. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^{2}+3}}dx$.

2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{3-5x^{2}}}dx$.

3. $\int \frac{x+2}{5x^{2}+3}dx$.

4. $\int \frac{5-2x}{7-3x^{2}}dx$.

5. $\int \frac{2\sin x+3}{\cos^{2}x}dx$.

6. $\int (3+2e^{x})^{5}e^{x}dx$.

7. $\int \frac{5-3\cos x}{\sin^{2}x}dx$.

8. $\int \frac{x(2+x^{2})}{1+x^{4}}dx$.

9. $\int \frac{e^{2x}+3e^{x}}{e^{2x}+3}dx$.

$\int \frac{\sin 2x+\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$

Вопросы к занятию 11

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования заменой переменных.
5. Сформулируйте правило интегрирования по частям.

Практическая работа № 12. Интегрирование методом подведения под знак дифференциала.

Подведение под знак дифференциала

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))d(u(x)),$$

так как $u'(x)dx = d(u(x))$.

Задания к практической подготовке

1	$\int \sin x \cos x dx$	6	$\int \sin 2x \cos x dx$
2	$\int \sin x \cos 2x dx$	7	$\int \frac{3x+4}{3x+2} dx$
3	$\int \frac{x^2+5}{x+2} dx$	8	$\int \frac{2x^2+2x+7}{x+3} dx$
4	$\int \sqrt[3]{1+2x} dx$	9	$\int 8 \cdot \sqrt[7]{1-7x} dx$
5	$\int 5 \cdot \sqrt[3]{(3x+5)^2} dx$	10	$\int \frac{3x dx}{\sqrt{3x^2+2}}$

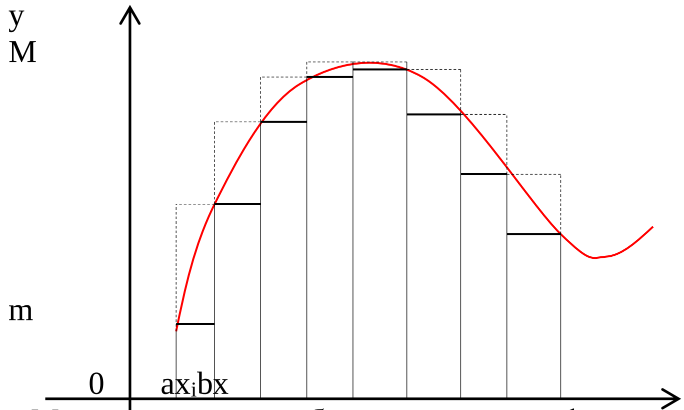
Вопросы к занятию 12

1. Что такое первообразная функции?
2. Что такое неопределенный интеграл?
3. Что означает непосредственное интегрирование?
4. Сформулируйте правило интегрирования методом подведения под знак интеграла.
5. Покажите формулами справедливость интегрирования методом подведения под знак интеграла.

Практическая работа № 13. Вычисление определённых интегралов.

<u>Определенный интеграл.</u>

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим mи Mнаименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]
Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) пточками.

$$x_0<x_1<x_2< \dots <x_n$$

Тогда $x_1 – x_0 = \Delta x_1$, $x_2 – x_1 = \Delta x_2$, … ,$x_n – x_{n-1} = \Delta x_n$;
На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \dots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \dots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.
Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b – a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b – a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

$$x_0<\varepsilon_1<x_1, \quad x_1<\varepsilon<x_2, \quad \dots \quad , x_{n-1}<\varepsilon<x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b].

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \dots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S$.

Определение:Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_iинтегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx$.

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Определение:Если для функции f(x) существует предел $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

Теорема:Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$;

2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Если f(x) ≤φ(x) на отрезке [a, b] a<b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если mи M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доказательство: В соответствии со свойством 5:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от mдо M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a≤ε≤b,тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорема доказана.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$$

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Φ(x). Найдем производную функции Φ(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема:Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)
Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство:Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого х, т.е. при х = а:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

А при х = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Заменив переменную tна переменную х, получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

.

Методы интегрирования определённого интеграла.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) φ(α) = a, φ(β) = b
2) φ(t) и φ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]
3) f(φ(t)) определена на отрезке [α, β], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$

Пример.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{Bmatrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{Bmatrix} = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Пример.

$\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Приближенное вычисление определенного интеграла.

Как было сказано выше, существует огромное количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подинтегральная функция заменяется “близкой” к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Формула прямоугольников.

Если известны значения функции f(x) в некоторых точках $x_0, x_1, \dots, x_m$, то в качестве функции “близкой” к f(x) можно взять многочлен P(x) степени не выше m, значения которого в выбранных точках равны значениям функции f(x) в этих точках.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Если разбить отрезок интегрирования на правных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. При этом:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n).$$

Составим суммы: $y_0\Delta x + y_1\Delta x + \dots + y_{n-1}\Delta x$

$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \dots + y_n\Delta x$

Это соответственно нижняя и верхняя интегральные суммы. Первая соответствует вписанной ломаной, вторая – описанной.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$ или

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ - любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется **общей формулой прямоугольников.**

Задание к практической одготовке

1)Вычислить определенные интегралы используя только определение и понятие интегральной суммы. Решение проиллюстрировать геометрическими построениями:

1. *f(x)= 2x -4 , [1;9]*
2. *f(x)= x^2 +1 , [-2;2]*
3. *f(x)= e^{-x}, [1; 10]*

2)Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$1.\int_a^b e^x dx$. $2.\int_a^b x^m dx$. $3.\int_a^b \sin(x)dx$ $4.\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$. $5.\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$6.\int_a^b \frac{1}{\sin^2(x)}dx$. $7.\int_a^b C^x dx$. $8.\int_a^b \frac{1}{x}dx$. $9.\int_a^b \cos(x)dx$. $10.\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)}dx$.

$11.\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$. $12.\int_1^2 \left(x^2-2x+3\right)dx$. $13.\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+x^2\right)dx$.

$14.\int_1^4 \frac{1+\sqrt{t}}{t}dt$. $15.\int_1^e \left(\frac{\lg(z)+1}{z}\right)dz$. $16.\int_0^1 (1+t)^3 dt$.

$17.\int_{-1}^1 \frac{(x-1)^3}{x}dx$. $18.\int_0^{2\pi} \left(\cos(x)+\sin(x)\right)dx$. $19.\int_2^4 \left(x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$.

$20.\int_0^3 \left(\frac{\sin(2x)}{\cos(x)}\right)dx$.

В заданиях 1-5 вычислить интегралы, применив в 1-4– метод подстановки, в 5 – метод интегрирования по частям.

$1.\int_0^1 (5x-2)^4 dx.$ $2.\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx.$ $3.\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos\left(x^2\right)dx.$ $4.\int_0^{\ln 2} e^{2x-1}dx.$ $5.\int_1^2 (x+1)\ln x dx.$

$1.\int_2^3 \frac{dx}{3x-5}.$ $2.\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x-1}.$ $3.\int_0^1 \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}.$ $4.\int_3^7 \frac{dx}{x\ln^2 x}.$ $5.\int_0^\pi \left(x^2+2\right)\cos x dx.$

$1.\int_0^{\pi/4} \sin 2t\cdot dt.$ $2.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ $3.\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ $4.\int_{-2}^2 \sqrt{x+2}dx.$ $5.\int_0^\pi x^2\cos x dx.$

$1.\int_0^1 e^{3x}dx.$ $2.\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}.$ $3.\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}.$ $4.\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$ $5.\int_\pi^{2\pi} (x+1)\sin x dx.$.

Вопросы к занятию 13

1.Что такое определенный интеграл?
2.Что является результатом при вычислении определенного интеграла?
3.Приведите формулу Ньютона-Лейбница?
4.Как можно приближенно вычислить определенный интеграл?
5. Дайте определение интегала при помощи понятия интегральной суммы.

Список рекомендуемой литературы
Список основной литературы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/615108

2. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. http://znanium.com/catalog/product/872363

Дополнительная литература

1. Кочетков, Смерчинская, Соколов. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник- Москва: Издательство "ФОРУМ", 2017 http://znanium.com/catalog/product/760157